LIBRARY OF CONGRESS
1800

Class AS 182
Book B35

SMITHSONIAN DEPOSIT

2/4

SITZUNGSBERICHTE

338
2224
Pat21

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

13

Library of Congress
MAR 2 4 1925
Smithsonian Deposit

JAHRGANG 1924

PHYSIKALISCH-MATHEMATISCHE KLASSE

VERZEICHNIS DER MITGLIEDER DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN AM 1. JANUAR 1924
ÖFFENTLICHE SITZUNG ZUR FEIER DES JAHRESTAGES KÖNIG FRIEDRICHS II. AM 24. JANUAR 1924
ÖFFENTLICHE SITZUNG ZUR FEIER DES LEIBNIZISCHEN JAHRESTAGES AM 3. JULI 1924
VERZEICHNIS DER VOM 1. DEZEMBER 1923 BIS 30. NOVEMBER 1924 EINGEGANGENEN DRUCKSCHRIFTEN

STÜCK I—XXXIV.

BERLIN 1924

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

A S182
B35

INHALT

Seite

Verzeichnis der Mitglieder der Akademie der Wissenschaften am 1. Januar 1924 . . I
Öffentliche Sitzung zur Feier des Jahrestages König Friedrichs II. am 24. Januar 1924 XVII
PLANCK: Ansprache XVII
PLANCK: Jahresbericht XXI
PLANCK: Personalveränderungen XXIII
ROETHE: Bericht über die Deutschen Texte des Mittelalters XXIV
HOLL: Die Geschichte des Worts Beruf XXIX
Jahresbericht über die griechisch-römische Altertumskunde LVII
Jahresbericht über die Sammlung der griechischen Inschriften LVII
Jahresbericht über die Sammlung der lateinischen Inschriften LVII
Jahresbericht über das griechische Münzwerk LVIII
Jahresbericht über die Prosopographia imperii Romani saec. I—III LVIII
Jahresbericht über die Preußische Kommission LVIII
Jahresbericht über die Kant-Ausgabe LIX
Jahresbericht über das Wörterbuch der ägyptischen Sprache LX
Jahresbericht über das »Tierreich« LX
Jahresbericht über den Nomenclator animalium generum et subgenerum LXI
Jahresbericht über das »Pflanzenreich« LXII
Jahresbericht über die Geschichte des Fixsternhimmels LXII
Jahresbericht über die Ausgabe der Werke Wilhelm von Humboldts LXIII
Jahresbericht über die Leibniz-Ausgabe LXIII
Jahresbericht über das Corpus Medicorum Graecorum LXIV
Jahresbericht über die Deutsche Literaturzeitung LXIV
Jahresbericht der Deutschen Kommission LXV
Jahresbericht über die Forschungen zur neuhochdeutschen Sprach- und Bildungsgeschichte LXXII
Jahresbericht der Orientalischen Kommission LXXIII
Jahresbericht der DILTHEY-Kommission LXXV
Jahresbericht der SAVIGNY-Stiftung LXXV
Jahresbericht der BOPP-Stiftung LXXVI
Jahresbericht der HERMANN-und-ELISE-geb.-HECKMANN-WENTZEL-Stiftung LXXVI
Jahresbericht der Kommission für das Wörterbuch der deutschen Rechtssprache LXXVI
Jahresbericht über die Bearbeitung der Flora von Papuasien und Mikronesien LXXIX
Jahresbericht über die Arbeiten für das Decretum Bonizonis und für das Corpus glossarum anteaccursianarum LXXX
Jahresbericht über germanisch-slawische Altertumsforschung LXXXI
Jahresbericht über die Erforschung der Geschichte unserer Nationalitätsgrenze (Germanisation des Ostens) LXXXI
Jahresbericht über das Deutsche Biographische Jahrbuch LXXXI
Öffentliche Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages am 3. Juli 1924 . . . LXXXIII
ROETHE: Ansprache LXXXIII
JAEGER: Antrittsrede LXXXVI
ROETHE: Erwiderung LXXXVIII
BIEBERBACH: Antrittsrede XC
PLANCK: Erwiderung XCI
FICK: Gedächtnisrede auf JOHANNES ORTH XCII
KEIBEL: Gedächtnisrede auf OSKAR HERTWIG XCVIII
HEIDER: Gedächtnisrede auf WILLY GEORG KÜKENTHAL XCIX
SCHLENK: Gedächtnisrede auf ERNST BECKMANN CIV
HEYMANN: Gedächtnisrede auf EMIL SECKEL CV
Preisaufgabe aus dem COTHENIUSschen Legat CXIX
DIEZ-Stiftung CXX
Stipendium der EDUARD-GERHARD-Stiftung CXX
Verleihungen der LEIBNIZ-Medaille CXX
ROETHE: Schlußwort CXXI
Verzeichnis der vom 1. Dezember 1923 bis 30. November 1924 eingegangenen Druckschriften CXXIII

Inhalt

	Seite
Rubner: Über eine neue Form von Respirationsapparaten	2
Carathéodory: Zur Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie	12
Keibel: Zum Kopfproblem	30
Adresse an Hrn. Max Lenz zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 5. März 1924	46
Ludendorff: Über die Radialgeschwindigkeit von ϵ Aurigae	49
Correns: Über den Einfluß des Alters der Keimzellen. I. Dritte Fortsetzung der Versuche zur experimentellen Verschiebung des Geschlechtsverhältnisses	70
Schottky: Über die Harmonie des Thetasystems. 1. Mitteilung	106
Adresse an Hrn. Joseph Partsch zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 7. März 1924	119
Hellmann: Untersuchungen über die jährliche Periode der Niederschläge in Europa	122
Zimmermann: Die Knickfestigkeit offener und geschlossener Stabzüge (Stabringe)	153
Müller-Breslau: Versuche mit auf Biegung und Knickung beanspruchten Flugzeugholmen	166
Bieberbach: Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche	181
Schur: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie	189
Valentiner, S. und Rössiger, M.: Über Ökonomie der Fluoreszenzstrahlung	210
Rubner: Über die Bildung der Körpermasse im Tierreich und die Beziehung der Masse zum Energieverbrauch	217
Adresse an Hrn. Hugo Bücking zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 30. Mai 1924	238
Penck: Das Hauptproblem der physischen Anthropogeographie	242
Heider: Vom Zahnwechsel bei polychäten Anneliden	258
Einstein: Quantentheorie des einatomigen idealen Gases	261
Keibel: Über die Gefäße von Petromyzonten	272
Zimmermann: Die Knickfestigkeit gekrümmter Stäbe mit elastischer Einspannung	277
Adresse an Hrn. Zimmermann zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 29. Juli 1924	289
Adresse an Hrn. Friedrich Teutsch in Hermannstadt zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1924	291
Schur: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. II. Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen	297
Haberlandt: Zur Entwickelungsphysiologie des Spaltöffnungsapparates	325
Weyl, H.: Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen. (Aus einem Schreiben an Hrn. I. Schur)	338
Schur: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. III. Vereinfachung des Integralkalküls. Realitätsfragen	346
Namen- und Sachregister	357
Berichtigung	360

1924 I—VII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Klassensitzung am 10. Januar. (S. 1)
RUBNER: Über eine neue Form von Respirationsapparaten. (Mitteilung vom 15. Juni 1922.) (S. 2)
Gesamtsitzung am 17. Januar. (S. 6)
Klassensitzung am 31. Januar. (S. 8)
Gesamtsitzung am 7. Februar. (S. 9)
Klassensitzung am 14. Februar. (S. 11)
CARATHÉODORY: Zur Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie. (S. 12)
Gesamtsitzung am 21. Februar. (S. 28)
Klassensitzung am 28. Februar. (S. 29)
KEIBEL: Zum Kopfproblem. (S. 30)

Library of Congress
JU 1 2 192
Smithsonian Deposit

BERLIN 1924

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1924

I. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 10. Januar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

Hr. Schur sprach über: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. (Ersch. später.)

Der von A. Hurwitz angegebene Integralkalkül zur Erzeugung von Invarianten läßt sich im Falle der projektiven Invarianten durch einen einfacheren Kalkül ersetzen. Für den Fall der Orthogonalinvarianten liefert die Hurwitzsche Methode auch eine Lösung des Abzählungsproblems. Dies gelingt, indem man für die Homomorphismen der Gruppe der reellen orthogonalen Substitutionen eine Theorie entwickelt, die weitgehende Analogien mit der Frobeniusschen Theorie der Gruppencharaktere aufweist.

Über eine neue Form von Respirationsapparaten.

Von Max Rubner.

(Vorgetragen am 15. Juni 1922 [s. Jahrgang 1922 S. 172].)

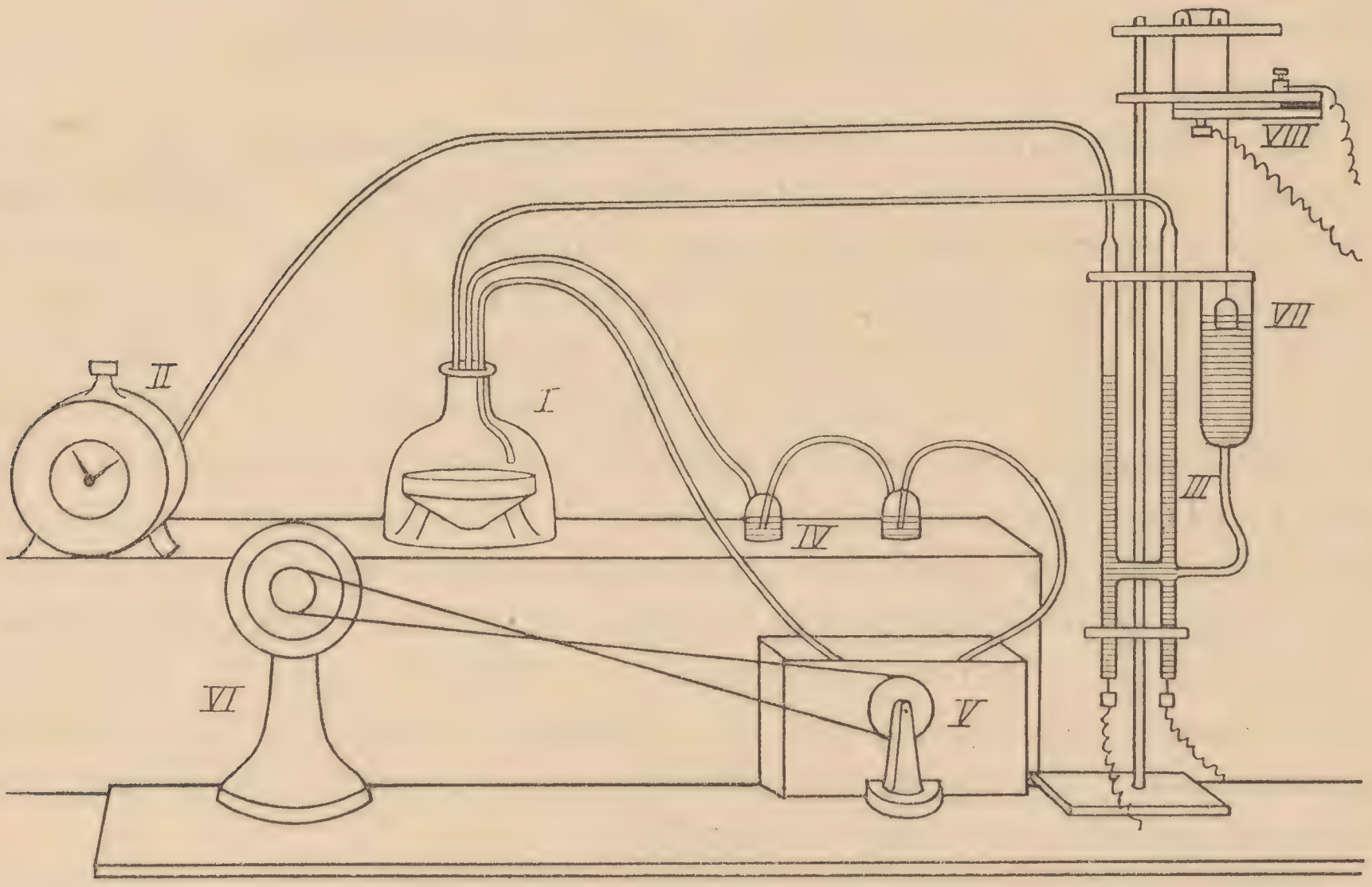
Die Verwendung von Respirationsapparaten für tierische Organismen muß sich, was ihre Konstruktion anbelangt, der Größe der Tiere anpassen. Durch diese Erwägung wird die Gestaltung solcher Apparate in ihrer Ausführung verschieden. Die beiden hauptsächlich angewandten Prinzipe aber für Versuche bis zu 24 Stunden sind nur zwei, jenes von Regnault und jenes von Pettenkofer. Der erste Typ beruht auf dem Prinzip der Lüftung einer dicht verschlossenen Glasglocke als Tierbehälter, wobei die aus dem Raum abgesaugte Luft entkohlensäuert wird und wieder in den Versuchsraum zurückkehrt. Die naturgemäße, allmähliche Abnahme des Versuchsraumes an Sauerstoff bedingt eine Verminderung des Innendrucks, der zum Ansaugen von Sauerstoff aus einem Vorratsbehälter verwendet wird.

Der Typ Pettenkofer lüftet den Versuchsraum kontinuierlich und bestimmt in einem Teilstrom Kohlensäure und Wasser dauernd in der einströmenden und abströmenden Luft nach besonderen Methoden. Dieses Verfahren wird hauptsächlich in Kombination mit der Untersuchung der festen und flüssigen Ausscheidungen eines Tieres oder des Menschen benutzt und ermöglicht die Aufstellung einer Stoffwechselbilanz, wobei auf etwas indirektem Wege die Berechnung des Sauerstoffverbrauchs möglich ist, letzteres aber nur mit beschränkter Genauigkeit. Im allgemeinen werden für Apparate dieser Art allenfalls Tiere bis 1—2 kg herab benutzbar. Doch habe ich auch eine Modifikation eines solchen Apparates angegeben, der noch kleine Tiere von 60—70 g zu untersuchen erlaubt, unter wesentlicher Vereinfachung der Apparatur (Biologische Gesetze, Marburg 1887, S. 11). Eine obere Grenze für den Typ Pettenkofer gibt es eigentlich nicht, da selbst Ausführungen des Apparates zur Unsuchung unserer großen Haustiere (Pferd, Rind) bekannt geworden sind.

Die Übertragung des Regnaultschen Prinzips im Großen begegnet recht erheblichen Schwierigkeiten, weil völlig gasdichte Verschlüsse des Versuchsraumes gegeben sein müssen, auch die Herstellung erheblicher Mengen von reinem Sauerstoff immerhin ein kostspieliges Unternehmen war. Es sind tatsächlich nur relativ wenige Apparate dieser Art in Benutzung gekommen, wobei die technische Ausführung in fast allen Einzelheiten gegenüber dem ursprünglichen Typ geändert worden war, auch an Stelle der Messungen des Sauerstoffs schließlich Wägung des verbrauchten Sauerstoffs in komprimiertem Zustande auf besonderen Wagen zur Anwendung kam.

Für vergleichend physiologische Zwecke kann die Anwendung noch kleinerer Respirationsapparate, als sie bisher verwendet wurden, von Bedeutung sein; man hat auch neuerdings sogar minimetrische Methoden angegeben, z. B. in dem Apparat von Krogh, bei dem man z. B. Insekten mäßiger Größe beobachten kann.

Aber es fehlen Methoden, die auf die kleinsten Wirbeltiere und auch auf kleine Kaltblüter anwendbar sind. Vorbedingung für die wirkliche Brauchbarkeit ist die Durchführung von mindestens 24-Stunden-Versuchen und am besten automatische Funktion des Apparates selbst.



Weiter sollen Messungen der Kohlensäure, des Wasserdampfs und des Sauerstoffs möglich sein. Die Verbindung mit einem Tierkalorimeter geeigneter Beschaffenheit bleibt stets gegeben.

Will man diese Bedingung erfüllen, also auch den Sauerstoffkonsum messen, so kommt man stets auf das Regnaultsche Verfahren des geschlossenen Luftraumes zurück. Ich habe bei der Neukonstruktion eines kleinen Respirationsapparates daher diesen Übelstand mit in den Kauf nehmen müssen, weil sich ohne die Sauerstoffbestimmung nicht immer eine Beurteilung des Stoffwechsels ausführen läßt. Der neue Apparat ist bestimmt für Tiere von 20—60 g Lebendgewicht und reicht auch hin, kleine Kaltblüter trotz ihrer geringen Respirationsgröße zu prüfen. Vorstehende Abbildung gibt alle wesentlichen Teile desselben.

Die Tiere kommen in die hermetisch verschließbare Glasglocke I, welche am besten zur Gleichhaltung der Temperatur unter Wasser versenkt wird. Bei Kaltblütern wie Warmblütern darf man auf genaue Temperaturreglung niemals verzichten.

Dieser Tierraum wird ventiliert; dazu dient eine durch einen kleinen Elektromotor (VI) betriebene Kreiselpumpe, die in der Abbildung nicht sichtbar ist, weil sie in einem kleinen Kästchen V unter Öl so weit versenkt ist, daß

nur die Zu- und Ableitungsrohre frei bleiben. Die Größe der Ventilation kontrolliert man durch Vorversuche, wobei eine Umschaltung des Luftstromes nach einer Gasuhr vorgenommen wird.

Die kleine Kreiselpumpe lieferte maximal 1,74 l Luft pro Stunde.

Der Kreisstrom entnimmt Luft aus der Glocke, führt sie durch die Absorptionsgefäße (IV), die Ansatzrohre für die Gummischläuche sind angeblasen. Zuerst wird das H_2O durch 50 ccm konzentrierte Schwefelsäure absorbiert, dann die Kohlensäure durch 50 ccm einer 50prozentigen Kalilauge, darauf folgt ein Chlorkalziumrohr, das in der Zeichnung weggeblieben ist. Wollte man feuchte Luft herstellen, so müßte nochmals ein Röhrchen mit Wasser eingeschaltet werden. Vor und nach dem Versuch werden die Absorptionsgefäße gewogen.

Der im Versuchsraum durch den Sauerstoffverbrauch des Tieres entstehende negative Druck pflanzt sich durch eine Röhre nach einem Apparat (III) fort, in welchem mittels Nickelelektroden Wasser in O und H_2 zerlegt wird. Sobald der Druck in der Tierglocke gesunken ist, steigt die Flüssigkeit im Gasentwicklungsraum, und sie sinkt in dem Ausgleichbehälter, der einen Schwimmer aus Glas enthält, einen elektrischen Kontakt vermittelt und neuen Sauerstoff und Wasserstoff entwickelt. Der Sauerstoff strömt nach dem Versuchsraum, der entwickelte Wasserstoff zur Gasuhr. Das Volumen des Wasserstoffs ist doppelt so groß wie jenes des Sauerstoffs, man hat also den Vorteil einer schärferen Messung des Sauerstoffs. Man kann den verbrauchten Sauerstoff durch Einschaltung eines Chlorkaliumrohres vorher trocknen, doch läßt sich die Wasserführung des Sauerstoffs auch ohnedies genügend genau berechnen. Der Sauerstoff und Wasserstoff verdrängt, wie gesagt, die Flüssigkeit des Entwicklungsapparates in das Seitengefäß.

Im Wasser befindet sich der gläserne Schwimmer (VII), der mit einem Seidenfaden einen elektrischen Kontakt VIII öffnet und schließt. Es wird also stets nach Maßgabe des Sauerstoffkonsums durch das Tier aufs neue elektrolytischer Sauerstoff entwickelt. In manchen Fällen mit reichlichem Sauerstoffverbrauch wird es besser sein, den Strom zur elektrolytischen Zerlegung des Wassers in einen eigenen Stromkreis einzuschalten und dem Regulator also nur die Aufgabe der Schließung dieses zweiten Stromkreises zuzuweisen. Der Apparat wird am besten in einem Raum von konstanter Temperatur aufgestellt. Die Gasuhr muß eine zuverlässige Messung gestatten und nach ihrer Aufstellung geeicht sein.

Die Größe des Luftraums für die Tiere kann beliebig klein gewählt werden. Sie betrug bis zu 2700 ccm, dazu kommen 600—800 ccm als Inhalt der Gasuhr und der Leitungen usw. Das Voltmeter (III) hatte eine Länge von etwa 25 cm bei einem Durchmesser der Röhren von 20 mm. Das Ausgleichsgefäß mit Schwimmer eine Weite von 50 mm. Nach 20—25 Versuchen zeigte sich, daß die Nickelelektroden am Sauerstoffpol angegriffen und oxydiert werden. Der dabei verzehrte Sauerstoff kommt als Fehlerquelle aber nicht in Betracht. Gesäuertes Wasser und Platinelektroden sind wegen Ozonbildung nicht verwendbar. Als Kontrollversuch für das Funktionieren der wesentlichen Teile des Apparates empfiehlt sich als einfachstes Mittel das

Verdunsten einer bestimmten Menge Wasser, das sich dann als Gewichtszuwachs in dem Absorptionsgefäß, das mit konzentrierter Schwefelsäure beschickt ist, wiederfindet. Bei zu großer Ventilationsgeschwindigkeit können Spuren von Wasser durch die Schwefelsäure gerissen werden. Auf gleichmäßige Temperatur des Versuchsraumes ist dringend zu achten. Der von dem Tier veratmete Sauerstoff wird automatisch ersetzt, mehrfache Gasanalysen der Luft des Tierraumes zu Ende von Experimenten haben eine Abweichung von dem normalen Sauerstoffgehalt der Luft nicht ergeben.

Ausgegeben am 18. März.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1924

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Sering sprach über die Entwicklung der englischen Agrarverfassung auf Grund neuerer Untersuchungen.

Mit der größten Folgerichtigkeit sind die Keime zur Entwicklung gebracht worden, welche die normannische Eroberung in Englands Boden gelegt hatte. Die Großgrundherrschaft hat keine selbständigen Elemente neben sich geduldet, die kleineren Grundherren ebenso verdrängt wie die von Anfang an spärlich vorhandenen freeholders. Der Ersatz der bäuerlichen Kleinbetriebe in England und Schottland durch Großbetriebe hat vor Ausbruch der Napoleonischen Kriege keinerlei volkswirtschaftliche Rechtfertigung durch reichlichere Volksernährung gefunden. Dann folgte eine Zeit hoher Leistungen des britischen Großlandbaus. Aber in der Agrarkrisis seit Ausgang der siebziger Jahre hat der dortige Großbetrieb versagt, das Land bringt weniger hervor als die Bauernländer, auch die zollpolitisch ungeschützten. Auch hat der Großgrundbesitz das Land entvölkert und scharfe soziale Gegensätze hervorgerufen.

2. Hr. Norden überreichte sein Werk: »Die Geburt des Kindes. Geschichte einer religiösen Idee.« (Leipzig und Berlin 1924.)

3. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff legte zwei neu erschienene Bände des Corpus Medicorum Graecorum vor, und zwar:

Bd. II: Aretaeus edidit Carolus Hude und

Bd. V 4, 2: Galeni de sanitate tuenda, de alimentorum facultatibus, de bonis malisque sucis, de victu attenuante, de psitana. Ediderunt Konradus Koch, Georgius Helmreich, Carolus Kalbfleisch, Otto Hartlich. (Lipsiae et Berolini 1923.)

4. Das korrespondierende Mitglied Hr. Rudolf Wackernagel in Basel übersandte sein Werk: »Humanismus und Reformation in Basel.« (Basel 1924.)

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. Paul Wernle in Basel übersandte sein Werk: »Der schweizerische Protestantismus im XVIII. Jahrhundert«, I. Band. (Tübingen 1923.)

6. Vorgelegt wurde die Schrift des verstorbenen Ehrenmitgliedes Hrn. Richard Schöne in Berlin: »Erinnerungen an Theodor Mommsen zum 30. November 1917«, herausgegeben von Hermann Schöne. (Münster i. W. 1923.)

7. Vorgelegt wurde ferner Monumenta Germaniae historica, Scriptores rerum Germanicarum, nova series, tomus II: Die Chronik der Böhmen des Cosmas von Prag, herausgegeben von Bertold Bretholz. (Berlin 1923.)

Die Akademie hat am 17. Januar den Hrn. Professor Dr. Olof August Danielsson in Uppsala zum korrespondierenden Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse und den Hrn. Professor Dr. Waldemar Christofer Brögger in Christiania zum korrespondierenden Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse Hrn. Moriz Ritter in Bonn am 28. Dezember 1923 und das korrespondierende Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Georg Quincke in Heidelberg am 13. Januar 1924 durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 18. März.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

Hr. Ludendorff sprach »Über die Radialgeschwindigkeit von ε Aurigae«. (Ersch. später.)

Nach zahlreichen Beobachtungen auf dem Potsdamer Observatorium zeigt die Radialgeschwindigkeit des Algol-Sternes ε Aurigae (Spektrum cF 5) Veränderungen, deren Periode mit der des Lichtwechsels (27 Jahre) identisch ist. Die Bahnelemente lassen sich aus den in Potsdam und einigen an anderen Sternwarten angestellten Messungen genähert ableiten. Außer diesen langsamen Änderungen sind nun noch sekundäre Schwankungen der Radialgeschwindigkeit in einer veränderlichen Periode von 4 bis 6 Monaten vorhanden. Es ist kaum möglich, diese sekundären Schwankungen der Linienverschiebungen durch eine Bahnbewegung zu erklären, man muß sie vielmehr einer unbekannten Ursache zuschreiben. Auch bei anderen c-Sternen finden sich solche Anomalien, wie die nähere Diskussion zeigt. Es wird bei dieser Gelegenheit besonders auf den c-Stern υ Sagittarii hingewiesen, der nach den vorhandenen amerikanischen Beobachtungen eine ganz enorme Masse (314 Sonnenmassen) haben muß, ein Umstand, der bisher nicht bemerkt worden war.

Ausgegeben am 18. März.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Petersen sprach über »Die Jupiterprophezeiung in Grimmelshausens Simplicissimus«.

Die Prophezeiung eines Irrsinnigen, die im Mittelpunkt des Romans steht, ist nachträglich eingebaut. Die Grundlinien gab die westfälische Sage von der Völkerschlacht am Birkenbaum; die Anregung zur Einkleidung der Bericht des »Theatrum Europaeum« über einen 1636 in Königsberg aufgetretenen Propheten, zu dessen göttlichen Prätensionen das Ungeziefer, das seinen Leib bedeckte, in lächerlichem Widerspruch stand. Aus Fischarts »Flöhhatz«, aus Alemans »Gusman«, aus Moscheroschs »Philander« und seinen unechten Fortsetzungen gliederten sich allerlei literarische Assoziationen an. Ideengeschichtlich bedeutet die Prophezeiung eine eigenartige Mischung von Uraltmythischem (Motiv des Wunderschwertes) mit Gegenwartsfragen (von d'Aubéry vertretene französische Ansprüche auf das Kaisertum), volkstümlicher Tradition (Hoffnungen sozialer Reform in der Revolutionsliteratur der Bauernkriege) und Vorklängen der Aufklärung (Einheitsreligion als Grundlage religiösen Friedens; Parlament als Mittelglied einer theokratisch-demokratischen Verfassung). Diese Mischung kennzeichnet Grimmelshausens Bildungsschriftstellerei als eine dem absolutistischen Geist der Barockzeit entgegengesetzte Mittlerschaft zwischen den bürgerlichen Tendenzen des Reformations- und des Aufklärungszeitalters.

2. Hr. Burdach überreichte seine Schriften über »Die deutschen wissenschaftlichen Akademien und der schöpferische nationale Geist« (Sonderabdr. 1924) und über »Dante und das Problem der Renaissance« (Sonderabdr.).

3. Vorgelegt wurde das Werk des wissenschaftlichen Beamten Hrn. Prof. Dr. Hermann Dessau »Geschichte der Römischen Kaiserzeit«. 1. Bd. (Berlin 1924).

4. Ferner die Schrift von Dr. Heinrich Schnee »Die koloniale Schuldlüge« (Süddeutsche Monatshefte, 21. Jahrgang, 4. Heft, 1924).

5. Hr. Eduard Meyer legte von den »Wissenschaftlichen Veröffentlichungen der Deutschen Orientgesellschaft« vor:

Bd. 30, Heft 3: HH. Figulla, Keilschrifttexte aus Boghazköi, 3. Heft, 2. Hälfte (Leipzig 1923);

Bd. 34, Heft 5: Erich Ebeling, Keilschrifttexte aus Assur religiösen Inhalts, 9. Heft (Leipzig 1923);

Bd. 43: Anton Deimel, Schultexte aus Fara (Leipzig 1923).

6. Hr. Eduard Meyer legte ferner vor das Werk von Ludwig Borchardt »Porträts der Königin Nofret-ete« (Leipzig 1923) (Ausgrabungen der Deutschen Orientgesellschaft in Tell el-Amarna III).

Die philosophisch-historische Klasse der Akademie hat in diesem Jahre von einer Verleihung des zum 26. Januar aus der Dr.-Karl-Güttler-Stiftung zur Verfügung stehenden Betrages abgesehen.

Die Preußische Regierung hat durch Erlaß vom 5. Februar 1924 die Wahl des ordentlichen Professors an der Universität Berlin, Hrn. Dr. Werner Jaeger, zum ordentlichen Mitglied der philosophisch-historischen Klasse bestätigt.

Die Akademie hat den ordentlichen Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Hrn. Dr. Johannes Mewaldt, und den ordentlichen Professor an der Universität Lund, Hrn. Dr. Martin Nilsson, zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer philosophisch-historischen Klasse, und die ordentlichen Professoren an der Universität Uppsala, HH. Dr. Johannes August Harald Hammar und Dr. Allvar Gullstrand, zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Ausgegeben am 18. März.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

V. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 14. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Johnsen sprach über Forschungen zur Struktur des weißen Zinns. (Ersch. später.)

Es werden Betrachtungen über das Mark-Polanyische Strukturmodell des weißen Zinns angestellt und daran Rechnungen geknüpft, die sich auf die einfachen Schiebungen der weißen Zinnkristalle beziehen.

2. Hr. Einstein legte eine Arbeit des Ehrenmitgliedes Hrn. Carathéodory vor: »Zur Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie«.

Es wird eine axiomatische Darstellung der Raum-Zeit-Lehre der speziellen Relativitätstheorie gegeben, welche nur auf Voraussetzungen über das Verhalten des Lichtes gegründet ist, von der Idee des starren Körpers aber nicht unmittelbar Gebrauch macht.

Zur Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie.

Von C. Carathéodory.

Einleitung.

1. Die Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie ist durch Einstein begründet worden, der sich zu diesem Zwecke gewisser Experimente, die man mit »Lichtuhren« und »Maßstäben« machen kann, bedient hat. In den folgenden Seiten will ich nun zeigen, daß sich diese Axiomatik in überraschender Weise vereinfachen läßt, wenn man die ganze Theorie auf Zeitbeobachtungen allein stützt.

Es gelingt nämlich, das Axiom für die normale Lichtausbreitung ohne Benutzung von Längenmessungen und ohne vorherige Einführung des Begriffs einer Geschwindigkeit aufzustellen; das einzige, was wir für unsere Theorie benötigen, die uns von selbst ein natürliches Längen- und Winkelmaß liefern wird, sind die allereinfachsten Zeitbegriffe, die durch die Worte »früher«, »später« und »gleichzeitig« charakterisiert sind.

2. Untersuchen wir nun die allgemeinsten Transformationen, die einen Lichtraum von normaler Lichtausbreitung in einen ebensolchen überführen, der sich innerhalb des ersten irgendwie bewegt, so finden wir auf die denkbar natürlichste Weise das Hauptresultat Minkowskis, daß nämlich diese Transformationen durch eine Abbildung von vierdimensionalen Kontinuen aufeinander dargestellt werden können.

Außerdem erhalten wir aber noch das Resultat, daß diese Abbildungen eine kontinuierliche Gruppe bilden, die von nur endlich vielen, nämlich fünfzehn, infinitesimalen Transformationen erzeugt wird. Diese Gruppe enthält die Gruppe der gewöhnlichen Lorentz-Transformationen und der Verlagerungen des Raumes als Untergruppe, und außerdem nur noch Transformationen durch reziproke Radien der Minkowskischen Welt in sich selbst. Wir dürfen uns über dieses letzte Resultat nicht wundern: ist doch schon im Jahre 1909 von Cunningham und Bateman die Bemerkung gemacht worden, daß die Maxwellschen Gleichungen für derartige Transformationen durch reziproke Radien invariant bleiben[1].

3. Es zeigt sich nun, daß wir gezwungen sind, wenn wir die Lichtausbreitung allein beobachten, zwei Räume, die sich mit konstanter Beschleunigung gegeneinander bewegen, physikalisch gleich zu setzen. Dies ist aber, wie die ältesten Untersuchungen über die Gesetze der Mechanik lehren, nicht der Fall. Schränken wir aber unter diesem Gesichtspunkte unsere Gruppe

[1] E. Cunningham, Proc. London math. Soc. 8 (1910) p. 77; H. Bateman, Proc. London math. Soc. 8 (1910) p. 223.

ein, so zeigen ganz einfache Überlegungen, daß sämtliche nichtlinearen Transformationen aus ihr ausscheiden müssen.

4. Hierdurch wird die G_{15} auf die G_{11} reduziert, die außer den LORENTZ-Transformationen nur noch triviale Transformationen enthält.

Hätte nun der MICHELSON-MORLEYsche Versuch ein positives Ergebnis gezeitigt, so hätten wir die LORENTZ-Transformationen ebenso aus der Gruppe entfernen müssen, wie wir es für die Transformationen durch reziproke Radien getan haben, und es wäre nur noch eine G_7 von trivialen Transformationen übriggeblieben. Wir hätten dann geschlossen, daß das Postulat der Existenz eines Raumes von normaler Lichtausbreitung auch die Existenz eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit impliziert.

Der MICHELSON-MORLEYsche Versuch, der in unserer Darstellung bei der Aufstellung der Theorie ganz in den Hintergrund getreten war, erscheint also an der richtigen Stelle, sobald man das Ergebnis mathematischer Spekulationen für das Geschehen in der Natur verwerten will.

I. Die Axiome der Lichtausbreitung.

5. Die Dinge, die wir betrachten und materielle Punkte nennen, sollen stets identifiziert werden können, und werden im folgenden durch die Zeichen $P, Q, \cdots$ dargestellt. Sie sind Träger von gewissen Ereignissen, durch welche wir die Ausbreitung des Lichtes beobachten, und die im Aussenden und Empfangen von Lichtsignalen bestehen. Diese Ereignisse genügen den folgenden Axiomsgruppen:

I. Axiome der Zeitfolge.

I1. Zwei Ereignisse, die an einem und demselben materiellen Punkte P beobachtet werden, sind entweder »gleichzeitig«, oder aber das eine findet »früher«, das andere »später« statt.

Hierzu ist zu bemerken, daß die Begriffe »früher«, »gleichzeitig« und »später« als Rohprodukte der unmittelbaren Beobachtung nicht weiter erklärt werden können.

I2. Die zeitlichen Ereignisse, die an einem und demselben Punkte P beobachtet werden, sind geordnet.

Hiermit verstehe ich, daß die Begriffe »gleichzeitig«, »früher« und »später« denselben Axiomen genügen wie die Begriffe »gleich«, »kleiner« und »größer« in der Theorie der reellen Zahlen.

I3. Es ist stets möglich, in jedem beliebigen der von uns betrachteten Punkte P die Aussendung eines Lichtsignals gleichzeitig mit einem beliebigen anderen Ereignis, das im selben Punkte stattfindet, zu vollziehen.

6. Die zweite Gruppe von Axiomen behandelt die Lichtausbreitung.

II1. Sind P und Q zwei materielle Punkte, so entspricht jedem Lichtsignal α, das von P ausgeht, eindeutig ein Lichtsignal α', das in Q empfangen wird.

Zwei sich derartig entsprechende Lichtsignale sollen verbundene Ereignisse genannt werden.

II 2. Die Zeitfolge bleibt bei verbundenen Ereignissen erhalten.

Dies soll heißen, daß, wenn α und β zwei Lichtsignale darstellen, die in P aufgegeben werden, und α' und β' die ihnen in Q entsprechenden Ereignisse, die Ereignisse α' und β' dieselbe Reihenfolge (im Punkte Q) besitzen wie die Ereignisse α und β im Punkte P. Sind insbesondere α und β gleichzeitig, so sind es α' und β' ebenfalls.

7. Wir führen jetzt Lichtpolygone auf folgende Weise ein. Es seien $P_1, P_2, \cdots, P_n$ beliebige Punkte, von denen zwei aufeinanderfolgende verschieden sind. Wir geben in P_1 ein Lichtsignal α_1 auf und bezeichnen mit α_2' das in P_2 empfangene, mit α_1 verbundene Lichtsignal. Hierauf geben wir in P_2 ein mit α_2' gleichzeitiges Lichtsignal α_2 auf, was nach I 3 möglich ist, und bezeichnen mit α_3' das Ereignis, das in P_3 stattfindet und mit α_2 verbunden ist. Wir fahren auf diese Weise fort, bis wir in P_n ein Lichtsignal α_n' empfangen, das mit dem in P_{n-1} ausgesandten Signal α_{n-1} verbunden ist.

Man denkt sich gewöhnlich die Herstellung eines derartigen Lichtpolygons durch Vermittelung von geeigneten Spiegeln, die man in $P_2, P_3, \cdots P_{n-1}$ aufstellt.

Ist das Lichtpolygon geschlossen, d. h. fällt P_n mit P_1 zusammen, so soll noch folgendes Axiom gelten, das die »Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit« ausdrückt.

II 3. Bezeichnet man mit $\alpha_1, \alpha_2'; \alpha_2, \alpha_3'; \cdots; \alpha_{n-1}, \alpha_n'$ die Lichtsignale, die ein geschlossenes Lichtpolygon durchlaufen, so findet im Punkte $P_1 = P_n$ das Ereignis α_n' stets später als α_1 statt.

8. Die bisherigen Axiome, durch welche ja bloß das rohe Beobachtungsmaterial verarbeitet worden ist, enthalten noch gar keine Hypothesen über den uns umgebenden Raum; diese sollen nun in der folgenden Axiomsgruppe aufgestellt werden.

III 1. Die von uns betrachteten Punkte $P, Q, \cdots$ bilden eine Menge $\mathfrak{A}$, die in einem dreidimensionalen topologischen Raume $\mathfrak{R}$ eingebettet ist.

Dieses Axiom bedeutet einfach, daß die drei Parameter, die man benutzt, um die Punkte des topologischen Raumes zu definieren, auch zur Identifizierung unserer materiellen Punkte dienen können.

III 2. Die Punkte $P, Q, \cdots$ von $\mathfrak{A}$ sind Punkte eines Mediums, d. h. sie sind eineindeutig auf die inneren Punkte einer topologischen Kugel von $\mathfrak{R}$ bezogen.

Hierzu ist folgendes zu bemerken:

1. Wir denken uns unsere materiellen Punkte kontinuierlich ausgebreitet, um bei den folgenden Überlegungen die Hilfsmittel der Analysis bequem anwenden zu können. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß es bei einem späteren Stadium der mathematischen Physik wesentlich sein wird, gerade diese Voraussetzung durch eine andere zu ersetzen.

2. Wir denken uns die Punkte von $\mathfrak{A}$ in einem beschränkten Gebiete von $\mathfrak{R}$ enthalten, um uns den Weg zur allgemeinen Relativitätstheorie nicht zu verschließen.

9. Jedem der Lichtpolygone, die wir im § 7 betrachtet haben, entspricht jetzt ein Polygon unseres topologischen Raumes $\mathfrak{R}$. Wir stellen nun die Bedingung für die normale Lichtausbreitung folgendermaßen auf:

III 3. Die Lichtausbreitung in $\mathfrak{A}$ soll normal heißen, wenn, unter allen möglichen Darstellungen des Raumes $\mathfrak{R}$ durch drei Parameter, mindestens ein Koordinatenssystem x, y, z existiert, das folgender Bedingung genügt:

Deutet man x, y, z als rechtwinkelige Koordinaten eines Euklidischen Raumes, so soll von zwei gleichzeitig abgegebenen Lichtsignalen, die zwei geschlossene Lichtpolygone durchlaufen, deren Endpunkte mit dem Anfangspunkt O der Koordinaten x, y, z zusammenfallen, dasjenige früher ankommen, das das (euklidisch gemessene) kürzere Polygon beschreibt. Außerdem sollen die Signale gleichzeitig ankommen, wenn die beiden Polygone gleich lang sind.

Wir werden bald sehen, daß die im Axiome III 3 vorkommende Auszeichnung des Punktes O nur eine scheinbare ist. Ferner wird aus den Überlegungen des nächsten Abschnittes folgen, daß jeder Raum $\mathfrak{R}$ mit normaler Lichtausbreitung gerade auf nur eine Weise auf einen Euklidischen Raum abgebildet werden kann, der den Bedingungen des Axioms III 3 genügt.

10. Diese Tatsache, die man übrigens auch leicht direkt beweisen kann, zeigt, daß in einem Raume von normaler Lichtausbreitung eine natürliche Maßbestimmung sowohl für Entfernungen als auch für Winkel existiert, die ausschließlich von Zeitbestimmungen abhängt, die an Lichtpolygonen gemacht werden.

Um die Theorie zu vervollständigen, ist es nützlich, noch folgende rein mathematische Fragen zu behandeln, die aber hier unmöglich ihren Platz finden können: Erstens sollen notwendige und hinreichende Bedingungen gefunden werden, denen die Zeitbestimmungen an Lichtpolygonen im topologischen Raum $\mathfrak{R}$ genügen müssen, dafür, daß die Lichtausbreitung eine normale sei. Und zweitens soll mit einziger Benutzung von Lichtsignalen, die den gefundenen Bedingungen genügen, ein System von rechtwinkeligen Koordinaten x, y, z des Euklidischen Bildraumes aufgestellt werden.

11. Wir nehmen jetzt an, daß die Lichtausbreitung innerhalb unseres Mediums $\mathfrak{A}$ normal ist, und daß die Parameter x, y, z, durch welche wir die Punkte unseres Mediums identifizieren, den Bedingungen von III 3 genügen.

Nach dem bekannten Vorgange EINSTEINS konstruieren wir im Punkte O eine »Lichtuhr«, indem wir unendlich viele geschlossene Polygone betrachten, deren Endpunkte in O liegen und die im Euklidischen Raume der x, y, z die Längen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$ besitzen. Diese Polygone werden durch Lichtsignale, die die Zeiger unserer Uhr darstellen, wiederholt und unaufhörlich durchlaufen.

Falls nun zwei Lichtsignale, die das n^{te} und das $(n+1)^{\text{te}}$ Polygon durchlaufen, den Punkt O gleichzeitig verlassen, so wird die zweite, vierte, $\cdots$ An-

kunft des Lichtsignals beim $(n+1)^{\text{ten}}$ Zeiger mit je einem der aufeinanderfolgenden »Schläge« des n^{ten} Zeigers gleichzeitig erfolgen. Wir können demnach annehmen, daß die verschiedenen Zeiger unserer Uhr derart aufeinander abgestimmt sind, daß jeder Schlag eines beliebigen unter den Zeigern der Uhr in O gleichzeitig mit einem Schlage eines jeden der folgenden Zeiger stattfindet.

12. Wir nehmen nun an:

III 4. Für alle Ereignisse in O gilt bezüglich unserer Lichtuhr das Archimedische Axiom.

Hiermit ist zu verstehen, daß es keine Ereignisse in O gibt, die später oder früher als sämtliche Schläge unserer Uhr stattfinden. Dann muß aber jedes Ereignis α in O, das nicht mit einem Schlage eines der Zeiger der Uhr zusammenfällt, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schlägen eines beliebigen und daher auch eines jeden Zeigers stattfinden, und man kann, indem man diese Schläge zählt, dem Ereignis α einen dyadischen Bruch zuordnen, der eine Zahl t darstellt.

III 5. Für die Ereignisse in O gilt bezüglich unserer Lichtuhr das Stetigkeitsaxiom.

D. h. zwei Ereignisse in O finden dann (und nur dann) gleichzeitig statt, wenn sie demselben Werte der Zahl t, die wir soeben definiert haben, entsprechen.

Wir haben also im Punkte O eine natürliche Zeitmessung definiert, bei der wir übrigens noch den Zeitursprung willkürlich wählen können, indem wir t durch $(t-t_0)$ ersetzen, wobei t_0 eine Konstante bedeutet.

13. Es sei γ ein geschlossenes Lichtpolygon mit dem gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt O; wir bezeichnen mit h seine euklidische Länge im Raume der x, y, z. Mit Hilfe der drei letzten Axiome läßt sich jetzt sofort beweisen, daß ein Lichtsignal, das γ durchläuft und den Punkt O zur Zeit t verläßt, zur Zeit $(t+h)$ wieder in O ankommen wird.

Hierzu brauchen wir nur vier gegen Null konvergierende Folgen von positiven Zahlen $\varepsilon_n, \varepsilon_n', \eta_n$ und η_n' so zu bestimmen, daß die Zahlen

$$2^n(t+\varepsilon_n),\ 2^n(t-\varepsilon_n'),\ 2^n(h+\eta_n) \text{ und } 2^n(h-\eta_n')$$

ganze Zahlen bedeuten. Dann folgt aus den Axiomen II 2 und III 3, daß die Ankunftszeit τ des Lichtsignals, das γ durchläuft, den Ungleichheiten genügt

$$(t-\varepsilon_n')+(h-\eta_n') < \tau < (t+\varepsilon_n)+(h+\eta_n);$$

da nun dies für alle n gilt, muß (nach III 5) $\tau = t+h$ sein.

14. Wir können uns jetzt Lichtsignale denken, die nicht über Lichtpolygone, sondern entlang beliebigen rektifizierbaren Kurven geführt werden. Fallen die Endpunkte einer derartigen Kurve γ von der Länge h mit O zusammen, so kann man γ als Grenze von Polygonen γ_n ansehen, deren resp. Längen h_n gegen h konvergieren. Wir werden nach dem Früheren schließen, daß ein Lichtsignal, das entlang γ geführt wird und den Anfangspunkt dieser Kurve zur Zeit t verläßt, diesen Punkt zur Zeit $(t+h)$ wieder erreichen wird.

Sind jetzt P und Q zwei beliebige Punkte des Mediums $\mathfrak{A}$ und zwei Kurven γ und γ' gegeben, die P mit Q verbinden, so wollen wir zeigen, daß von zwei Lichtsignalen, die den Punkt P gleichzeitig verlassen und diesen beiden Kurven entlang geführt werden, dasjenige früher in Q eintrifft, das den kürzeren Weg beschrieben hat.

Hierzu verbinden wir O mit P durch eine Kurve γ von der Länge h_1 und Q mit O durch eine Kurve γ_2 von der Länge h_2; ferner seien mit h und h' die Längen von γ und γ' bezeichnet, und es sei z. B. $h < h'$. Das Signal α, das längs γ geführt wird, werde nun längs γ_2 bis O weitergeführt und treffe dort zur Zeit τ ein. Wir setzen $t = \tau - (h_1 + h + h_2)$ und bemerken, daß zwei Lichtsignale, die O zur Zeit t verlassen, und von denen das erste längs $(\gamma_1 + \gamma + \gamma_2)$, das zweite längs $(\gamma_1 + \gamma' + \gamma_2)$ geführt werden, die Kurven γ und γ' gleichzeitig mit den vorgegebenen Signalen beschreiben werden, und da das erste dieser Signale den Punkt O zur Zeit τ, das zweite aber denselben Punkt zur Zeit $(\tau + h' - h)$ erreicht, also später eintrifft, so muß nach dem Axiom II 2 das zweite Signal den Punkt Q später passieren als das erste, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

15. Wir können uns jetzt von der ausgezeichneten Rolle, die der Punkt O bisher gespielt hat, leicht befreien.

Wir bemerken hierzu, indem wir im Satze des letzten Paragraphen P mit Q zusammenfallen lassen, daß das Axiom III 3 richtig bleibt, wenn wir den Punkt O durch einen beliebigen Punkt P von $\mathfrak{A}$ ersetzen, so daß wir in jedem Punkte unseres Mediums nach dem § 11 eine Lichtuhr konstruieren können. Wir können demnach, weil die Axiome III 4 und III 5 ebenfalls, wie man sofort sieht, auch für diese Lichtuhren gelten, in jedem Punkte P von $\mathfrak{A}$ eine Ortszeit einführen.

Es handelt sich nun darum, die verschiedenen Uhren so aufeinander abzustimmen, daß kein Punkt von $\mathfrak{A}$ ausgezeichnet sei. Es sei γ eine Kurve, die P mit Q verbindet; ein Lichtsignal, das γ durchläuft und P zur Zeit t_P verläßt, treffe in Q zu einer Ortszeit t_Q ein. Da nun zwei gleichzeitig von P ausgehende Lichtsignale, von denen das erste eine Schleife von der Länge h, deren Endpunkte in P liegen, und hierauf die Kurve γ, während das zweite zuerst die Kurve γ und hierauf eine Schleife von der Länge h, deren Endpunkte in Q liegen, durchläuft, gleichzeitig den Punkt Q erreichen, so sehen wir, daß ein Lichtsignal, das den Punkt P zur Zeit $(t_P + h)$ verläßt und γ beschreibt, in Q zur Zeit $(t_Q + h)$ eintreffen wird. Für zwei gegebene Ortsuhren ist mithin die Differenz $(t_Q - t_P)$ der beiden Ortszeiten unabhängig von der Abgangszeit t_P und hängt nur von der Kurve γ ab, die durch das Signal beschrieben wird.

Durch ganz ähnliche Überlegungen finden wir, daß, wenn γ und γ' zwei Wege von der Länge h bzw. h' bedeuten, die zwei beliebige Punkte P und Q von $\mathfrak{A}$ verbinden, zwei Lichtsignale, die gleichzeitig P verlassen und diese beiden Wege beschreiben, in Q mit einer Zeitdifferenz $(h' - h)$ an der Ortsuhr Q gemessen, eintreffen werden.

Aus allen diesen Tatsachen schließt man, daß man die verschiedenen Lichtuhren, so aufeinander abstimmen kann, daß ein Lichtsignal, das zur Ortszeit t_P einen Punkt P verläßt, um längs einer beliebigen Kurve γ von der Länge h

einen Punkt Q zu erreichen, in diesem letzten Punkte zur dortigen Zeit $t_Q = t_P + h$ eintrifft und dies unabhängig vom Wege, von der Wahl des Punktes P und von der Abgangszeit.

16. Der Vorgang der Lichtausbreitung findet demnach in unserem Medium $\mathfrak{A}$ zahlenmäßig genau so statt wie in einem Euklidischen Raume, in dem wir den Begriff der Gleichzeitigkeit auch für Ereignisse, die an getrennt liegenden Punkten stattfinden, postulieren und die Geschwindigkeit des Lichtes gleich Eins setzen.

Wir haben dagegen weder den Begriff der Gleichzeitigkeit für getrennt liegende Punkte noch den Begriff einer Geschwindigkeit benutzt, um dieses Resultat aufzustellen.

II. Aquivalente Räume mit normaler Lichtausbreitung.

17. Wir nehmen nun an, daß im Medium $\mathfrak{A}$ die Lichtausbreitung normal sei, so daß wir jedes Ereignis α, das in $\mathfrak{A}$ stattfindet, durch rechtwinkelige Koordinaten $x\,y\,z$ und eine jeweilige Ortszeit t charakterisieren können.

Um nun ein zweites Medium $\mathfrak{B}$ zu definieren, das sich innerhalb des ersten bewegt und dessen Punkte P^* mit Hilfe von drei Parametern a, b, c identifiziert werden sollen, betrachten wir das Gleichungssystem

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \phi_1(a, b, c, t), \\ y = \phi_2(a, b, c, t), \\ z = \phi_3(a, b, c, t), \end{cases}$$

und übertragen die Begriffe, die mit der Lichtausbreitung, die in $\mathfrak{A}$ stattfindet, zusammenhängen, auf das Medium $\mathfrak{B}$ durch folgende Definitionen:

Definition I. Von einem Ereignisse α, das im Punkte x, y, z des Mediums $\mathfrak{A}$ zur Ortszeit t stattfindet, sagen wir, falls die Gleichungen (1) bestehen, daß es auch im Punkte a, b, c des Mediums $\mathfrak{B}$ stattfindet.

Man sagt dann, daß die beiden betreffenden Punkte sich zur Ortszeit t »berühren«.

Definition II. Von zwei Ereignissen α_1 und α_2, die im selben Punkte P^* des Mediums $\mathfrak{B}$ stattfinden und denen die beiden Ortszeiten t_1 und t_2 von $\mathfrak{A}$-entsprechen, nennen wir dasjenige das Frühere, dem der kleinere Wert von t entspricht.

Aus dieser zweiten Definition folgt, daß zwei Ereignisse, die für $\mathfrak{A}$ gleichzeitig sind und am selben Orte stattfinden, auch in bezug auf $\mathfrak{B}$ gleichzeitig sind, wogegen wir für das Medium $\mathfrak{B}$ die Begriffe früher und später für Ereignisse erklärt haben, die möglicherweise an verschiedenen Stellen von $\mathfrak{A}$ stattfinden und daher im ersten Medium in der Regel nicht vergleichbar sind.

18. Von unseren Funktionen ϕ_1 verlangen wir, daß sie stetig seien und stetige erste totale Differentiale besitzen. Außerdem müssen wir die Tatsache ausdrücken, daß zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{B}$ nicht gleichzeitig denselben Punkt von $\mathfrak{A}$ berühren dürfen; dafür, daß in einer gewissen Umgebung eines

Punktes P^* dieses nicht stattfinde, ist notwendig und hinreichend, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \phi_3)}{\partial(a, b, c)} \neq 0 \tag{2}$$

sei.

Definition III. Unter Geschwindigkeit eines Punktes P^* von $\mathfrak{B}$ relativ zu $\mathfrak{A}$ verstehen wir den Vektor, dessen Komponenten im Euklidischen Raume der x, y, z durch die Gleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \quad \dot{y} = \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \quad \dot{z} = \frac{\partial \phi_3}{\partial t} \tag{3}$$

gegeben werden.

19. Man verifiziert zunächst ohne jede Mühe, daß infolge der Definitionen der letzten Paragraphen die drei Axiome der Gruppe I auch für unser Medium $\mathfrak{B}$ gelten.

Um die Axiome der Gruppe II auch verifizieren zu können, müssen wir noch folgende Forderung der Unterlichtgeschwindigkeit aufstellen:

In allen Punkten des Mediums $\mathfrak{B}$ und für alle betrachteten Werte von t ist die Länge des Geschwindigkeitsvektors merklich kleiner als Eins und daher eine Ungleichheit wie

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \leqq (1 - \varepsilon) \tag{4}$$

stets erfüllt.

Wir skizzieren nun, wie man z. B. zeigt, daß das Axiom II 1 auch für das Medium $\mathfrak{B}$ verifiziert ist. Es seien P_1^* und P_2^* zwei Punkte von $\mathfrak{B}$ mit den Koordinaten (a_1, b_1, c_1) bzw. (a_2, b_2, c_2). Wir lassen im Punkte x_1, y_1, z_1 des Mediums $\mathfrak{A}$, in dem sich P_1^* zur Zeit t_1 befindet, in diesem Augenblicke ein Lichtsignal abgehen. Der geometrische Ort der Punkte von $\mathfrak{A}$, in welchem die Ortsuhren beim Empfang dieses Signals die Zeit $(t_1 + h)$ anzeigen, besteht aus den Punkten der Kugel

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = h^2 . \tag{5}$$

Wir betrachten nun den Punkt

$$x_2(h) = \phi_1(a_2, b_2, c_2, t_1 + h), \quad y_2(h) = \phi_2(a_2, b_2, c_2, t_1 + h),$$
$$z_2(h) = \phi_3\ (a_2, b_2, c_2, t_1 + h) \tag{6}$$

und bemerken, daß für kleine positive Werte von h dieser letzte Punkt außerhalb der Kugel (5) liegt, daß aber infolge von (4) Werte von h existieren, für welche sich dieser Punkt im Innern der Kugel (5) befindet. Drückt man endlich die Entfernung $\lambda(h)$ des Punktes (6) von der Oberfläche der Kugel (5) als Funktion von h aus, so zeigt eine ganz elementare Rechnung, daß mit Berücksichtigung von (4) und für alle positiven Werte von h stets

$$\frac{d\lambda(h)}{dh} < 0$$

ist. Es gibt also einen eindeutig bestimmten Wert h_1 von h, für welchen der Punkt (6) auf der Kugel (5) liegt, und die Zahl $t_2 = t_1 + h_1$ drückt die Ortszeit für das Medium $\mathfrak{A}$ aus, für welche das betreffende Lichtsignal in P_2^* empfangen wird.

Das Axiom II 3 folgt jetzt sofort aus der Tatsache, daß bei der vorhergehenden Rechnung $h_1 > 0$ ist, in Verbindung mit der Definition II des § 17.

Das Axiom II 2 ist ebenfalls eine Folge der soeben gemachten Überlegungen, wenn man noch folgende Bemerkung hinzufügt: Bezeichnet man mit $x_1(t), y_1(t), z_1(t)$ die Bahnkurve des Punktes P_1^* als Funktion der Ortszeit und mit k und h zwei beliebige positive Zahlen, so folgt aus (4), daß die Kugel

$$(x - x_1(t+k))^2 + (y - y_1(t+k))^2 + (z - z_1(t+k))^2 - h^2 = 0$$

sich stets ganz im Innern der Kugel

$$(x - x_1(t))^2 + (y - y_1(t))^2 + (z - z_1(t))^2 - (h+k)^2 = 0$$

befindet.

20. Um nun endlich auch die stetige Ausbreitung des Lichtes längs einer beliebigen Kurve $a(s), b(s), c(s)$ des Mediums $\mathfrak{B}$ zu berechnen, bezeichnen wir mit $t(s)$ die Ortszeit in $\mathfrak{A}$, bei der ein Lichtsignal, das unsere Kurve beschreibt, den Punkt $P^*(s)$ dieser Kurve erreicht. Wir haben dann im Medium $\mathfrak{A}$ wegen der Gleichungen (1)

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\partial \phi_1}{\partial a}\dfrac{da}{ds} + \dfrac{\partial \phi_1}{\partial b}\dfrac{db}{ds} + \dfrac{\partial \phi_1}{\partial c}\dfrac{dc}{ds} + \dfrac{\partial \phi_1}{\partial t}\dfrac{dt}{ds} \\ \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{\partial \phi_2}{\partial a}\dfrac{da}{ds} + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial b}\dfrac{db}{ds} + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial c}\dfrac{dc}{ds} + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial t}\dfrac{dt}{ds} \\ \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{\partial \phi_3}{\partial a}\dfrac{da}{ds} + \dfrac{\partial \phi_3}{\partial b}\dfrac{db}{ds} + \dfrac{\partial \phi_3}{\partial c}\dfrac{dc}{ds} + \dfrac{\partial \phi_3}{\partial t}\dfrac{dt}{ds} \end{cases}.$$

Nach dem § 15 haben wir aber, weil nach Voraussetzung in $\mathfrak{A}$ eine normale Lichtausbreitung stattfindet:

$$(8)\quad \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2.$$

Durch Einsetzen der Werte (7) in (8) erhält man eine quadratische Gleichung für $\frac{dt}{ds}$, die wegen (4) stets eine positive reelle Wurzel besitzt. Man kann also die Funktion $t(s)$ durch Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$(9)\quad \frac{dt}{ds} = \psi(s, t)$$

berechnen, und da $\psi > 0$ ist, ist $t(s)$ eine monoton wachsende Funktion von s.

21. Nun wollen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufstellen, denen die Funktionen (1) genügen müssen, dafür, daß die Lichtausbreitung in $\mathfrak{B}$ ebenfalls eine normale sei.

Dazu muß eine Abbildung

$$a = a(x'y'z') \quad b = b(x'y'z') \quad c = c(x'y'z') \tag{10}$$

des Parameterraumes der (a, b, c) auf einem Raume der $x'y'z'$ mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(a, b, c)}{\partial(x'y'z')} \neq 0 \tag{11}$$

existieren, die folgende Eigenschaften besitzt: die Veränderlichen x', y', z' stellen die rechtwinkeligen Koordinaten eines Euklidischen Raumes dar, in welchem, nach den Resultaten des § 15, die Ankunftszeit aller gleichzeitig abgesandten Lichtsignale, die längs Kurven geführt werden, die zwei Punkte P^* und Q^* des Mediums $\mathfrak{B}$ verbinden, nur von der Länge dieser Kurven abhängen und monoton mit dieser Größe wachsen.

Wir betrachten eine Kurve γ^* von der Länge s, die den Anfangspunkt O^* der Koordinaten des Mediums $\mathfrak{B}$ mit einem beliebigen Punkte P^* dieses Raumes verbindet. Ein Lichtsignal, das zur Zeit $t = 0$ den Punkt O^* verläßt und längs dieser Kurve nach P^* geführt wird, wird im Punkte P^* zu einer Ortszeit t eintreffen, die nach dem Vorigen und wenn man die Definition II des § 17 hinzunimmt, nur von den Koordinaten x', y', z' von P^* und von der Länge s abhängen wird. Diese Ankunftszeit t wird uns also durch eine Relation

$$t = t(x', y', z', s) \tag{12}$$

gegeben, und die Tatsache, daß die Ankunftszeit t mit der Länge s unserer Kurve γ^* monoton wächst, drückt sich durch

$$\frac{\partial t}{\partial s} > 0 \tag{13}$$

aus.

22. Wir führen jetzt auch im Medium $\mathfrak{B}$ eine Ortszeit t' ein, die an Uhren, die wir in jedem Punkte von $\mathfrak{B}$ aufstellen, gemessen wird. Nach dem § 15 können wir diese Uhren so miteinander regeln, daß die Ankunftszeit des Lichtsignals, das wir im letzten Paragraphen betrachtet haben, stets durch die Gleichung

$$t' = s \tag{14}$$

gegeben wird. Hieraus folgt, daß die Beziehung zwischen den Ortszeiten in $\mathfrak{A}$ und den Ortszeiten in $\mathfrak{B}$ für sich berührende Punkte dieser beiden Medien nach den drei letzten Relationen durch die Gleichung

$$t = t(x', y', z', t') \tag{15}$$

mit der Nebenbedingung

$$\frac{\partial t}{\partial t'} > 0 \tag{16}$$

geliefert wird.

23. Setzt man nun in die Gleichungen (1) für a, b, c ihre Werte (10) und für t seinen Wert (15) ein, so erhält man die Gleichungen

$$(17) \qquad \begin{cases} x = x(x', y', z', t') \\ y = y(x', y', z', t') \\ z = z(x', y', z', t') , \end{cases}$$

die mit (15) eine eindeutige Abbildung des vierdimensionalen Raumes der (x, y, z, t) auf den vierdimensionalen Raum der (x', y', z', t') definieren; denn mit Hilfe von (2), (11) und (16) berechnet man sofort, daß die Relation

$$(18) \qquad \frac{\partial(x, y, z, t)}{\partial(x', y', z', t')} \neq 0$$

stattfinden muß.

Das Axiom III_3 in Verbindung mit dem Begriffe eines sich innerhalb $\mathfrak{A}$ mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegenden Mediums $\mathfrak{B}$, in welchem die Lichtausbreitung normal ist, führt also auf ganz natürlichem Wege zur Einführung der Minkowskischen vierdimensionalen Welt.

24. Die Abbildung, die durch die Gleichungen (15) und (17) definiert wird, ist nicht willkürlich. In der Tat muß nach unserer Konstruktion längs jeder Kurve

$$x'(t'), y'(t'), z'(t')$$

des Raumes der x', y', z', wenn man als Parameter t' die Bogenlänge wählt, d. h. wenn die Bedingung

$$(19) \qquad dt'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

erfüllt ist, die Gleichung (15) eine Folge der Differentialgleichung (9) sein, in der man s durch t' ersetzt. Die Gleichung (9) ist aber äquivalent mit (8), und diese Gleichung kann geschrieben werden

$$(20) \qquad dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

Alles in allem muß, vermittels der Transformation, die durch (15) und (17) bestimmt wird, die Gleichung (20) eine Folge von (19) sein.

Nun sind die Differentiale dx, dy, dz, dt lineare und homogene Funktionen von dx', dy', dz', dt', die man aus (17) und (15) berechnen kann. Der Ausdruck

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$$

kann also als eine quadratische Form von dx', dy', dz', dt' angesehen werden, die nach obigem immer verschwinden muß, wenn $dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - dt'^2 \equiv 0$ ist. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn eine Funktion $\mu(x', y', z', t')$ existiert, für welche die Relation

$$(21) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = \mu(x', y', z', t')(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - dt'^2)$$

identisch erfüllt ist.

25. Setzt man nun $t = iu$ und $t' = iu'$, so besagt die Gleichung (21), daß der Raum x, y, z, u konform auf den Raum x', y', z', u' abgebildet wird.

Nach einem berühmten Satze von LIOUVILLE[1] kann aber jede konforme Abbildung eines mehr als zweidimensionalen Raumes durch eine Folge von Ähnlichkeitstransformationen und Transformationen durch reziproke Radien dargestellt werden.

Ich erinnere an den einfachen Gedankengang des Beweises, den S. LIE für diesen Satz gegeben hat[2], um zu zeigen, daß der Satz von LIOUVILLE auch für unsere Transformationen des Raumes der x, y, z, t bestehen bleibt.

Wir gehen von der Bemerkung aus, daß man die Gleichung (21) dahin deuten kann, daß die Elementenkegel $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = 0$ des vierdimensionalen Raumes der x, y, z, t untereinander vertauscht werden. Eine Hyperfläche

$$V(x, y, z, t) = 0,$$

welche die partielle Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 = 0$$

befriedigt, berührt aber in jedem ihrer Punkte einen dieser Kegel, und wird daher in eine Fläche $V'(x'y'z't') = 0$ transformiert, die derselben Differentialgleichung genügt. Die Charakteristiken dieser Differentialgleichung, d. h. die Erzeugenden der Kegel

$$(22) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - (t - t_0)^2 = 0$$

müssen also durch unsere Transformationen ebenfalls untereinander vertauscht werden.

Wir haben mithin die Eigenschaft, die wir für die Elementenkegel $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = 0$ ausgesprochen hatten, auf die endlichen Kegel (22) übertragen können; hierin aber besteht der Hauptschluß des Beweises, der nicht vorauszusehen war und aus welchem alles übrige leicht folgt.

Man kann nun diese letzte Tatsache folgendermaßen aussprechen: Bewegen sich zwei Medien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit normaler Lichtausbreitung irgendwie relativ gegeneinander, so wird jeder geradlinige Lichtstrahl des einen Mediums wieder in einen geradlinigen Lichtstrahl transformiert.

Die Lichtpolygone werden also insbesondere wieder in Lichtpolygone mit gleicher Eckenanzahl übergeführt und nicht, wie man es hätte vermuten können, in einen krummlinigen Weg.

26. Um jetzt unseren Beweis zu Ende zu führen, bemerken wir, daß die Hyperflächen

$$(23) \qquad a(x^2 + y^2 + z^2 - t^2) + 2bx + 2cy + 2dz + 2et + f = 0$$

---

[1] LIOUVILLE J. DE, Mathem. 12 (1847) p. 265, dann Note VI der Applications de l'Analyse à la Géométrie von MONGE (5e éd. Paris 1850), Ausdehnung auf n Variablen R. BEEZ, Ztschr. f. Math. u. Phys. 20 (1875) p. 252 und G. DARBOUX, Ann. éc. Norm. (2) 7 (1878) p. 282 und vor allem S. LIE, Gött. Nachr. 1871 p. 191 u. 535.

[2] LIE-SCHEFFERS, Geometrie der Berührungstransformationen p. 419.

ihre dreidimensionalen Tangentialräume mit dem Berührungspunkt x_0, y_0, z_0, t_0 im selben Kegel 2. Ordnung begegnen, wie die Hyperfläche (22). Dieser Kegel ist entweder für alle Tangentialräume von (23) reell oder für alle diese Räume imaginär, je nachdem $(b^2+c^2+d^2-e^2-af)$ positiv oder negativ ist. Ferner kann man durch lineare Konstruktionen der projektiven Geometrie beweisen, daß gerade eine einzige Hyperfläche mit diesen Eigenschaften existiert, die einen vorgeschriebenen, linearen dreidimensionalen Raum in einem gegebenen Punkte berührt und einen zweiten beliebig vorgeschriebenen Punkt enthält.

Jede solche Fläche muß also einer Gleichung der Gestalt (23) genügen, und hieraus folgt, daß die Hyperflächen (23) durch unsere Transformationen untereinander vertauscht werden.

27. Die Gesamtheit der Transformationen, die der Gleichung (21) genügen, bilden eine Gruppe, die eine Untergruppe von linearen Transformationen enthält. Diese Untergruppe besteht, wie man sofort sieht, aus den Ähnlichkeitstransformationen der Minkowskischen Welt in sich, die bekanntlich außer den Lorentz-Transformationen nur noch triviale Transformationen enthält.

Außerdem ist die Transformation

$$(24)\quad \begin{cases} x = \dfrac{x'}{x'^2+y'^2+z'^2-t'^2}, & y = \dfrac{y'}{x'^2+y'^2+z'^2-t'^2}, \\ z = \dfrac{z'}{x'^2+y'^2+z'^2-t'^2}, & t = \dfrac{t'}{x'^2+y'^2+z'^2-t'^2}, \end{cases}$$

wie die Rechnung zeigt, eine nichtlineare Transformation unserer Gruppe, die wir mit R bezeichnen wollen. Diese letzte Transformation hat die Eigenschaft, alle linearen dreidimensionalen Räume in Hyperflächen, die der Gleichung (23) mit verschwindendem konstanten Gliede f genügen, zu transformieren, und umgekehrt. Ist nun W eine willkürliche Transformation unserer Gruppe, so kann man eine Translation T der Minkowskischen Welt in sich bestimmen, so daß der Anfangspunkt der Koordinaten ein Fixpunkt der Transformation WT^{-1} ist. Durch die Transformation WT^{-1} werden also, nach dem vorigen Paragraphen, die Hyperflächen (23) mit verschwindendem konstanten Glied untereinander vertauscht; mithin ist die Transformation $RWT^{-1}R$ linear, d. h. gleich einer Ähnlichkeitstransformation A der Minkowskischen Welt. Da nun R eine involutorische Transformation ist, d. h. $R^{-1}=R$ ist, kann man endlich schreiben

$$(25)\qquad W = RART,$$

womit der Liouvillesche Satz bewiesen ist.

28. Es ist jetzt sehr leicht, indem man von der Transformation (25) ausgeht, die Gleichungen (15) und (17) in jedem speziellen Falle explizite auszuschreiben und von diesen aus rückwärts zu unseren Bewegungsgleichungen zu gelangen. Das Problem, das wir im § 21 formuliert haben, ist demnach vollständig gelöst.

III. Das spezielle Relativitätsprinzip.

29. Das spezielle EINSTEINsche Relativitätsprinzip besagt, daß man zwei Lichträume $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ relativ gegeneinander so bewegen kann, daß nicht nur die Lichtausbreitung normal bleibt, sondern auch sämtliche Naturgesetze kovariant transformiert werden.

Die Transformationen, die dem Relativitätsprinzip genügen, müssen sich unter denjenigen befinden, die wir im vorigen Abschnitt aufgestellt haben, es ist aber leicht zu sehen, daß diese u. a. auch Transformationen erhalten, bei denen die Gesetze der Mechanik nicht kovariant transformiert werden.

In der Tat ist für jeden positiven Wert von λ die Transformation

$$(26)\quad \begin{cases} x+\lambda = \dfrac{\lambda^2(\lambda - x')}{S'}, \quad y = \dfrac{\lambda^2 y'}{S'}, \quad z = \dfrac{\lambda^2 z'}{S'}, \quad t = \dfrac{\lambda^2 t'}{S'} \\ S'(\lambda) = (\lambda - x')^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 \end{cases}$$

in den Transformationen (25) enthalten. Wir wählen nun λ so groß, daß wir das Quadrat von $1:\lambda$ vernachlässigen können. Aus (26) erhalten wir zunächst

$$\frac{\lambda^2}{S'} = 1 + \frac{2x'}{\lambda} + \frac{3x'^2 - y'^2 - z'^2 + t'^2}{\lambda^2} + \cdots$$

und hierauf durch Einsetzen in die ersten vier Gleichungen dieser Transformation, mit der gewünschten Approximation

$$(27)\quad \begin{cases} x = \left(1 + \dfrac{2x'}{\lambda}\right)x' - \dfrac{S'(0)}{\lambda}, \quad y = \left(1 + \dfrac{2x'}{\lambda}\right)y', \quad z = \left(1 + \dfrac{2x'}{\lambda}\right)z' \\ t = \left(1 + \dfrac{2x'}{\lambda}\right)t'. \end{cases}$$

Setzen wir nun an Stelle der Gleichungen (10)

$$(28)\qquad a = x' + \frac{x'^2 - y'^2 - z'^2}{\lambda} \qquad b = y' + \frac{2x'y'}{\lambda} \qquad c = z' + \frac{2x'z'}{\lambda}$$

und berücksichtigen, daß aus der vierten Gleichung (27) folgt, falls man $1:\lambda^2$ vernachlässigt

$$t' = t\left(1 - \frac{2a}{\lambda}\right),$$

so drücken sich in unserem Falle die Bewegungsgleichungen (1) folgendermaßen aus:

$$(29)\qquad x = a + \frac{t^2}{\lambda}, \quad y = b, \quad z = c.$$

Die beiden Lichträume werden also mit konstanter Beschleunigung gegeneinander bewegt. Es ist aber einer der ältesten Erfahrungssätze der Mechanik, daß zwei Koordinatensysteme, die sich in dieser Weise gegeneinander bewegen, mechanisch nicht äquivalent sind.

Die Transformationsformeln (27) transformieren also wohl zwei Räume von normaler Lichtausbreitung ineinander, genügen aber nicht dem Relativitätsprinzip.

30. Wir wollen nun unter der Voraussetzung, daß die Transformationen des speziellen Relativitätsprinzips eine kontinuierliche Gruppe bilden, ganz allgemein beweisen, daß diese Transformationen linear sein müssen.

Dazu befreien wir uns zunächst von einigen trivialen Transformationen, die in der Gruppe von Transformationen des vorigen Abschnittes vorkommen. Man kann in der Tat durch geeignete Wahl der Orientierung des Koordinatenkreuzes der (x', y', z', t') stets erreichen, daß außer der Relation

$$\frac{\partial t}{\partial t'} > 0, \tag{30}$$

die wir im § 22 verlangt haben, noch die Ungleichheit

$$\frac{\partial (x, y, z, t)}{\partial (x', y', z', t')} > 0 \tag{31}$$

besteht.

Nun kann man beweisen — indem man z. B. benutzt, daß infolge des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen der Koeffizient μ in der Gleichung (21) stets positiv ist — daß die Gesamtheit der Transformationen unserer Gruppe, die den Bedingungen (30) und (31) genügen, wiederum eine Gruppe, und zwar eine kontinuierliche Gruppe bilden.

31. Es gibt fünfzehn infinitesimale Transformationen dieser kontinuierlichen Gruppe. Um sie bequemer aufzuschreiben, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{cases} x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z \quad x_4 = t \\ R = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 . \end{cases} \tag{32}$$

Die fünfzehn infinitesimalen Transformationen lassen sich nun folgendermaßen anordnen: unter ihnen gibt es

vier Translationen

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

drei räumliche Rotationen

$$Y_{ij} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

drei Lorentz-Transformationen

$$L_i f = x_4 \frac{\partial f}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial f}{\partial x_4}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

die Ähnlichkeitstransformation

$$Af = \sum_{i=1}^{4} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

vier nichtlineare Transformationen

$$B_i f = 2 x_i \sum_{j=1}^{4} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} - R \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$Cf = 2 x_4 \sum_{j=1}^{4} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + R \frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

Unter diesen fünfzehn Transformationen sind nun die drei Transformationen $B_i f$, wegen der Überlegungen des § 26 keine infinitesimalen Transformationen der Gruppe des Relativitätsprinzips, und um zu beweisen, daß diese Gruppe aus lauter linearen Transformationen besteht, bleibt nur noch zu zeigen, daß Cf ebenfalls entfernt werden muß.

32. Hierzu bemerken wir, daß es keine echte Untergruppe unserer fünfzehngliedrigen Gruppe gibt, die zugleich die infinitesimalen Transformationen $X_i f$ und Cf enthält. Durch Bildung von Klammerausdrücken erhalten wir nämlich der Reihe nach die Relationen:

$$(X_i C) f = 2 L_i f, \qquad (i = 1, 2, 3)$$
$$(X_4 C) f = Af,$$
$$(L_i C) f = B_i f,$$
$$(X_j B_i) f = 2 Y_{ij} f,$$

die unsere Behauptung beweisen.

Da nun die Transformationen $X_i f$ Anlaß zu einfachen Verschiebungen des Koordinatenkreuzes geben, für welche das Relativitätsprinzip natürlich gilt, die Transformationen $B_i f$ aber, wie wir soeben gesehen haben, entfernt werden müssen, so gilt dasselbe auch von Cf[1].

Wir brauchen aber jetzt diese Ausführungen nicht weiter zu verfolgen: unter der Voraussetzung, daß die Transformationen linear sind, ist nämlich seit der POINCARÉschen Arbeit von 1906 die Gruppe des speziellen Relativitätsprinzips so oft behandelt worden, daß kaum etwas Neues zu schon Gesagtem hinzuzufügen sein dürfte.

Kephissia bei Athen, den 5. Dezember 1923.

[1] Hiermit ist eine Frage gelöst, auf die Hr. W. PAULI aufmerksam gemacht hat. (Enzyklopädie der mathem. Wiss. V 19. Relativitätstheorie p. 554.)

Ausgegeben am 18. März.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

Hr. Guthnick sprach über lichtelektrische Untersuchungen an einigen spektroskopischen Doppelsternen und über neue lichtelektrische Einrichtungen der Babelsberger Sternwarte. (Ersch. später.)

Ergebnis der bis 1923 fortgesetzten lichtelektrischen Messungen an β Cephei, γ Bootis und α Canum venaticorum. Ein nach seinen Angaben von Günther u. Tegetmeyer gebautes neues lichtelektrisches Sternphotometer, das für den Cassegrain-Fokus des 125 cm-Reflektors bestimmt ist und gleichzeitig mit dem Sternspektrographen benutzt werden kann, enthält vier ohne weiteres miteinander vertauschbare Zellen für Farbenbestimmungen und andere Zwecke.

Die Akademie hat in ihrer Sitzung vom 21. Februar den ordentlichen Professor an der Universität Göttingen, Hrn. Dr. Edmund Landau, zum korrespondierenden Mitgliede ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Ausgegeben am 18. März.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

VII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 28. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Keibel sprach »zum Kopfproblem«.

Er gibt eine historische Darstellung der Entwicklung des Problems und zeigt, daß in seinem Gebiet noch eine Reihe wichtiger Fragen zu lösen ist. Besonders interessant sind die Beziehungen zwischen Kopfproblem und Gastrulationsproblem, die zu einem Vergleich des Wirbeltierembryos mit der Trochophoralarve führen.

2. Hr. Correns legte die dritte Fortsetzung der Versuche zur experimentellen Verschiebung des Geschlechtsverhältnisses vor: Über den Einfluß des Alters der Keimzellen, I. (Ersch. später.)

Es wird durch sehr umfangreiche Versuche mit *Melandrium* gezeigt: Das Alter der Eizellen hat gar keinen Einfluß auf das Zahlenverhältnis der Geschlechter. Durch das Alternlassen der Pollenkörner nimmt die Ernte stetig ab und wird die Zahl der Männchen immer größer, bis schließlich die Nachkommenschaft fast nur noch aus Männchen besteht. Auch die Zahl der Zwitter nimmt dabei zu. Die gerontogonen Männchen haben häufiger schlechten Pollen als die neogonen. Sie bringen zum Teil fast nur Weibchen hervor, im Gegensatz zu allen neogonen Männchen. Ebenso verhalten sich fast alle gerontogonen Zwitter.

3. Vorgelegt wurde das 3. Heft des 46. Bandes des »Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik«, Jahrgang 1916—1918 (Berlin und Leipzig 1924).

Zum Kopfproblem.

Von Franz Keibel.

Gewöhnlich wird als das Geburtsjahr des Schädelproblems, aus dem das Kopfproblem erwachsen ist, das Jahr 1790 betrachtet. Goethe schreibt am 4. Mai aus Venedig an Karoline Herder: »Durch einen sonderbar glücklichen Zufall, daß Goetze« [der begleitende Diener und Schreiber] »zum Scherz auf dem Judenfriedenhof ein Stück Tierschädel aufhebt und ein Späßchen macht, als wenn er mir einen Judenkopf präsentierte, bin ich einen großen Schritt in der Erklärung der Tierbildung vorwärts gekommen.« Die Idee der Wirbeltheorie des Schädels war Goethe aufgegangen. Erst viel später, 1823, veröffentlichte er sie. Im gleichen Jahre in der Skizze: »Bedeutende Fördernis durch ein einziges geistreiches Wort« schreibt Goethe: »Wend' ich mich nun zu dem gegenständlichen Denken, das man mir zugesteht, so find' ich, daß ich eben dasselbe Verfahren auch bei naturhistorischen Gegenständen zu beobachten genötigt war. Welche Reihe von Anschauung und Nachdenken verfolgt' ich nicht, bis die Idee der Pflanzenmetamorphose in mir aufging, wie solches meine italienische Reise den Freunden vertraute.«

»Ebenso war es mit dem Begriff, daß der Schädel aus Wirbelknochen bestehe. Die drei hintersten erkannt' ich bald, aber erst im Jahre 1790, als ich aus dem Sande des dünenhaften Judenkirchhofs von Venedig einen zerschlagenen Schöpsenkopf aufhob, gewahrt' ich augenblicklich, daß die Gesichtsknochen gleichfalls aus Wirbeln abzuleiten seien, indem ich den Übergang vom ersten Flügelbeine zum Siebbeine und den Muscheln ganz deutlich vor Augen sah; da hatt' ich denn das Ganze im allgemeinsten beisammen.« — Lorenz Oken hat zweifellos recht, wenn er später Goethe gegenüber seine Priorität geltend macht. Sein Programm über die Bedeutung der Schädelknochen erschien 1807. Es liest sich freilich wie das Hexeneinmaleins. Oken versteigt sich zu den abenteuerlichsten Behauptungen. So lesen wir, daß die Oberkiefer den Armen, die Unterkiefer den Beinen, die Finger und Zehen den Zähnen des Oberkiefers und des Unterkiefers zu vergleichen sind. Das Zungenbein soll das Becken des Schädels sein und »der ganze Mensch nur ein Wirbelbein«. — Übrigens hätten gegen Oken von anderer Seite Prioritätsansprüche erhoben werden können. Wir lesen bei Bruch (Abh. der Senkenbergischen naturf. Ges. Bd. 4, Frankf. a. M. 1862—63): »Zum Teil schon früher« als 1790 »hatten Burdin und Duméril den Schädel für den obersten Wirbel erklärt; P. Frank und Kielmeyer umgekehrt in jedem Wirbel eine Wiederholung des Schädels gesehen.« In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde dann die

Wirbeltheorie des Schädels vielfach eingehend behandelt. Sehr vorsichtig hat sich CUVIER ausgesprochen, und vereinzelt traten auch schon Gegner auf, so AGASSIZ, BERGMANN und CARL VOGT; aber ein Forscher von so überragender Bedeutung wie JOHANNES MÜLLER tritt demgegenüber entschieden für die Schädelwirbeltheorie ein, und in seinem Bericht über das Werk von AGASSIZ nimmt er »keinen Anstand, den daselbst entwickelten Zweifeln gegen die Wirbeltheorie des Schädels gegenüber, die bisherige Ansicht, aber frei von romantischen Übertreibungen, mit voller Überzeugung zu verteidigen«.

Aber die Herrschaft der Schädelwirbeltheorie neigte ihrem Ende zu. THOMAS HUXLEY wies an Fischschädeln nach, daß die knorpelige Anlage des Schädels dieser Tiere — von der Occipitalregion ist dabei abzusehen — ursprünglich eine einheitliche ist, und daß die Zerlegung des Knorpelschädels in die Elemente, welche man mit Wirbeln verglichen hat, ganz sekundär erfolgt. Im Jahre 1859, in demselben Jahre, in dem DARWINS Werk über die Entstehung der Arten durch natürliche Zuchtwahl erschien, wurde HUXLEYS berühmte Croonian Lecture vom Nov. 1858 veröffentlicht, die der Schädelwirbeltheorie in ihrer alten Form den Todesstoß gab. Doch aus der Asche entstand neues Leben.

CARL GEGENBAUR führte den Nachweis, daß dem Stadium der Wirbeltiere, in dem ihnen ein einheitliches, nicht in Wirbel zu zerlegendes, knorpeliges Skelett zukommt, ein anderes vorausgeht, in dem die ganze Anlage des Kopfes und mit ihm die des Schädels segmentiert ist. GEGENBAUR gründete seine Schlüsse auf das Studium der Weichteile, besonders auf eine sorgfältige Untersuchung der Nerven.

Ganz in seinem Sinne und auf vergleichend anatomischer Basis wurden GEGENBAURS Untersuchungen durch MAX FÜRBRINGER weitergeführt (1897). Inzwischen war aber eine neue Methode bei der Behandlung des Problems in den Vordergrund getreten, die entwicklungsgeschichtliche, die aus den Tatsachen der Ontogenie die der Phylogenie abzuleiten versuchte. GEGENBAUR verhielt sich ihr gegenüber sehr ablehnend, fast feindselig; aber die entwicklungsgeschichtliche Methode machte ihren Weg und erwies sich als überaus fruchtbar.

Von grundlegender Bedeutung waren Untersuchungen von BALFOUR (1876 und 1878) und dann die Untersuchungen von J. W. VAN WIJHE »Über die Mesodermsegmente und die Entwicklung der Nerven des Selachierkopfes«, die 1882 erschienen. VAN WIJHES Werk ist bis heute die Grundlage der neueren Untersuchungen geblieben. Außerordentlich groß ist die Zahl der Forscher, welche auf dieser Grundlage weiter gebaut haben, ein großes Material wurde zusammengetragen, und viele zum Teil überkühne Hypothesen wurden aufgestellt. Sehr interessant ist in neuester Zeit der Versuch von AUGUSTE BRACHET, eine Synthese zwischen Kopfproblem und Gastrulationsproblem herzustellen, um so auf beiden Gebieten zu neuen Resultaten zu kommen.

Nach diesen historischen Betrachtungen wende ich mich nun zur Besprechung des Problems selbst. Die Fülle des Stoffes wollen wir so zu meistern suchen, daß wir das Gesamtproblem zunächst in einzelne kleinere Probleme

zerlegen, von denen wir nur diejenigen, welche uns näher interessieren, genauer betrachten wollen.

Wir werfen zuerst die Frage nach der Abgrenzung zwischen Kopf und Rumpf auf. Meist wird die Atlantooccipitalverbindung, das soll heißen, die Verbindung des Schädels mit dem ersten als Wirbel zu bezeichnenden Segment der Wirbelsäule des ausgewachsenen Tieres, als die caudale Abgrenzung des Schädels gegen die Wirbelsäule und damit zugleich als die Grenze zwischen Kopf und Rumpf betrachtet. Hierzu ist zu bemerken, daß bei manchen Tieren ein Atlantooccipitalgelenk nicht gebildet wird und daß auch die Bedeutung des Proatlas bei Reptilien und Vögeln unklar ist (vgl. Hayek, Über den Proatlas usw. S. B. Wiener Akademie, math.-naturw. Kl. III 130. u. 131. Bd., 1922). — Ganz neuerdings gibt van Wijhe eine andere Abgrenzung, die freilich sofort von H. E. Ziegler bestritten wurde. van Wijhe fand bei Acanthiasembryonen ein Skelettelement, das er als Occipitalbogen bezeichnet. Es soll ein Bogen sein, der mit dem darauffolgenden Interkalare der Wirbelsäule zu einem Ganzen verschmolzen ist. Ein entsprechendes Skelettstück soll bei sämtlichen Gnathostomen erscheinen und neural das morphologische Hinterende des Schädels bezeichnen; vergleichbare Verhältnisse sollen sich auch bei Petromyzonten finden. Da nun aber diesem Occipitalbogen bei Fischen vielfach Wirbelelemente angeschlossen sind, die zum Teil oder sämtlich mit dem Schädel verschmelzen, so werden von vielen Forschern auch diese Elemente zum Schädel gerechnet, und man kommt leicht zu irrtümlichen Auffassungen, wenn man nicht genau beachtet, was der betreffende Autor meint. Ich werde später noch einmal darauf zurückzukommen haben.

Die weitere Frage, welche in dem eben Gesagten ja schon berührt wurde, ist die, ob die Grenze zwischen Kopf und Rumpf bei verschiedenen Tieren immer an morphologisch entsprechender Stelle liegt. Diese Frage wird, abgesehen von van Wijhe, allgemein verneint. Ich mache dafür auf die Tabellen aufmerksam, welche Gaupp in Hertwigs Handbuch der Entwicklungslehre gibt. Ob es berechtigt ist, spinooccipitale und spinale Nerven und dementsprechend verschiedene Schädelteile zu unterscheiden, soll alsbald erörtert werden.

Zuvörderst wenden wir uns zu der allgemeinen Frage, ob es möglich und geboten ist, im Gebiete des Kopfes und des Schädels überhaupt einzelne Abschnitte gegeneinander abzugrenzen. Fürbringer teilt den Schädel — und es wären auch am Kopfe dementsprechende Gebiete zu unterscheiden — in ein Paläocranium und in ein Neocranium, und das Neocranium wieder in ein protometameres und ein auximetameres Neocranium. Das Paläocranium soll der ursprüngliche, älteste Teil des Schädels sein, an dem sich keine Metamere unterscheiden lassen. An ihn haben sich ursprünglich der Wirbelsäule, also dem Rumpf angehörige Elemente angegliedert und haben zunächst die ihnen entsprechenden Nerven mitgenommen. Später sind dieselben in craniocaudaler Richtung mehr oder weniger weit zurückgebildet worden; der letzte Nerv des Paläocraniums ist der N. vagus. Die Angliederung der neocranialen Elemente hat aber nicht eines nach dem anderen gleichmäßig stattgefunden, sondern in Schüben; und zwar unterscheidet Fürbringer

zwei solcher Schübe. Durch den ersten wird der protometamere Teil des Neocraniums gebildet, durch den zweiten der auximetamere. Ob diese Lehre im einzelnen richtig ist, mag dahingestellt bleiben.

Älter als die von Fürbringer aufgestellte Aufteilung des Schädel- und Kopfgebietes ist eine andere, die man schon zu der Zeit, als der Schädel noch im Vordergrund stand, angewandt hat; sie ist vielleicht zu sehr zurückgedrängt worden.

Man unterschied den Teil des Schädels, der von der Chorda durchzogen wird, als den chordalen von dem davor gelegenen prächordalen Schädel. Natürlich ist diese Einteilung auch auf den ganzen Kopf anwendbar. Es gibt einen chordalen und einen prächordalen Teil des Kopfes. Ebenso ist sie auf die Organe des Kopfes anzuwenden, wir haben einen chordalen und einen prächordalen Teil des zentralen Nervensystems. Beeinträchtigt wird der Wert dieses Einteilungsprinzipes dadurch, daß das vordere Ende der Chorda und das vordere Ende der Medullaranlage in bezug aufeinander keine festen Punkte sind; daß auch die Ursegmente und die Chorda sich gegeneinander verschieben, und daß auch bei den ausgewachsenen Tieren die vorderen Enden der Chorda in ihren Lagebeziehungen sich nicht entsprechen. Beim Amphioxus, dem für die Ableitung der Wirbeltiere freilich wohl vielfach eine übergroße Bedeutung zugeschrieben wird, reicht die Chorda über das vordere Ende des zentralen Nervensystems hinaus; bei den Wirbeltieren liegt das vordere Chordaende morphologisch angesehen in wechselnder Entfernung von dem vorderen Ende des Körpers.

Die Lage des vorderen Chordaendes und seine Beziehungen zu anderen Organen sind in neuester Zeit vielfach bearbeitet worden. Ich verweise dafür auf Kingsbury (Journ. of comp. neurology vol. 34, 1922).

Ältere Untersuchungen über die Stelle des Gehirns, an der der ursprünglich vorderste Teil der Medullaranlage lag, reichen bis auf Carl Ernst v. Baer zurück. Er sucht die Stelle im Infundibulum. Ich selbst habe noch das Chiasma n. opticorum zur primitiven Hirnbasis gerechnet (Arch. f. Anat. u. Physiologie 1889). Kupffer verlegt die Stelle weiter dorsal, dorthin, wo sich nach ihm der vordere Neuroporus schließt, und ihm folgt sein Schüler Neumaier. Hauptsächlich wurde die Frage zwischen His und Kupffer ausgefochten. Es ergeben sich bei diesen Untersuchungen wichtige Beziehungen zur Gastrulalehre.

Es ist für unsere Frage von prinzipieller Bedeutung, ob wir annehmen, daß der Urmund sich bei den Wirbeltieren einfach durch Zusammenschnürung schließt, oder ob eine Nahtbildung durch Konkreszenz seiner seitlichen Ränder vorliegt. Die Konkreszenztheorie ist lange Zeit durch die besondere Art, in der His sie vertrat, in Mißkredit gekommen; ihr eifrigster Bekämpfer bis in die neueste Zeit war Carl Rabl. Doch ist der Kern der Konkreszenztheorie zweifellos richtig.

Der Verschluß des Blastoporus findet nicht konzentrisch statt, sondern die Lippen des Urmundes werden von cranial nach caudal fortschreitend von lateral her zur Mitte gebracht. Daß dem so ist, hat seinerzeit Fr. Kopsch (1896 und 1898) durch Experimente bewiesen, indem er Teile der lateralen Urmundlippen zerstörte und entsprechende Defekte am Embryo erhielt. Einen

weiteren Beweis geben Mißbildungen, die Oskar Hertwig an überreifen befruchteten Froscheiern beobachtete und die er Spinae bifidae nannte; besser bezeichnet man sie wohl als Asyntaxiae medullares. Es kommt bei diesen Mißbildungen nicht zu einer Bewältigung, d. h. Nach-innen-Verlagerung des Dotters, sondern der Dotter bleibt zwischen den lateralen Blastoporuslippen liegen, und dann bilden sich in diesen je ein halbes Medullarrohr, eine halbe Chorda und eine Reihe von Ursegmenten. Entsprechende Beobachtungen konnte Legros bei Amphioxus machen (Mitteil. zoolog. Station Neapel XVIII, 1907).

Auch das Verhalten des Primitivstreifens bei Vögeln und Säugern läßt sich für die Konkreszenztheorie verwerten. Der Primitivstreifen ist als umgestaltetes Urmundgebiet aufzufassen. Er reicht mit seinem vorderen, apicalen Ende bis ganz nahe an das vordere Ende des Keimschildes und bildet sich von vorn nach hinten, in apicocaudaler Richtung, zurück. — Entsteht am vorderen Ende des Primitivstreifens ein Canalis neurentericus, so bildet dieser keine feste Marke, sondern wandert mit dem vorderen Ende des Primitivstreifens in apicocaudaler Richtung. Am caudalen Ende des Primitivstreifens entsteht der After. Von dem vorderen Ende des Primitivstreifens bis zur Rumpf-Schwanzknospe besteht also am Boden der Medullaranlage eine virtuelle Nahtlinie. Diese Nahtlinie durchsetzt aber nicht das ganze Zentralnervensystem. An seinem apicalen Ende sind in einem verhältnismäßig kleinen Gebiet, das dem queren Gehirnwulst der Gehirnanlage entspricht, die beiden Hälften der Embryoanlage wie die rechte und linke Lippe des frühen Blastoporus durch das Gebiet der dorsalen Blastoporuslippe in ursprünglicher Verbindung miteinander. Es ist die Strecke, welche der Prächordalplatte (Oppel, Adelmann) entspricht. Dieser apicale Teil des Kopfes liegt also vor der Chorda und unterscheidet sich dadurch nicht nur von dem übrigen Kopf, sondern auch von Rumpf und Schwanz. Wenn wir annehmen wollten, daß die Anlage des Gehirns und Rückenmarks, abgesehen von dem Gebiet der Rumpf-Schwanzknospe, welche durch caudalwärts gerichtete Aussprossung entsteht, von ihrem vordersten Ende an eine Nahtbildung zeigte, so würde, wenn die Dorsal- und die Frontalnaht ineinander übergingen, der Körper des Embryos in zwei Hälften auseinanderfallen. Eine Annahme, welche mir unmöglich zu sein scheint. Wenn wir den vordersten Teil des Wirbeltierkörpers mit Hatschek, dem sich Brachet anschließt, den Akromeriten nennen, so haben wir in seinem caudalen Ende eine Grenze, die nicht nur den Kopf, sondern den ganzen Wirbeltierkörper betrifft, einen unpaaren Abschnitt, an den sich der ganze übrige Teil des Körpers angliedert. Eine Grenze, die prinzipiell noch bedeutungsvoller ist als die Grenze zwischen Kopf und Rumpf[1]. Durch die Feststellung dieser Tatsache ist dann ein Vergleich — wohlverstanden ein Vergleich, nicht eine Ableitung — mit wirbellosen Tieren möglich, wie ihn Korsch (Verh. Anat. Ges. 1898) und Jablonowski (Anat. Anz. Bd. 14, 1898) gemacht haben, indem sie den Wirbeltierkörper mit der Trochophora verglichen, einer im

[1] Ich möchte mich damit nicht im einzelnen der Definition anschließen, die Hatschek gibt (Studien zur Segmenttheorie, 3, 1910). Er setzt die Grenze des Akromeriten sehr weit caudal. Nach ihm gehört das erste und zweite Hirnbläschen zum Akromerit, auch die vordere Wand der ersten Kiementasche wäre noch dem Akromerit zuzuteilen.

Kreise der Anneliden und Mollusken weitverbreiteten Larvenform. »Wie wir«, so schrieb ich in meinem Handbuch der Entwicklungsgeschichte des Menschen (Bd. I, S. 56, 1910), »am Leibe der Larve dann einen vordersten, ungegliederten Teil, der aus dem Prozeß der Gastrulation hervorgegangen ist, von einem hinteren gegliederten, der dem an die Gastrulation sich anschließenden Knospungsprozeß sein Dasein verdankt, unterscheiden können, so ist das auch beim Wirbeltierkeim möglich.« In diesem Sinne unterscheidet denn auch Hubrecht bei der Entwicklung der Wirbeltiere zwischen Cephalogenesis und Notogenesis; durch die Cephalogenesis soll auf dem Wege der Gastrulation der vordere, ungegliederte Teil des Wirbeltierkörpers gebildet werden, durch die Notogenesis, einen Knospungsvorgang, der daran anschließende gegliederte. Diese Nomenklatur kann allerdings zu Mißverständnissen Veranlassung geben. Das Wort Kephalos ist hier nicht in dem herkömmlichen Sinne von Kopf gebraucht, er betrifft nur, und das hebt Hubrecht selbst hervor, den allervordersten Teil des Kopfes, »während andererseits diesem gegenüber die weiteren Hirnabschnitte mit ihren Kopfnerven sowie die Schädelbasis mit dem Chordarest sowie die Viszeralbogen sowie auch der ganze Rumpf zu stellen wären«.

Der Begriff Kopf ist hier also in einem ganz neuen Sinne gebraucht. Ich schlage daher vor, für den Kopf im Hubrechtschen Sinne den von Hatschek eingeführten Ausdruck »Akromerit« anzuwenden und will die Bildung dieses Teiles des Wirbeltierkörpers mit Brachet »Akrogenese« nennen. Mit Brachet aber bin ich nicht einverstanden, wenn er nun in dem caudal vom Akromeriten gelegenen Teil des Wirbeltierkörpers eine zweite, der ersten gleichgewertete Grenze setzt, die zwischen Kopf und Rumpf. Diese Grenze entspricht der Stelle, an die Fürbringer die caudale Grenze des Paläocranium verlegt, und die erste Wurzel des Vagus würde noch dem Paläocranium zugehören. Fürbringers protometamerer und auximetamerer Teil des Kopfes — die entsprechenden Teile des Schädels werden, wie schon berichtet, als Neocranium zusammengefaßt — entspricht einem dritten Teil des Wirbeltierkörpers, den Brachet dann als aus einem Knospungsprozeß hervorgegangen betrachtet, und der neben Rumpf und Schwanz auch den caudal von der ersten Vaguswurzel liegenden Teil des Kopfes umfaßt. Brachet begründet seine Einteilung auf die Entwicklungsgeschichte. Der eigentliche Gastrulationsprozeß bildet nach ihm das Archenteron, den Urdarm im eigentlichen Sinne. Er und seine Abkömmlinge sowie das ihn überziehende äußere Keimblatt bildet den Akromeriten. Der zweite Abschnitt des Tierkörpers entspricht dem Teil, der durch nahtförmigen Verschluß der Urmundlippen zustande kommt; den diesem Körperabschnitt entsprechenden Darmteil nennt Brachet das Deutenteron, seine Grenze liegt hinter der ersten Vaguswurzel, entspricht also, wie hervorgehoben, der caudalen Grenze des Paläocranium. Von diesem Teil soll dann durch Sprossung der caudale Teil des Kopfes mit seinem protometameren und auximetameren Cranium sowie Rumpf und Schwanz hervorgehen. Brachet sucht seine Lehre auf die Vorgänge der Gastrulation zu begründen, beachtet aber nicht, daß der ganze Teil des Wirbeltierkörpers caudal vom Akromeriten als ein durch Sprossung des Keimes hervorgegangener Körperabschnitt zu betrachten ist. Hingewiesen sei dann noch auf die Ansicht von

Marcus (S. B. phys.-med. Ges. München 1908 und morph. JB. Bd. 40, 1910), nach der der Kopf der primäre, der Rumpf der sekundäre Abschnitt des Wirbeltierkörpers ist. Und es möge schließlich auch noch die auf einen paradoxen Ausdruck gebrachte Meinung von de Selys-Longchamp angeführt werden, der sagt, daß die Ahnenform der Wirbeltiere ein Rumpf ohne Kopf gewesen sei, oder wenigstens ein Rumpf mit sehr wenig Kopf. (Archives de Biol. T. 25, 1910).

Wir kommen zur Besprechung der caudalen Grenze des Kopfes und Schädels und der spinooccipitalen Nerven Fürbringers. Zunächst etwas über die Gründe, welche die Bildung und die caudale Abgrenzung des Kopfes und besonders des Schädels veranlaßten. Es werden angeführt, daß bei höherer Ausbildung das Gehirn einen besonders guten Schutz brauche, und mechanische Momente. Für die Vorwärtsbewegung der Tiere war es vorteilhaft, wenn der vordere Teil des Tieres, Kopf und Schädel, eine fest zusammenhängende einheitliche Masse bildete. Ich glaube, daß solche mechanischen Elemente im Vordergrund stehen. Das Gehirn ist bei den niedersten einen Schädel besitzenden Formen der Wirbeltiere so wenig ausgebildet, daß sein Schutz auch durch eine gegliederte Schutzhülle würde geleistet werden können. Jedenfalls sind die Angliederungen, welche wir im Stamme der Wirbeltiere beobachten können, so gut wie allein auf das mechanische Element zurückzuführen. — Eine andere auch mechanische Begründung gibt van Wijhe. Er sagt, daß die frühe Beziehung der Ohrkapsel zum Schädel die Auffassung verstärkt, »nach welcher die Befestigung der Gleichgewichtsorgane den ersten Anstoß zur Schädelbildung gegeben hat«. Es ist keinerlei Zweifel unterworfen, daß während der Ontogenie des Schädels der Wirbeltiere Wirbelanlagen umgebildet und in den caudalen Bezirk des Schädels aufgenommen werden. Das kann noch beim Schädel des Menschen sehr sinnfällig werden (vgl. z. B. J. Kollmann, Verh. Anat. Ges. 1905 und Anat. Anz. 1907 und Hayek l. c.). Die ontogenetischen Vorgänge sind auch sicher phylogenetisch zu bewerten. Ganz besonderes Interesse bieten nun am caudalen Ende des Schädels die Nerven. Wir verdanken hier Fürbringer und Froriep eingehende Untersuchungen. Versuchen wir zunächst Fürbringers Lehre von den spinooccipitalen Nerven zu skizzieren. Für Genaueres verweise ich auf Fürbringers großes Werk und Gaupps Kapitel über die Entwicklung des Kopfskeletts in O. Hertwigs Handbuch der Entwicklungslehre (Bd. 3, 2. Teil, 1905).

Fürbringer versteht unter spinooccipitalen Nerven solche Nerven, welche ursprünglich den Charakter von Spinalnerven mit dorsalen und ventralen Wurzeln gehabt haben und mit den ihnen zugehörigen metameren Segmenten in den Kopf aufgenommen, dort aber in apicocaudaler Richtung mehr oder weniger vollständig zurückgebildet sind, und zwar hat diese Rückbildung die dorsalen Wurzeln mit ihren Ganglien in weitgehenderem Maße getroffen als die ventralen.

Dieser Prozeß der Assimilisation spinaler Elemente in das Kopfgebiet erfolgte aber nach Fürbringer nicht nur einmal, sondern in Schüben. Bei der erstmaligen Assimilisation wurde der Zustand des Neocraniums erreicht, den Fürbringer als protometamer bezeichnet. »Er ist« (vgl. Gaupp, l. c.) »fixiert bei

Selachiern und Amphibien; die Angliederung noch weiterer Elemente schafft dann den auximetameren Zustand, wie ihn die höheren Fische und die Amnioten zeigen. Von dem ursprünglichen Zustand aus ist also die craniocerebrale Grenze mehrfach caudalwärts verlegt worden.« Es ist hierzu zu bemerken, daß, da ja auch im protometameren Teil schon mehrere Schübe von Angliederung stecken können, es willkürlich ist, ihn als einheitlich dem auximetameren gegenüberzustellen. Weiter, daß eine sichere Grenze zwischen protometamerem und auximetamerem Kopfteil nicht gegeben werden kann. Wir werden also die nach Fürbringer z. B. bei Gaupp gegebenen Schemata in dieser Beziehung durchaus als problematisch zu betrachten haben. Daß eine Angliederung an das Palächranium statt hat, ja daß die caudalsten der angegliederten Metameren in sich schon Wirbelanlagen herausgebildet haben konnten, ist anzunehmen. Sicher nachgewiesen ist für Amphibien, Reptilien, Vögel und Säuger das Aufgehen von je drei ursprünglichen Rumpfmetameren in das Kopfgebiet. Bedeutungsvoll sind hier die Untersuchungen von Froriep und seinem Schüler Beck »über das Vorkommen dorsaler Hypoglossuswurzeln mit Ganglien in der Reihe der Säugetiere« (Anat. Anz. Bd. 10, 1895) und andere Untersuchungen Frorieps. Es kann auch wohl trotz der kritischen Bedenken Gegenbaurs im Jahre 1887 kein Zweifel darüber bestehen, daß die früher als ventrale Vaguswurzeln bezeichneten Nerven dem Hypoglossus als ventrale Wurzeln zuzurechnen sind. Wenn Gegenbaur die Frage aufwirft: warum werden die von Kopfmyotomen stammenden Muskeln von Cervicalnerven und nicht vom Hypoglossus innerviert?, so stellt Fürbringer fest, daß der Hypoglossus bei den Sauropsiden, »meist von seinen einzelnen Wurzeln in sehr verschiedener Weise abgehend, Zweige an die ersten Myomeren der Rumpfmuskulatur (Nackenmuskulatur)« abgibt. Namentlich von dem Nerven c nach Fürbringers Nomenklatur, d. h. dem letzten von den Vögeln in den Kopf aufgenommenen Nerven, kann selbst der überwiegende Teil zur Nackenmuskulatur gelangen. Bei den Säugern freilich wird die Nackenmuskulatur nur von Cervicalnerven versorgt.

Bei der Bedeutung die Frorieps Untersuchungen für das Kopfproblem haben, können wir dann hier nicht übergehen, daß dieser Forscher einen prinzipiellen Gegensatz zwischen den eigentlichen Kopfnerven auf der einen und den Rumpfnerven und dem Hypoglossus auf der anderen Seite aufstellt. Die Ganglienleiste des Kopfes, so führt Froriep aus, schiebt sich zwischen Somit und Epidermis vor, die des Rumpfes zwischen die Muskelplatte des Somites und das zentrale Nervensystem; das gilt auch für die rudimentäre Ganglienleiste des Hypoglossus. Rumpfganglienleiste und Kopfganglienleiste überkreuzen sich an der Grenze zwischen Kopf und Rumpfgebiet. Froriep spricht geradezu von einem Kampfe zwischen spinalen und cerebralen Nerven. Andere Forscher sind aber zu anderen Resultaten gekommen. So Anton Dohrn 1901 und 1902 in seinen Studien zur Urgeschichte des Wirbeltierkörpers (man vergleiche auch L. Neumayers Kapitel in Hertwigs Handbuch der Entwicklungslehre Bd. II, T. 3).

Dohrn vermag bei Torpedoembryonen keinen grundsätzlichen Unterschied zwischen Kopf- und Rumpfganglienleiste zu finden. Auch kann er bei 5 mm langen Embryonen von Torpedo an der medialen Seite von Kopfsomiten Zell-

stränge nachweisen, die deutliche Spinalganglienbildungen erkennen lassen und ihrer Herkunft nach der Ganglienleiste zuzuzählen sind. Auch Neumayer gibt von einem 6.25 mm langen Acanthiasembryo ein entsprechendes Bild und beruft sich weiter auf Sedgwick und Braus (1899). Er sagt, »die zwischen Somiten und Hirn gelegenen Nerven und Ganglien bilden entweder typische Nerven, oder sie obliterieren und sind in allen Fällen jenen von Kupffer bei Amocoetes beschriebenen Nerven des Gehirnes homolog, die er als spinalartigen Typus der Hirnnerven bezeichnete«.

Das Bild des Kampfes, das Froriep hier gebraucht — wie Roux ganz allgemein vom Kampfe der Teile im Organismus spricht —, dürfte auch nicht gerechtfertigt sein. Jedenfalls, das ist keine Frage, es gehen an der Grenze zwischen Kopf und Rumpf Nerven, Ganglien und Myotome mehr oder weniger vollständig zugrunde, aber nicht deshalb, weil der Kopf caudalwärts vordringend gegen die Elemente des Rumpfes ankämpft und sie besiegt, sondern es liegt hier eine Assimilisation vor und eine ihr sich anschließende Nichtgebrauchsatrophie. Die dem Schädel angegliederten, ursprünglich gegeneinander beweglichen Teile verloren ihre Beweglichkeit, und infolgedessen verfielen Nervenelemente und Muskeln einer Atrophie.

Wir kommen jetzt zu einem neuen Abschnitt. Der Kopf unterscheidet sich von dem Rumpfe durch seine besonderen Sinnesorgane. Neben Nase, Auge und Ohr werden sich im Ektoderm differenzierende Plakoden aufgezählt und zur Begründung der Neuromerie, allgemein der Metamerie des Kopfes mit verwandt. Ursprünglich unterscheidet man zwei Reihen solcher Plakoden und bezeichnet sie als die dorsolatorale und die epibranchiale Reihe. Beide liefern, darüber kann wohl kein Zweifel sein, zusammen mit den Zellen der Kopfganglienleiste die zelligen Elemente der Kopfnerven. Ob und wie die Riechgrübchen, die Linse und das Gehörbläschen der einen oder anderen Reihe dieser hypothetischen Sinnesorgane einzuordnen sind, das soll hier nicht weiter erörtert werden. Wohl aber sei noch eine Eigentümlichkeit der Kopfnervenanlagen erwähnt, die sie von denen des Rumpfes unterscheidet. Ein Teil der Zellen der Plakoden und der Kopfganglienleiste soll seinen epithelialen Charakter verlieren und die Gestalt von Mesenchymzellen annehmen. Man hat diese Zellen als Mesektoderm bezeichnet und angenommen, daß sie zum Aufbau der Bindesubstanzelemente des Schädels beitragen. Ich möchte — sollte ein solches Mesektoderm überhaupt vorkommen — eine andere Deutung, der auch Brachet zuneigt, für wahrscheinlicher halten. Diese Zellen brauchen nicht für den Aufbau des Knochens, Knorpels und Bindegewebes des Kopfes verbraucht zu werden, sie könnten ihre nervöse Ausgestaltung wieder gewinnen und auch ihrerseits noch zum Aufbau des Nervensystems beitragen. Ein Analogon für eine derartige Entwicklung liefert uns die Urniere und die Niere. Aus ursprünglich epithelialen Anlagen bildet sich bei diesen Organen der mesenchymatöse meso- und metanephrogene Strang und sekundär aus den Zellen dieser Stränge wieder die epithelialen Zellelemente der Urnieren und der Nierenkanälchen. Die Frage erfordert weitere Untersuchungen.

Wir sind jetzt zu dem Kernwerk der Metamerentheorie des Kopfes vorgedrungen, zu seinen dorsalen Metameren oder Somiten. Grundlegend

ist da das Werk von VAN WIJHE von 1882. VAN WIJHE fand damals bei Selachierembryonen 9 Kopfsegmente, 4 prootische, vor dem Ohrbläschen gelegene, und 5 metotische. (Die Lage zum Ohrbläschen soll übrigens nach BRAUS von keinerlei prinzipieller Bedeutung sein.) Neuerdings (1922) korrigiert nun VAN WIJHE seine alten Angaben dahin, daß den Selachierembryonen 10 Kopfsegmente zukommen[1]. In dem schon erwähnten Occipitalbogen von Acanthias findet er eine Marke, den Kopf etwas älterer Embryonen caudal abzugrenzen. Der Occipitalbogen ist als ein Bogen aufzufassen, der mit dem darauffolgenden Intercalare des Schädels zu einem ganzen verschmolzen ist. VAN WIJHE sagt von ihm: »Dieser Bogen verdient unsere besondere Aufmerksamkeit, da er in jungen Stadien des Kopfskeletts sämtlicher Gnathostomen erscheint und neural das morphologische Hinterende des Schädels angibt.« »Bei Fischen sind ihm caudalwärts vielfach Wirbelelemente angeschlossen, die zum Teil oder sämtlich mit dem Schädel verschmelzen, so daß die Bestimmung der hinteren Grenze desselben ohne Kenntnis der Entwicklung öfters nicht möglich wird.« Deswegen habe sich auch FÜRBRINGER in seiner großen Arbeit (1897) vielfach geirrt. »Bei Selachiern (Acanthias und Scyllidae) liegt der Bogen am Septum, welches das 5.[2] metotische Myotom (d. h. 10. Kopfsegment) nach hinten begrenzt. Vier Hypoglossuswurzeln sind schon von früheren Beobachtern konstatiert. Nach der Verknorpelung des Bogens sind nur noch die letzten zwei oder drei Wurzeln vorhanden. In einem Ausnahmefall waren aber fünf Wurzeln zu gleicher Zeit anwesend.« VAN WIJHE hält dafür, »daß der Occipitalbogen bei sämtlichen Wirbeltieren homolog ist, d. h. daß derselbe bei sämtlichen die hintere Grenze des 10. Kopfsegmentes angibt«. Doch fügt er vorsichtig hinzu: »Endgültig beweisen läßt sich diese Auffassung nicht, doch sähe ich auch nichts, was ihr widerspräche.« Nach VAN WIJHE wären bei Wirbeltierembryonen nirgends mehr Hypoglossuswurzeln als bei Selachiern nachgewiesen, und würden nirgends mehr als 6 Occipitalsomiten angelegt. Wenn bei Fischen sich Wirbelelemente dem Schädel anschließen, »so können die zugehörigen Spinalnerven nicht vom Vorderende, sondern nur vom Hinterrande des Occipitalbogens her dem Cranium zugefügt werden«. Es wirke verwirrend, wenn einige Autoren die sekundär mehr oder weniger dem Schädel einverleibten Gebilde auch Occipitalbogen nennten. Man könne sie passender als Occipitospinalbogen bezeichnen. »Das aus dem 11. Somiten gebildete Myotom wird von der ventralen Wurzel des 1. Spinalnerven versorgt.« »Der dem 1. Spinalnerven beizurechnende 1. Wirbelkörper verschmilzt bei Acanthias (und wohl mit wenigen Ausnahmen allgemein bei Selachiern) frühzeitig mit der Schädelbasis. Wahrscheinlich ist er mit dem Körper des Proatlas der Reptilien und Vögel homolog.«

»Bei Petromyzon marinus und Petromyzon fluviatilis unterscheidet sich der erste Wirbelbogen durch seine besondere Größe und auch dadurch, daß

---

[1] Abweichende Angaben von GOODRICH (Quart. J. micr. Sc. vol. 23, 1918), glaubt VAN WIJHE widerlegen zu können. H. E. ZIEGLER (Anat. Anz. 1923) ist der Ansicht von GOODRICH und seines Schülers RYLANDS DE BEER (Quart. J. micr. Sc. vol. 66, 1922).

[2] Soweit ich verstehe, müßte es heißen 6. metotisches Myotom.

er von einem ventralen und einem dorsalen Nerven durchbohrt wird. Rostral von diesem Bogen werden keine knorpligen Wirbelelemente mehr angelegt. Die Lücke zwischen demselben und der Ohrkapsel wird durch Membran verschlossen.« Das erscheint mir als das für unsere Frage Wichtigste aus den van Wijheschen Arbeiten. Seine Anschauungen werden von zwei Seiten aus mit Heftigkeit bekämpft. Anton Dohrn, Killian und Miß J. B. Platt nehmen mehr als die von van Wijhe beschriebenen Metameren im embryonalen Selachierkopfe an; bis 17 werden gezählt. Als erster Metamer wird eine Höhle, welche Miß Platt bei Acanthiasembryonen entdeckte und vordere Kopfhöhle benannt hat, aufgefaßt. Soweit ich urteilen kann, dürfte sie nicht als ein Kopfmetamer zu betrachten sein. Dann werden die Kopfsegmente van Wijhes zum Teil als Multipla von Somiten aufgefaßt, weil zu Beginn ihrer Höhlenbildung nicht ein einziger, sondern mehrere Hohlräume in ihnen auftreten, die erst später zu einem gemeinsamen Hohlraum zusammenfließen. Wir finden so etwas aber bei den mannigfachsten Höhlenbildungen, und ich glaube nicht, daß es in dem Sinne von Dohrn und Killian ausgelegt werden kann. An den Tatsachen zweifle ich nicht, die Killianschen Präparate kenne ich aus eigener Anschauung.

Viel radikaler noch ist der Gegensatz von C. Rabl zu van Wijhe. C. Rabl betrachtet als erstes und zugleich zuerst auftretendes Kopfsegment ein Somit, das ungefähr eine Ursegmentbreite hinter dem Ohrbläschen erscheint. Prootische Somite leugnet er überhaupt und gibt nur zu, daß zwischen dem Ohrbläschen und seinem ersten Somit sich noch Reste eines vordersten erhalten haben.

Wir haben uns bis dahin nur mit der dorsalen Seite des Kopfes und Rumpfes beschäftigt, wenden wir uns nun zur ventralen, so erscheint hier auf den ersten Blick eine scheinbar ganz scharfe Grenze. Soweit der Kiemendarm mit seinen Kiementaschen und Kiemenbogen reicht, würden wir Kopfgebiet haben, hinter dem letzten Kiemenbogen würde der Rumpf beginnen. So einfach liegen die Dinge aber nicht. Die Zahl der Kiemenanlagen ist bei den verschiedenen Wirbeltieren eine sehr verschiedene, und die Forscher sind nicht der gleichen Meinung, welcher Zustand als der primitive aufzufassen ist. Schon in seiner berühmten Schrift über das Kopfskelett der Selachier (1872) war Gegenraur zu der Ansicht gekommen, »daß eine sehr viel größere Anzahl von Kiemenbogen als sie selbst die Notidaniden noch aufweisen, vorausgegangen sein wird«. In seinem Aufsatze »Die Metamerie des Kopfes und die Wirbeltheorie des Kopfskeletts« (Morph. JB. Bd. 13, 1887) nimmt er an, daß die hypothetischen Stammformen der Wirbeltiere amphioxusähnlich gewesen sein werden, und wie dieser viele Kiemenspalten besaßen. — Jedenfalls war man bis vor kurzem fast allgemein der Ansicht, daß die kiemenreicheren Formen die primitiveren sind. So gelten meist die heptanchen und hexanchen Haie als ursprünglicher als die pentanchen. So gelten die Cyclostomen für primitive Formen. Auguste Brachet freilich ist ganz anderer Ansicht. Er hält Formen mit vier Viszeralbogen, dem Mandibalarbogen, dem Zungenbeinbogen und zwei echten Kiemenbogen für die primitiven. Das caudale Ende der Kiemenregion würde nach ihm ursprünglich genau dem caudalen Ende des Paläocraniums entsprechen, und der caudalste Nerv des Urkopfes würde der

erste Ast des N. vagus sein. Die ventral von dem Neocranium gelegenen Kiemen und Kiementaschen wären Neuerwerbungen. Die Kiemenregion dringe erobernd gegen die ventrale Rumpfregion vor. — Auch H. E. Ziegler hat 1915 die Ansicht ausgesprochen, daß die letzte Kiemenspalte der pentanchen Haie und die zwei bzw. drei letzten Kiemenspalten der hexanchen und heptanchen Haie phyletisch jünger sind sls die vorhergehenden Kiemenspalten. Vgl. auch H. E. Ziegler, »Der jetzige Stand des Kopfproblems« (Anat. Anz. Bd. 57, 1923). Die Beziehungen der postbranchialen Körper, die stets caudal von den letzten, typischen Kiementaschen liegen, sind noch ganz unklar. Nebenbei sei erwähnt, daß auch die Lungen von einigen Forschern auf Kiementaschen zurückgeführt werden, ebenso der Mund, die Nasengrübchen und die Ohrbläschen. Ich will mich auf diese, doch sehr hypothetischen Annahmen hier nicht weiter einlassen und nur noch erwähnen, daß man auch, abgesehen von den Riechgrübchen, noch apicalwärts vom Munde Kiemenspaltenreste gesucht hat. Meiner Meinung nach ohne Erfolg. Auch die Frage, ob in der Reihe der Kiemenbogen und -taschen einige ausgefallen sind, wurde erörtert und z. B. die Annahme vertreten, daß der Hyoïdbogen eigentlich zwei Kiemenbogen entspräche, zwischen denen eine Kiementasche zugrunde gegangen sei.

Im Anschluß hieran kommen wir zu der viel umstrittenen Frage, ob jedem Kopfsegment, abgesehen von dem ersten, ein Kiemenbogen entspricht, oder ob die Metamerie der Ursegmente eine andere sei, als die der Kiemenbogen und -taschen? Für die Annahme einer Unabhängigkeit von dorsaler und ventraler Metamerie läßt sich anführen, daß die Kiementaschen später und zögernder entstehen als die dorsalen Ursegmente, und daß sie ihnen zur Zeit ihres Auftretens vielfach jedenfalls nicht genau entsprechen. Freilich wird auf zeitliche Verschiebungen allein bei morphologischen Betrachtungen nicht allzuviel Gewicht gelegt werden können, und schwerwiegender ist vielleicht die Feststellung der Tatsache, daß die Kiementaschen sekundär ein unsegmentriertes, ventrales Mesoblastblatt durchbrechen.

Bei Amphioxus ist auch der ventrale Mesoblast segmentiert. Angaben, daß auch bei Petromyzon der ventrale Mesoblast sich ursprünglich metamer anlege, bedürfen wohl, trotzdem sie von sehr beachtenswerter Stelle ausgehen, einer Nachprüfung (man vgl. Hatschek, Morph. JB. Bd. 40, 1910 und Hatta, Anotationes zool. Japon. Vol. IV, 1901—1903).

Die Neuromerie und eine etwaige Angiomerie soll nicht weiter erörtert werden.

Versuchen wir nun noch einmal das Wesentlichste zusammenzufassen, so können wir sagen: Der apicalste Teil des Wirbeltierkopfes, der Akromerit, ist nicht eigentlich ein Segment des Kopfes; er ist dem ganzen übrigen Tierkörper gegenüberzustellen, der aus ihm hervorgesproßt gedacht werden kann. Es ist also der Kopf phylogenetisch wie ontogenetisch älter als der Rumpf. Hier ergibt sich die Möglichkeit eines Vergleichs mit der Trochophoralarve der Wirbellosen. Der caudal vom Akromerit gelegene Teil des Kopfes ist, bevor sich der Schädel anlegt, mehr oder weniger deutlich segmentiert. Man kann die apical von dem Ohrbläschen liegenden Segmente als prootische von den caudal

von ihm gelegenen metotischen unterscheiden. Die metotischen Segmente lassen sich durchaus den Rumpfsegmenten vergleichen, und in ihnen entstehen vielfach auch Muskelplatten, jedenfalls in den caudal gelegenen, bei manchen Tieren, z. B. bei Petromyzon, in allen. Die Gesamtzahl der Segmente ist nach VAN WIJHE 10 (nach Untersuchungen an Selachiern), und zwar gibt es vier prootische und sechs metotische, wozu zu bemerken ist, daß VAN WIJHES 4. prootischer Somit vielfach nur als ein abgespaltener Teil des 3. aufgefaßt wird (vgl. H. E. ZIEGLER l. c.). Beim Petromyzon würden nach KOLZOFF dem Kopfe drei prootische und eine unbestimmte Zahl von metotischen Segmenten angehören, da »beim Neunauge die Kopfgrenze sich noch nicht festgestellt hat«. Schon das 4. Segment (das erste metotische) produziert hier Muskelplattenmuskulatur. Die 3 ersten (prootischen) Metamere lassen die Augenmuskeln entstehen. Im Gebiet des ersten Metamer fehlt das ventrale Mesoderm.

Vielfach wird angenommen, und für viele Tiere mit Recht, daß ein größerer oder kleinerer Teil der Segmente zugrunde geht. VAN WIJHE hält dafür, »daß der Occipitalbogen bei sämtlichen Wirbeltieren homolog ist, d. h. bei sämtlichen die hintere Grenze des 10. Kopfsegmentes angibt«, »auch werden nach ihm nirgends mehr als 6 Occipitalsomite angelegt«.

Mit der Lage der Metameren hat man dann die der Sinnesplacoden in Einklang bringen wollen, ohne daß dies überall befriedigend gelänge. Von der dorsalen Metamerie wenden wir uns zu der ventralen. Eine solche ist in den Viszeralbogen zweifellos gegeben, aber es ist zweifelhaft, ob die durch die Kiemenbogen und Kiementaschen gegebene Segmentierung der Segmentierung durch die Somiten entspricht.

Strittig ist auch, ob der Zustand mit vielen oder der mit wenigen Viszeralbogen als der primitivere zu bezeichnen ist [BRACHET und H. E. ZIEGLER (Anat. Anz. Bd. 48, 1915 und Bd. 57, 1923)].

Wir sind am Ende unserer Betrachtungen. Wir haben das Kopfproblem im Ganzen und in seinen Teilen durchgenommen und gesehen, wie vieles an ihm noch durchaus problematisch ist. Es wird aber auch klar geworden sein, daß das Kopfproblem und die Fragen, welche es umfaßt, eine Aufgabe sind. Häufig ist es bei der Behandlung der Kopfprobleme zwischen den Forschern zu Streit und heftiger Polemik gekommen. Es konnte nicht wohl anders sein, und wie wir mit Goethe begonnen haben, so wollen wir mit einer Betrachtung Goethes schließen. Goethe sagt in seiner Abhandlung »Dem Menschen wie den Tieren ist ein Zwischenknochen der oberen Kinnlade zuzuschreiben« (Cottasche Jubiläumsausgabe Bd. 39, S. 199 ff.), mit Bezug auf die Schädelwirbeltheorie: »ein dergleichen Aperçu, ein solches Gewahrwerden, Auffassen, Vorstellen, Begriff, Idee, wie man es nennen mag, behält immerfort, man gebärde sich, wie man will, eine esoterische Eigenschaft: im ganzen läßt sichs aussprechen, aber nicht beweisen; im einzelnen läßt sichs wohl vorzeigen, doch bringt man es nicht rund und fertig. Auch würden zwei Personen, die sich von dem Gedanken durchdrungen hätten, doch über die Anwendung desselben im einzelnen sich schwerlich vereinigen; ja, um weiter zu gehen, dürfen wir behaupten, daß der einzelne, einsame, stille Beobachter und Naturfreund mit sich selbst nicht immer

einig bleibt und einen Tag um den anderen klarer oder dunkler sich zu dem problematischen Gegenstande verhält, je nachdem sich die Geisteskraft reiner und vollkommener dabei hervortun kann.« »Macht aber auch ein neuer, vielleicht erneuter, einfacher, edler Gedanke einigen Eindruck, so wird er doch niemals rein, wie es zu wünschen wäre, fortgeführt und entwickelt. Erfinder und Teilnehmer, Lehrer und Schüler, Schüler untereinander, die Gegner gar nicht gerechnet, widerstreiten, verwirren, entfernen sich in vielspältiger Behandlung immer mehr und mehr.«

So ist es in der Tat beim Kopfproblem gegangen, und so geht es auch bei vielen anderen morphologischen Problemen.

Ausgegeben am 18. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

1924 VIII. IX

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 6. März. (S. 45)

Adresse an Hrn. Max Lenz zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 5. März 1924. (S. 46)

Klassensitzung am 13. März. (S. 48)

Ludendorff: Über die Radialgeschwindigkeit von ε Aurigae. (Mitteilung vom 31. Januar.) (S. 49)

Correns: Über den Einfluß des Alters der Keimzellen. I. Dritte Fortsetzung der Versuche zur experimentellen Verschiebung des Geschlechtsverhältnisses. (Mitteilung vom 28. Februar.) (S. 70)

Library of Congress
JUL 12 1924
Publication Division

BERLIN 1924

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1924

VIII. Gesamtsitzung. 6. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Heymann sprach über die Entwicklung des englischen Immobiliarrechts und die Law of property act von 1922.

Es wurde der Einfluß des Lehnwesens auf das englische Sachenrecht aufgezeigt, die Entwicklung des Systems der Sachenrechte in England, die Stellung der equitable estates, die Erwerbsformen und der Einfluß der conveyancing auf sie, die Behandlung der entails, leases, mortgages. Die umfangreiche und komplizierte Law of property act beseitigt nicht nur veraltete Einrichtungen wie Reste der Lehnsdienste und copyhold, sondern sie schließt außer anderen tiefgreifenden Veränderungen große Gruppen von Rechten aus dem Kreise der legal estates aus und beschränkt sie auf die Formen des Billigkeitsrechts. Dieses und anderes drängt, namentlich für die entails und mortgages, an denen große Gruppen der Bevölkerung interessiert sind, auf die allgemeine Einführung des für London bereits durchgeführten, an das deutsche System angelehnten Grundbuchwesens, für das von 1935 ab das Veto der county councils fortfällt. Die damit herbeizuführende Stärkung des Realkredits in England, die unter sorgsamster Schonung der wohlerworbenen Rechte vor sich geht, muß den agrarischen Reformen und der gesamten Wirtschaft zugute kommen. Eng mit alldem hängt die Neugestaltung des Intestaterbrechts unter Beschränkung auf einen engeren Erbenkreis und unter Ausbau des Ehegattenerbrechts zusammen.

2. Hr. Engler überreichte von den mit Unterstützung der Wentzel-Heckmann-Stiftung herausgegebenen Werken »Beiträge zur Flora von Papuasien« von Prof. Dr. C. Lauterbach, Serie X und XI (Leipzig 1924) und »Beiträge zur Flora von Mikronesien (und Polynesien)« von L. Diels, Serie III (Leipzig 1923).

3. Das korrespondierende Mitglied Hr. Luschin-Ebengreuth überreichte seine Arbeiten über »Friesacker Pfennige« (Sonderabdr. aus Wiener Num. Zeitschr. Bd. 55 und 56, 1922—1923).

Das Ehrenmitglied der Akademie, Hr. Max Lenz in Hamburg, hat am 5. März sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat ihm eine Adresse gewidmet, die in diesem Stücke abgedruckt ist.

Adresse an Hrn. Max Lenz zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 5. März 1924.

Hochgeehrter Herr Kollege!

In den 5 Jahrzehnten seit Ihrer Promotion hat Ihre Arbeit 5 Jahrhunderte durchwandert. Sie hat sich nacheinander den Reformkonzilien und der Reformation, mit Martin Luther und Philipp von Hessen, sie hat sich dem 30jährigen Kriege mit Wallenstein und Gustav Adolf, der Revolution und Napoleon und immer von neuem Bismarck zugewandt und ist bis in den Kampf der Gegenwart hinein weitergeschritten. Sie hat eine große Edition, eine lange Reihe strenger und scharfer kritischer Einzeluntersuchungen, einheitliche Darstellungen insbesondere biographischer Art mit Luther, Napoleon und Bismarck als Gipfeln, und eine bunte Fülle weitausgreifender Essays hervorgebracht; politisches Handeln, religiöses und politisches Denken und der Zwang der großen internationalen Zusammenhänge haben Sie beschäftigt, auch in den Biographien treten diese allgemeinen Zwangsgewalten je später um so entscheidender hervor. Alledem haben Sie Ihre Geschichte der Berliner Universität angereiht: Einrichtungen, Wissenschaften, Persönlichkeiten, geistige und staatliche Kämpfe und Schicksale eng ineinander verwebt — überall die Verbindung von Staat und Geist, von Macht und Freiheit. Das ist der Inhalt Ihrer Geschichtsforschung und Geschichtsschreibung, und über ihm funkelt stets der gleiche Stern. Wohl sind Sie der Sohn des Bismarckischen Deutschlands, der Mitstreiter von 1870, dessen ganze Seele in den Geschicken unseres Reiches, in politisch-nationaler Empfindung lebt. Aber Sie haben Bismarck und jeden Ihrer Helden wie seiner Gegner mit Rankischer Deutung begriffen und mit Rankischem Urteil begleitet: mit jener Deutung, die den Staatsmann als Ausdruck der sachlichen Staatsgewalt erfaßt und Macht, Schicksal und Willen in Eines schmilzt; mit dem Urteil, das Verständnis und Gerechtigkeit, Würdigung der Eigenart und der besonderen Bedingungen als höchste sittliche Pflicht des Historikers verkündet. An Ranke haben Sie, von Ihren näheren Lehrern und Vorgängern abgekehrt, Forschungsweise und Forschungsziele orientiert: die Gegenstände, Staat und Geist, die Hineinstellung jeder Sonderentwicklung, jeder Nation, alles inneren Lebens in den Strom des universalen Lebens der Völker und der Staaten. Rankes Jugendprogramm von den »Großen Mächten« haben Sie am Beginne Ihrer Laufbahn als Kern seiner Lebensarbeit gepriesen und stetig als den Kern der Ihrigen festgehalten. Und Rankisch war die Art Ihres historischen Fühlens und Ihres Gestaltens: Sie sind immer vom Stoffe hergekommen, nie von der Theorie, von der lebendigen Anschauung, nie vom Systeme und vom

Dogma her, Sie haben, im Sinne solcher, eigentlich-historischer, Rankischer Anschauung, juristische, theologische, soziologische, philosophische Konstruktion ebenso schneidend bekämpft wie die parteipolitische Tendenz, und nur zu Einem, das man ein Dogma nennen könnte, zur Rankischen Systematik der Macht als der Beherrscherin des Völker- und auch des großen Einzellebens, haben Sie Sich bekannt. Sie haben auch an der Geistesgeschichte lieber Empfindung und Willen als den abstrakten Gedanken beobachtet. Alles Leben aber der Zeiten und der Einzelnen haben Sie in seiner Sonderfarbe sehen und mitfühlen und malend wiedergeben wollen: in früheren Tagen vielleicht heller und farbiger, in späteren linearer und stärker. Beinah in allem haben Sie einer jüngeren Generation eifriger Schüler die Erbschaft mindestens des großen Praktikers Ranke erneut: und sind doch wiederum etwas ganz anderes gewesen als er. Sie waren nicht wie er der unmittelbare Zögling von Klassik, Romantik und Restauration, sondern, trotz aller historischen Versenkung, der Zögling einer Epoche des Willens und der politischen Kraft, persönlich von Ihrem Meister weit verschieden: aktiv, mannhaft, zufahrend, erfüllt von politischem Ideale, ein kämpfender Bekenner so des Protestantismus wie der nationalen Macht. Als Historiker jedoch haben Sie dieses Eigene, den Bekenner und den Kämpfer, ohne es zu ersticken, unter den Gehorsam der objektiven und der universalen Betrachtung gebeugt und Ihre Gewissenslehre der kritischen Selbstzucht mahnend weitergereicht. Auf eine Lebenseinwirkung haben Sie auch so nicht verzichtet: der Geschichtsschreiber der Universität Berlin hat als Sechziger eine neue Universität gründen geholfen; und wenn der Siebziger in schwerer Gegenwart mit seinen besonderen Waffen weiterzustreiten trachtet für sein Volk, so tut er es durch Wahrung der Überlieferung, der unabgebrochenen, nationalen Erbschaft hoher Zeiten, und wieder mit der internationalen Geschichte der Großen Mächte des letzten halben Jahrtausends und ihrer inneren und äußeren Betätigung als führendem, wegweisendem Gegenstande.

So haben Sie Sich aus maßgebenden Einflüssen und kräftiger Eigenart ein neues lebendiges Ganzes gestaltet, zusammengesetzt und einheitlich zugleich; Sie sind Sich treu geblieben und werden es bleiben. Die Akademie, deren Mitglied Sie in Nähe und Ferne zwei und drei Jahrzehnte hindurch gewesen sind, sagt Ihnen ihren Glückwunsch dazu: zu neuen Früchten, die Ihr frisches Alter noch reifen möge im alten Sinne, reifen an historischer Sonne und an einem, die Zeiten verknüpfenden und die Zeiten überdauernden Glauben an das Vaterland.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 3. April.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1924

IX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 13. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

Hr. Müller-Breslau sprach über Die Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme. (Ersch. später.)

Zusammenstellung und Besprechung der Formeln für die Berechnung der Spannungen, einfache Fassung der Knickbedingung, Mitteilung von Versuchsergebnissen.

Über die Radialgeschwindigkeit von ϵ Aurigae.

Von H. LUDENDORFF.

(Vorgetragen am 31. Januar 1924 [s. oben S. 8].)

Schon seit 1821 ist es bekannt, daß die Helligkeit des Sternes ε Aurigae kleinen Schwankungen unterworfen ist, und lange Zeit hindurch hat man ihn in die Klasse der unregelmäßigen Veränderlichen eingeordnet. Veranlaßt durch die Entdeckung von H. C. VOGEL[1] und G. EBERHARD, daß ε Aurigae ein spektroskopischer Doppelstern sei, habe ich dann eine zusammenfassende Diskussion aller Helligkeitsbeobachtungen dieses Sternes unternommen und in zwei Abhandlungen in den »Astronomischen Nachrichten« veröffentlicht[2]. Das Ergebnis dieser Untersuchungen läßt sich kurz wiedergeben wie folgt: Der Lichtwechsel geht in einer 27.1 Jahre dauernden, regelmäßigen Periode vor sich. 25.2 Jahre lang ist die Helligkeit konstant, dann nimmt sie in etwa 180^d um 0.74 Größenklassen ab, bleibt darauf etwa 340^d in einem konstanten Minimum und nimmt schließlich in etwa 180^d wieder bis zu dem normalen Werte zu. ε Aurigae ist hiernach ein Algolstern, und man kann den Lichtwechsel durch die Annahme erklären, daß alle 27 Jahre ein Begleiter vor den Stern tritt und ihn verfinstert. Merkwürdig ist die sehr lange Dauer der Periode, die die längsten uns sonst bekannten Perioden von Algolsternen (759^d bei δ Cassiopeiae[3] und 262^d bei RZ Ophiuchi) um ein Vielfaches übertrifft. Soweit man aber aus der viermaligen periodischen Wiederkehr einer Erscheinung auf die Zukunft schließen darf, ist die Periode von ε Aurigae gewährleistet. Die Mitte des nächsten Minimums wird im Mai 1929 stattfinden.

Das Spektrum von ε Aurigae gehört der Klasse cF5 an. Es ist bekannt, daß alle c-Sterne Übergiganten sind, und wir können dies daher auch von ε Aurigae annehmen. In der Tat ist auf dem Mt.-Wilson-Observatorium die absolute Größe dieses Sternes nach der KOHLSCHÜTTER-ADAMSschen Methode zu −2.0 bestimmt worden[4]; dem entspricht eine Parallaxe von 0".008. Moderne direkte Parallaxenmessungen liegen meines Wissens nicht vor.

Daß ε Aurigae ein spektroskopischer Doppelstern sei, wurde, wie oben erwähnt, von VOGEL und EBERHARD bemerkt. Ich selbst habe dann 26 Spektrogramme von ε Aurigae, die in der Zeit von November 1901 bis März 1905 mit dem am photographischen 32.5-cm-Refraktor des Potsdamer Observatoriums angebrachten Spektrographen IV von EBERHARD und mir aufgenommen worden

[1] Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. 1902, S. 1068.
[2] Bd. 164 S. 81 (1903) und Bd. 192 S. 389 (1912).
[3] P. GUTHNICK und R. PRAGER in Veröffentl. d. Kgl. Sternwarte zu Berlin-Babelsberg Bd. II Heft 3 S. 112 (1918). Die Helligkeitsschwankung beträgt nicht ganz 0.1 Größenklasse.
[4] Contrib. fr. the Mt. Wilson Obs. Nr. 199 S. 33 (Astroph. Journ. Bd. 53, 1921).

waren, vermessen. Die Ergebnisse dieser Arbeit sind in den »Astronomischen Nachrichten«[1] veröffentlicht. Unter Mitbenutzung einiger an anderen Sternwarten angestellten Messungen konnte ich schließen, daß die Radialgeschwindigkeit in einer sehr langen, wahrscheinlich mit der des Lichtwechsels identischen Periode veränderlich sei, daß außerdem aber noch Schwankungen kürzerer Periode in den Werten der Radialgeschwindigkeit sich verrieten. Man mußte hiernach annehmen, daß ε Aurigae nicht ein gewöhnlicher spektroskopischer Doppelstern sei, sondern wahrscheinlich ein Dreikörpersystem bilde.

Später ist dann mit demselben Spektrographen IV noch eine große Zahl von Spektrogrammen von ε Aurigae hergestellt worden, und zwar anfangs von Eberhard und mir, von Oktober 1908 an von mir allein. Die Beobachtungsreihe wurde Anfang 1913 abgebrochen. Es lagen schließlich 182 brauchbare Platten vor, die sämtlich schon vor Jahren von mir vermessen worden sind. Zu einer eingehenden Diskussion dieser Messungen bin ich aber erst jetzt gekommen. Als vorläufiges Ergebnis habe ich nur am Schlusse meiner zweiten Abhandlung über den Lichtwechsel von ε Aurigae[2] mitgeteilt, daß die sekundäre Welle der Radialgeschwindigkeitskurve sehr veränderliche Gestalt besitze.

Der Sternspektrograph IV, mit dem die sämtlichen Platten aufgenommen worden sind, ist von G. Eberhard in Nr. 54 der Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums beschrieben worden. Dieser gegenwärtig nicht mehr in Benutzung befindliche Apparat ist schon 1899/1900 konstruiert worden und entspricht keineswegs den Anforderungen, die man heutzutage an einen Sternspektrographen stellt. Vor allem hatte er den prinzipiellen Mangel, daß man nicht mit Hilfe einer besonderen Vorrichtung während der Belichtung das Bild des Sternes auf dem Spalte sehen konnte. Vielmehr geschah die Einstellung in der Weise, daß man vor Beginn der Belichtung mit einer Lupe in die Kamera des Spektrographen hineinsah und die Deklinations-Feinbewegung des Fernrohres so lange drehte, bis das Spektrum des Sternes ein Maximum an Helligkeit erreichte. Dann war anzunehmen, daß der Stern gut auf dem Spalte saß. Gehalten wurde darauf während der Belichtung mit dem Leitfernrohr des Doppelrefraktors. Es konnte nun vorkommen, daß bei nicht guter Einstellung des Sternes der Spalt unsymmetrisch beleuchtet war, und das mußte zu Fehlern in der Radialgeschwindigkeit Anlaß geben. Ferner konnte, wie eine einfache Überlegung zeigt, bei tiefem Stande des Sternes auch die atmosphärische Dispersion Fehler verursachen. Im allgemeinen sind diese Fehler nur klein geblieben, in einzelnen Fällen aber ohne Zweifel doch merklich geworden.

Der Spektrograph bildete den Teil des Spektrums zwischen λ 4520 AE und λ 4300 AE scharf ab, und auf diesen Spektralbereich erstrecken sich daher die Messungen[3]. Bei Hγ ist 1 mm auf der Platte ungefähr gleich 17 AE, und einer Linienverschiebung von 0.1 mm entspricht eine Radialgeschwindigkeit von 120 km. Die Messungen geschahen mit Hilfe eines Töpferschen

[1] Bd. 171 S. 49 (1906).
[2] Astron. Nachr. Bd. 192 S. 406 (1912).
[3] Nur die erste Platte ist bei einer etwas anderen Justierung der Kamera des Spektrographen aufgenommen worden.

Meßmikroskops. Jede Platte wurde unmittelbar hintereinander zweimal gemessen; bei der zweiten Messung wurde ein vor dem Okular des Mikroskops angebrachtes Reversionsprisma so gedreht, daß die Lage der Platte um 180° gegen die bei der ersten Messung verändert schien. Auf diese Weise wurden die persönlichen Einstellungsfehler unschädlich gemacht. Als Vergleichspektrum diente das Bogenspektrum des Eisens.

Für die Messung wurden die 25 besten Linien des Spektrums innerhalb des erwähnten Spektralbereichs ausgesucht. Sie wurden nach Rowlands »Preliminary Table of Solar Spectrum Wave-Lengths« identifiziert und die Wellenlängen derselben Quelle entnommen. Um die Wellenlängen zu verbessern und unter sich homogen zu machen, wurde das folgende bekannte Verfahren eingeschlagen: Für jede Platte wurde zunächst das Mittel der Radialgeschwindigkeiten aus allen gemessenen Linien und darauf für jede Linie die Abweichung von diesem Mittel gebildet. Diese Abweichungen der einzelnen Linien wurden nun wiederum für eine große Anzahl von Platten gemittelt und darauf die ursprünglich angenommenen Wellenlängen so korrigiert, daß die Mittelwerte zum Verschwinden gebracht wurden. Bei der Ableitung der Wellenlängen-Korrektionen wurde indessen nicht das gesamte Plattenmaterial, sondern nur 100 Platten aus der Zeit 1906—1911 benutzt; die Korrektionen wurden aber bei den Messungen aller Platten berücksichtigt.

Die folgende Tabelle enthält in ihrer ersten Kolumne ein Verzeichnis der schließlich benutzten Wellenlängen. Die zweite Kolumne gibt die Differenz zwischen der benutzten und der bei Rowland angegebenen Wellenlänge. Die dritte Kolumne endlich gibt die Intensität der Linie im Sonnenspektrum und das Element, dem sie angehört, nach Rowland; ist sie bei diesem keinem bestimmten Element zugeschrieben, so ist an die Stelle des Symboles des Elementes ein x gesetzt. Die Ursache der stärkeren Differenzen der hier benutzten Wellenlängen gegen die bei Rowland ist z. T. leicht anzugeben; z. B. liegt neben der Fe-Linie 4415.293 (8 Fe, nach Rowland) eine Scandium-Linie, die im Spektrum von ε Aurigae jedenfalls stärker als im Sonnenspektrum und von der genannten Fe-Linie auf den Platten nicht mehr getrennt ist, so daß eine Linie mit der Wellenlänge 4415.433 entstanden ist. Die Mg-Linie λ 4481.400 kommt im Sonnenspektrum und daher auch bei Rowland nicht vor.

λ	λ — Rowl.	Ident.	λ	λ — Rowl.	Ident.
4522.802	0.000	3 x	4404.896	−0.031	10 Fe
20.374	−0.023	3 Fe?	4387.033	+0.026	1 Ti?
15.490	−0.018	3 x	74.845	+0.027	2 V, Mn + 3 Sc, Fe
08.439	−0.016	4 Fe?	67.824	+0.049	2 Ti + 5 Fe
01.424	−0.024	5 Ti	51.862	−0.068	5 Cr
4491.554	−0.016	2 x	44.382	−0.069	2 Ti
81.364	−0.036	Mg	40.704	+0.070	20 H (Hγ)
71.010	−0.007	1 Ti	38.019	−0.065	4 Ti
68.726	+0.063	5 Ti	20.947	+0.040	3 Sc
64.608	−0.009	2 Ti?	16.977	+0.015	1 Ti?
50.646	−0.008	2 Ti?	12.949	−0.085	3 Ti
44.063	+0.087	5 Ti	08.011	−0.012	6 Fe + 3 Ca
15.433	+0.140	8 Fe			

Die gemessenen 182 Werte der Radialgeschwindigkeit von ε Aurigae sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Kolumnen geben der Reihe nach: 1. eine laufende Nummer. 2. die Zeit der Mitte der Belichtung (Tagesbruchteile in mittlerer Zeit Berlin). 3. den entsprechenden Julianischen Tag. 4. die gemessene Radialgeschwindigkeit v, bezogen auf den Beobachter. 5. die Zahl n der gemessenen Linien. 6. die auf die Sonne reduzierte Radialgeschwindigkeit v_o. 7. Bemerkungen über die Beschaffenheit der Platten. (Unterbelichtung ist meist durch das Eintreten von Bewölkung verursacht worden.)

Der Vollständigkeit wegen sind auch die ersten 26, schon in den »Astronomischen Nachrichten« Bd. 171 veröffentlichten Radialgeschwindigkeiten mit aufgenommen worden; sie weichen von den dort gegebenen Werten um geringe Beträge ab, weil damals die Linienkorrektionen noch nicht angebracht worden waren, und weil die damals ausgeschlossene Linie Hγ nunmehr mit berücksichtigt worden ist.

Die Belichtungsdauer hat meist 60^m oder etwas mehr betragen.

Nr.	Datum	J. T.	v	n	v_o	
1	1901 Nov. 9.40	2415 698	— 8.9 km	20	+ 5.3 km	
2	1902 Nov. 18.43	6 072	−24.4	22	−14.1	
3	19.41	073	−24.5	21	−14.6	
4	22.36	076	−23.1	22	−14.6	
5	27.40	081	−19.2	24	−13.1	
6	Dez. 11.38	095	−15.9	23	−16.6	
7	1903 Jan. 2.23	117	— 6.5	22	−17.6	Vergleichspektrum nur zu Beginn der Belichtung
8	22.29	137	+10.7	22	— 8.7	
9	März 1.44	175	+23.8	21	— 4.1	
10	April 24.38	229	+14.3	23	— 5.4	
11	Nov. 28.40	447	— 5.8	22	— 0.1	
12	1904 Jan. 5.36	485	+ 7.9	21	— 4.7	
13	10.43	490	+10.8	23	— 4.1	
14	Febr. 12.33	523	+12.3	22	−13.1	
15	13.33	524	+13.8	23	−11.8	
16	März 5.30	545	+14.4	22	−13.6	
17	22.33	562	+18.8	22	— 8.5	
18	Nov. 10.44	795	−20.8	18	(— 7.2)	Sehr stark unterbelichtet
19	Dez. 9.39	824	−11.3	23	−11.3	Vergleichspektrum sehr stark
20	1905 Jan. 17.27	863	+ 9.8	22	— 7.9	
21	19.32	865	+13.6	25	— 5.0	
22	20.35	866	+12.1	23	— 6.9	
23	21.37	867	+13.8	22	— 5.6	
24	Febr. 20.40	897	+22.0	22	— 5.0	
25	März 22.40	927	+16.0	21	−11.3	
26	23.32	928	+13.8	23	−13.4	
27	1906 März 20.34	7 290	+15.6	22	−12.0	
28	28.33	298	+18.8	23	— 7.7	Vergleichspektrum sehr stark
29	April 3.34	304	+13.6	19	−11.8	
30	4.35	305	+12.9	21	−12.3	
31	5.33	306	+14.0	22	−11.0	
32	8.36	309	+12.6	22	−11.7	
33	Okt. 1.57	485	−33.0	17	— 7.0	

Nr.	Datum	J. T.	v	n	v_o	
34	1906 Okt. 8.54	2417 492	−33.8 km	22	− 9.1 km	
35	10.54	494	−34.3	17	−10.1	
36	Nov. 6.47	521	−30.0	22	−14.5	
37	8.45	523	−28.1	22	−13.4	
38	15.44	530	−29.7	18	(−18.0)	Stark unterbelichtet
39	Dez. 1.41	546	−17.4	23	−13.2	
40	7.43	552	−16.0	23	−14.8	
41	22.36	567	− 2.6	19	− 8.7	
42	27.39	572	+ 1.1	22	− 7.5	
43	1907 Febr. 22.39	629	+19.1	16	− 8.1	
44	März 3.35	638	+19.1	13	− 8.9	
45	7.40	642	+19.4	16	− 8.7	
46	26.38	661	+13.6	21	−13.3	
47	29.37	664	+10.2	20	−16.2	
48	30.32	665	+16.5	21	− 9.7	
49	31.32	666	+15.2	21	−10.9	
50	April 1.32	667	+12.2	22	−13.7	
51	2.32	668	+13.1	21	−12.6	
52	3.36	669	+11.5	21	−14.0	
53	1908 Jan. 14.35	955	+ 0.7	19	−16.2	Stark unterbelichtet
54	Febr. 10.31	982	+ 8.1	19	−17.4	» »
55	14.29	986	+ 9.1	19	−17.2	» »
56	19.33	991	+ 8.8	21	−18.4	
57	März 25.34	8 026	+11.9	22	−15.5	
58	26.34	027	+15.1	21	−12.2	
59	27.32	028	+12.6	23	−14.5	
60	Nov. 7.44	253	−27.8	17	−13.4	
61	9.44	255	−26.1	23	−12.6	
62	10.43	256	−24.7	18	−11.6	
63	15.43	261	−22.8	16	−11.9	
64	16.44	262	−20.9	16	−10.4	Stark unterbelichtet
65	Dez. 9.39	285	−20.4	21	−20.9	Unterbelichtet
66	9.44	»	−19.3	23	−19.9	
67	16.39	292	−13.2	22	−17.2	
68	17.41	293	−14.8	21	−19.2	Unterbelichtet
69	1909 Jan. 15.40	322	+ 5.9	20	−11.8	
70	18.41	325	+ 6.1	21	−12.7	
71	19.41	326	+ 9.5	16	− 9.7	
72	24.40	331	+ 9.6	20	−11.4	
73	Febr. 7.33	345	+17.0	23	− 8.0	
74	17.32	355	+17.6	21	− 9.4	
75	März 19.36	385	+21.8	21	− 6.3	
76	26.37	392	+24.3	21	− 3.0	
77	April 7.34	404	+19.8	23	− 5.2	
78	Okt. 13.52	593	−30.6	25	− 7.7	
79	15.51	595	−31.0	16	− 8.6	
80	17.50	597	−26.7	21	− 4.9	
81	18.50	598	−28.9	19	− 7.3	
82	21.48	601	−30.2	18	− 9 5	
83	25.47	605	−27.4	19	− 8.0	
84	26.47	606	−29.9	12	−10.9	Sehr schlechte Platte
85	Nov. 4.45	615	−29.3	22	−13.6	

Nr.	Datum	J. T.	v	n	v_o	
86	1909 Nov. 13.47	2418 624	−30.0 km	18	−18.1 km	Unterbelichtet
87	Dez. 3.36	644	−16.2	22	−13.6	
88	5.40	646	−16.5	22	−14.9	
89	8.40	649	−11.4	18	−11.3	
90	16.41	657	− 7.4	20	−11.3	Unterbelichtet
91	21.36	662	− 4.7	20	−10.9	
92	1910 Jan. 4.45	676	+ 2.4	21	−10.6	
93	12.30	684	+ 5.5	19	−10.7	
94	26.36	698	+11.0	18	−10.5	Unterbelichtet
95	Febr. 15.37	718	+18.8	21	− 7.9	
96	März 1.42	732	+18.8	18	− 9.7	
97	4.42	735	+23.2	18	− 5.4	
98	5.34	736	+21.5	22	− 7.1	
99	6.34	737	+21.6	25	− 7.0	
100	9.35	740	+20.5	21	− 8.1	
101	14.35	745	+22.3	22	− 6.2	
102	15.36	746	+19.8	21	− 8.7	
103	20.36	751	+18.4	23	− 9.7	
104	April 1.34	763	+14.4	17	−11.9	Unterbelichtet
105	2.33	764	+15.9	23	−10.2	
106	5.33	767	+15.0	22	−10.5	
107	Okt. 17.49	962	−37.5	21	−15.6	
108	29.47	974	−31.5	22	−13.4	
109	Nov. 8.45	984	−25.8	19	−11.6	Stark unterbelichtet
110	10.44	986	−22.2	13	− 8.9	» »
111	12.43	988	−22.1	23	− 9.6	
112	12.48	»	−20.4	24	− 8.0	
113	Dez. 12.37	9 018	− 6.1	21	− 7.8	
114	12.42	»	− 7.5	15	− 9.3	
115	13.37	019	− 7.4	19	− 9.6	
116	15.39	021	− 6.1	18	− 9.3	
117	21.37	027	− 5.2	21	−11.3	
118	21.50	»	− 1.9	19	− 8.3	
119	28.31	034	− 6.1	18	−15.5	
120	28.36	»	− 5.3	18	−14.8	
121	1911 Jan. 8.41	045	− 0.3	15	−14.7	
122	13.46	050	+ 2.4	18	−14.3	
123	23.24	060	+ 3.9	20	−16.3	
124	29.28	066	+ 6.8	18	−15.5	
125	29.33	»	+ 7.3	16	−15.0	
126	Febr. 1.29	069	+ 5.9	17	−17.3	Unterbelichtet
127	1.34	»	+ 6.9	20	−16.3	
128	5.38	073	+ 7.5	20	−16.9	
129	März 1.35	097	+11.3	22	−16.9	
130	3.30	099	+11.6	20	−16.8	
131	10.38	106	+12.9	24	−15.7	
132	11.36	107	+14.2	21	−14.4	
133	20.35	116	+15.3	22	−12.8	
134	21.31	117	+15.3	23	−12.7	
135	April 3.33	130	+15.4	23	−10.6	
136	11.35	138	+16.6	18	− 7.6	Unterbelichtet
137	15.34	142	+15.6	20	− 7.5	

Nr.	Datum	J. T.	v	n	v_o	
138	1911 Nov. 24.39	2419 365	−23.8 km	21	−16.6 km	
139	24.44	»	−22.3	21	−15.2	
140	24.48	»	−22.8	21	−15.7	
141	24.53	»	−22.3	22	−15.3	
142	24.57	»	−23.5	22	−16.6	
143	24.62	»	−24.0	21	−17.2	
144	24.67	»	−23.0	20	−16.2	
145	1912 Jan. 8.32	410	+ 3.5	19	−10.8	
146	10.27	412	+ 8.6	23	− 6.5	
147	10.32	»	+ 8.3	22	− 6.8	
148	10.36	»	+10.1	15	− 5.1	Stark unterbelichtet
149	10.41	»	+ 9.3	20	− 6.0	
150	10.46	»	+ 9.2	23	− 6.2	
151	10.50	»	+ 6.1	22	− 9.3	
152	10.55	»	+ 6.8	16	− 8.7	Stark unterbelichtet
153	11.28	413	+ 9.0	21	− 6.5	
154	11.32	»	+ 7.7	20	− 7.9	
155	12.38	414	+ 9.8	22	− 6.3	
156	24.28	426	+10.3	18	−10.2	Unterbelichtet
157	27.25	429	+14.1	20	− 7.4	
158	27.30	»	+14.5	21	− 7.1	
159	Febr. 4.26	437	+14.3	19	− 9.6	
160	5.25	438	+16.5	19	− 7.7	Unterbelichtet
161	20.38	453	+12.3	19	−14.6	
162	20.42	»	+10.9	20	−16.1	
163	20.47	»	+11.1	16	−15.9	Stark unterbelichtet
164	März 2.32	464	+10.5	19	−17.9	
165	4.34	466	+ 8.5	16	−20.0	Stark unterbelichtet
166	4.38	»	+ 4.9	16	−23.7	» »
167	8.36	470	+ 7.8	22	−20.8	
168	8.41	»	+ 5.9	21	−22.8	
169	Dez. 20.38	757	− 2.3	19	− 8.2	
170	21.38	758	− 1.6	17	− 8.0	Stark unterbelichtet
171	22.38	759	+ 0.8	21	− 6.1	
172	1913 Jan. 30.26	798	+ 6.4	18	−16.3	Unterbelichtet
173	Febr. 14.31	813	+ 8.8	19	−17.7	»
174	17.32	816	+ 9.9	22	−17.1	
175	19.31	818	+ 8.3	24	−19.0	
176	20.31	819	+10.9	23	−16.5	
177	25.28	824	+10.4	22	−17.6	
178	März 13.30	840	+ 9.9	22	−18.6	
179	22.31	849	+13.8	25	−14.0	
180	April 4.32	862	+16.8	22	− 8.9	
181	15.34	873	+17.8	21	− 5.1	
182	16.34	874	+15.9	23	− 6.7	

Außerdem standen mir noch folgende 12, an anderen Sternwarten bestimmte Radialgeschwindigkeiten zur Verfügung[1]:

[1] Quellenangaben siehe Astr. Nachr. Bd. 171 S. 53. Die Messungen von Adams sind um + 4 km korrigiert (vgl. Astr. Nachr. Bd. 180 S. 288).

Datum	J. T.	v_o	
1897 Jan. 7	2413 932	+ 9 km	Lick-Observatorium
1899 Nov. 28	4 987	+ 4	Adams
Dez. 6	995	+ 4	»
» 7	996	+ 4	»
» 18	5 007	+ 4.2	Lick-Observatorium
» 27	016	+ 5.7	»
1900 Jan. 17	037	+10.0	»
Sept. 24	287	− 2.6	»
1901 Aug. 23	620	+ 9	Frost
Sept. 18	646	0	»
» 20	648	+ 2	»
1903 Dez. 29	6 478	− 4	Lick-Observatorium

Eine graphische Darstellung der 194 Werte v_o ergab nun sofort, daß die v_o erstens eine Veränderlichkeit von sehr langer Periode aufweisen, zweitens aber auch noch in kleineren Intervallen (von einigen Monaten) hin und her schwanken. Wir wollen uns zunächst mit diesen rascheren Veränderungen beschäftigen. Die graphische Darstellung lehrt, daß die entsprechenden Geschwindigkeitskurven sehr stark veränderlich sind, und daß auch die Länge der Periode großen Änderungen unterworfen ist. Definiert man die Periode als mittleren Abstand zweier aufeinander folgender negativer Maxima der Radialgeschwindigkeit, so ergeben sich folgende durchschnittliche Periodenwerte:

1903—06	$P = 143^d$
1906—08	150
1908—09	170
1909—11	150
1911—13	125

Wir sehen also, daß die P bis 1908—09 zu-, dann aber wiederum stark abnehmen. (Vor 1903 sind die Beobachtungen zu wenig zahlreich, als daß man Werte von P angeben könnte.)

Es ist nun angesichts dieser Sachlage natürlich keineswegs gesagt, daß sich für die einzelnen Perioden die Bewegung durch elliptische Bahnelemente darstellen läßt. Wir wollen aber eine solche Darstellung versuchen; aus der Zusammenstellung der Beobachtungen ist ersichtlich, daß nur für die drei Zeitintervalle

I	1908 Nov. — 1909 April
II	1909 Okt. — 1910 April
III	1910 Okt. — 1911 April

die Beobachtungen so zahlreich und so gut verteilt sind, daß eine Berechnung elliptischer Elemente möglich ist. Um eine solche auszuführen, wurden innerhalb der drei genannten Zeitintervalle benachbarte Platten zu Mittelwerten vereinigt. Diese sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben; p bezeichnet die Zahl der Platten, auf denen der betreffende Wert von v_o beruht.

I			II			III		
	v_o	p		v_o	p		v_o	p
2418 255	−12.5 km	3	2418 595	− 7.1 km	3	2418 962	−15.6 km	1
261	−11.2	2	600	− 8.4	2	974	−13.4	1
285	−20.4	2	605	− 9.4	2	985	−10.2	2
292	−18.2	2	615	−13.6	1	988	− 8.8	2
323	−12.2	2	624	−18.1	1	9 018	− 8.5	2
328	−10.6	2	646	−13.3	3	020	− 9.4	2
350	− 8.7	2	660	−11.1	2	027	− 9.8	2
388	− 4.7	2	680	−10.6	2	034	−15.1	2
404	− 5.2	1	698	−10.5	1	047	−14.5	2
			718	− 7.9	1	064	−15.6	3
			733	− 7.6	2	070	−16.8	3
			738	− 7.4	3	098	−16.8	2
			745	− 7.4	2	106	−15.0	2
			751	− 9.7	1	117	−12.8	2
			765	−10.9	3	130	−10.6	1
						140	− 7.6	2

Ich habe nun die auf Grund dieses Zahlenmateriales ausgeführten Bahnbestimmungen nicht bis zur äußersten Schärfe getrieben, da mir dies im vorliegenden Falle zwecklos erschien, sondern habe mich mit ersten Bahnbestimmungen nach der Methode von LEHMANN-FILHÉS begnügt. Es ergab sich, daß die Beobachtungen innerhalb der drei Zeitintervalle I, II und III ziemlich befriedigend durch folgende Elementensysteme dargestellt werden:

	I	II	III
P	161^d	152^d	143^d
γ	−11.1 km	−10.7 km	−13.1 km
K	7.8 »	4.8 »	4.8 »
e	0.34	0.58	0.26
ω	120°8	122°4	4°0
T	2418266^d	2418615^d	2419005^d
$a \sin i$	16240000 km	8171000 km	9018000 km
f	0.0066 ⊙	0.00094 ⊙	0.00143 ⊙

Die Bezeichnungen sind die allgemein üblichen; f bedeutet die Größe $\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2}$, wo m_1 die Masse der Hauptkomponente, m_2 die des Begleiters ist.

Aus den Figuren 1 bis 3 ist zu ersehen, wie die beobachteten Werte der Radialgeschwindigkeit durch die mit den obigen Elementen berechneten Geschwindigkeitskurven dargestellt werden. Im ganzen ist die Darstellung durchaus befriedigend.

Die drei Elementensysteme sind sehr stark voneinander verschieden. Es liegt der Gedanke nahe, die Änderungen durch Störungen zu erklären, die die Bewegung durch einen dritten Körper erleidet. Ein solcher ist ja in der Tat in dem System vorhanden, denn, wie schon erwähnt, weisen die Radialgeschwindigkeiten auch noch eine sehr lange Periode auf, die wahrscheinlich hervorgerufen wird durch den Begleiter, der ε Aurigae alle 27 Jahre verfinstert.

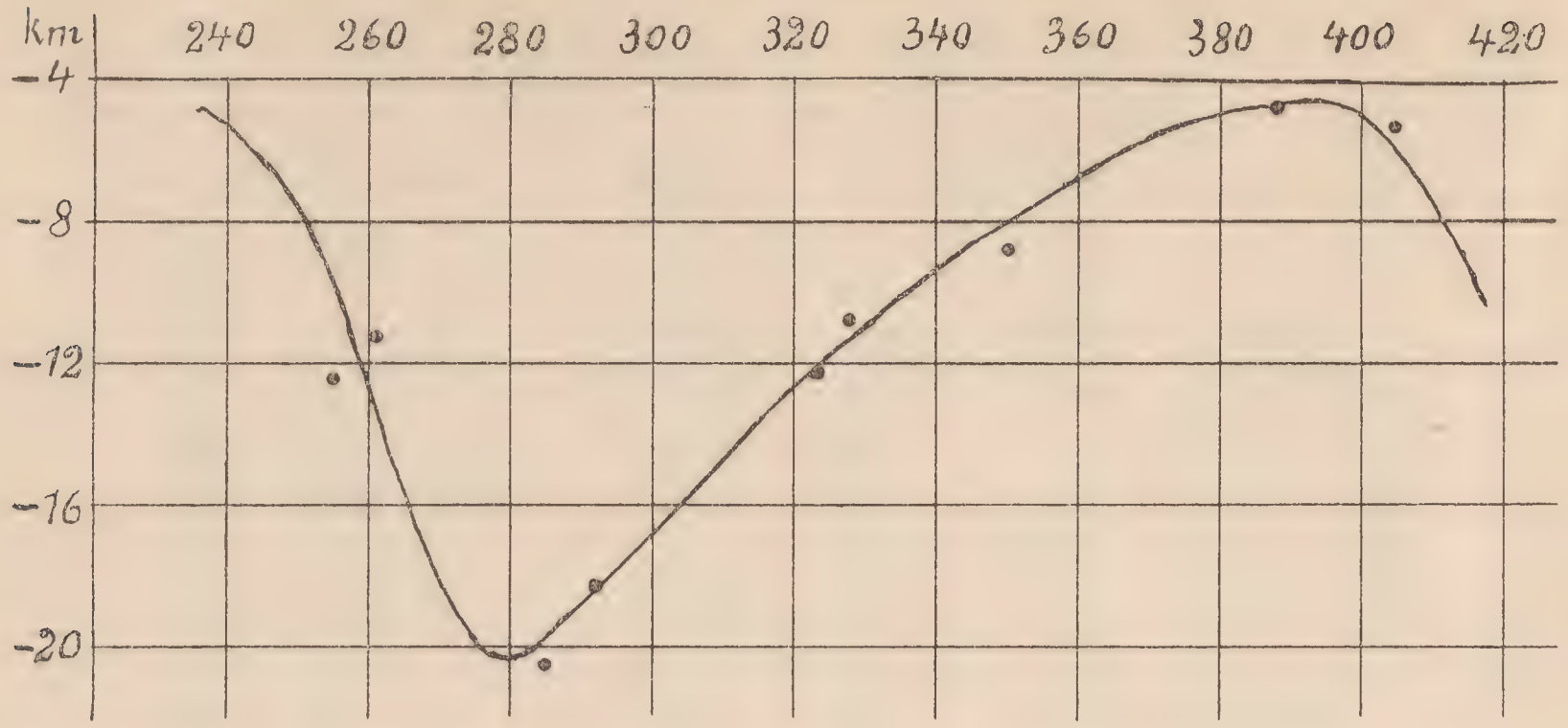


Fig. 1 1908-09

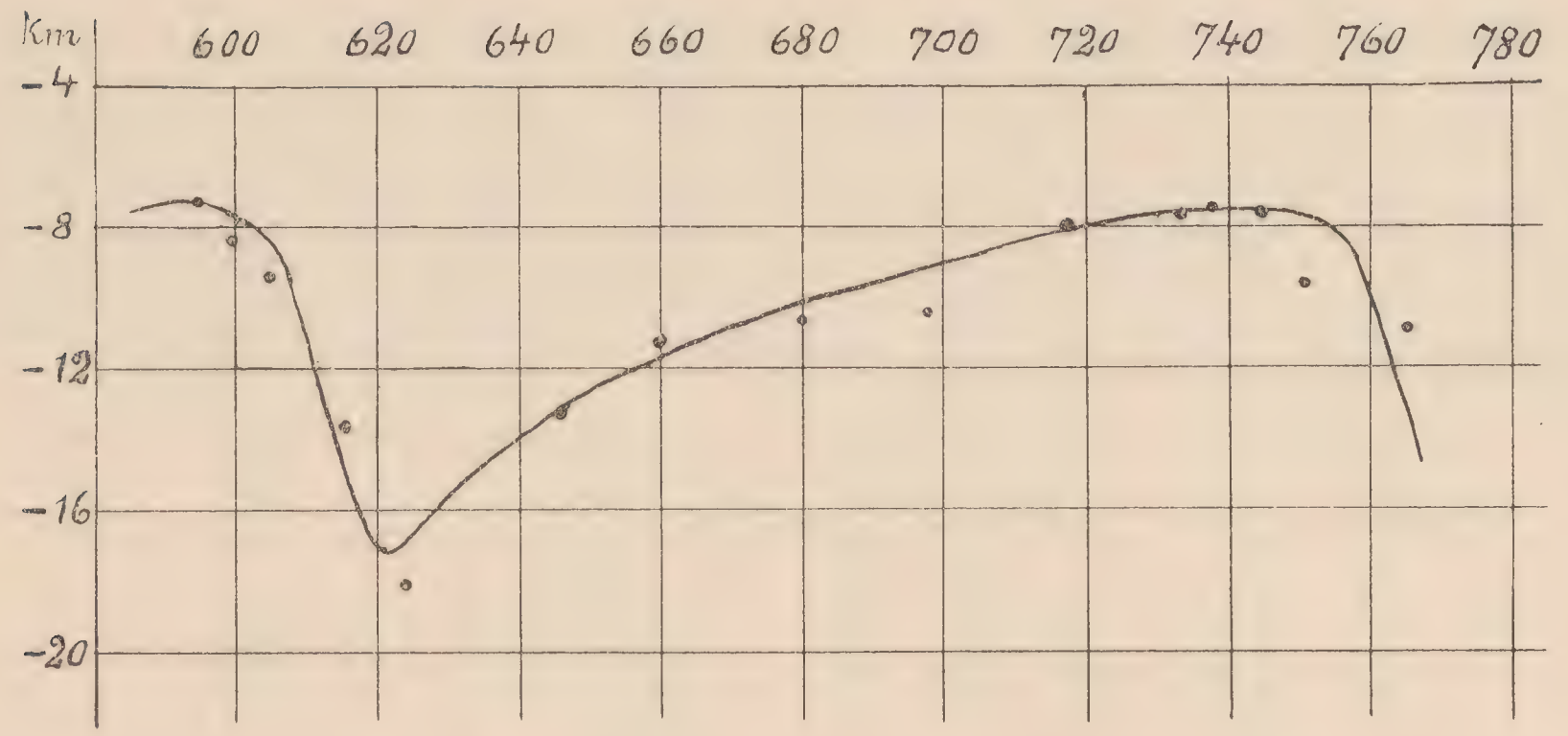


Fig. 2 1909-10

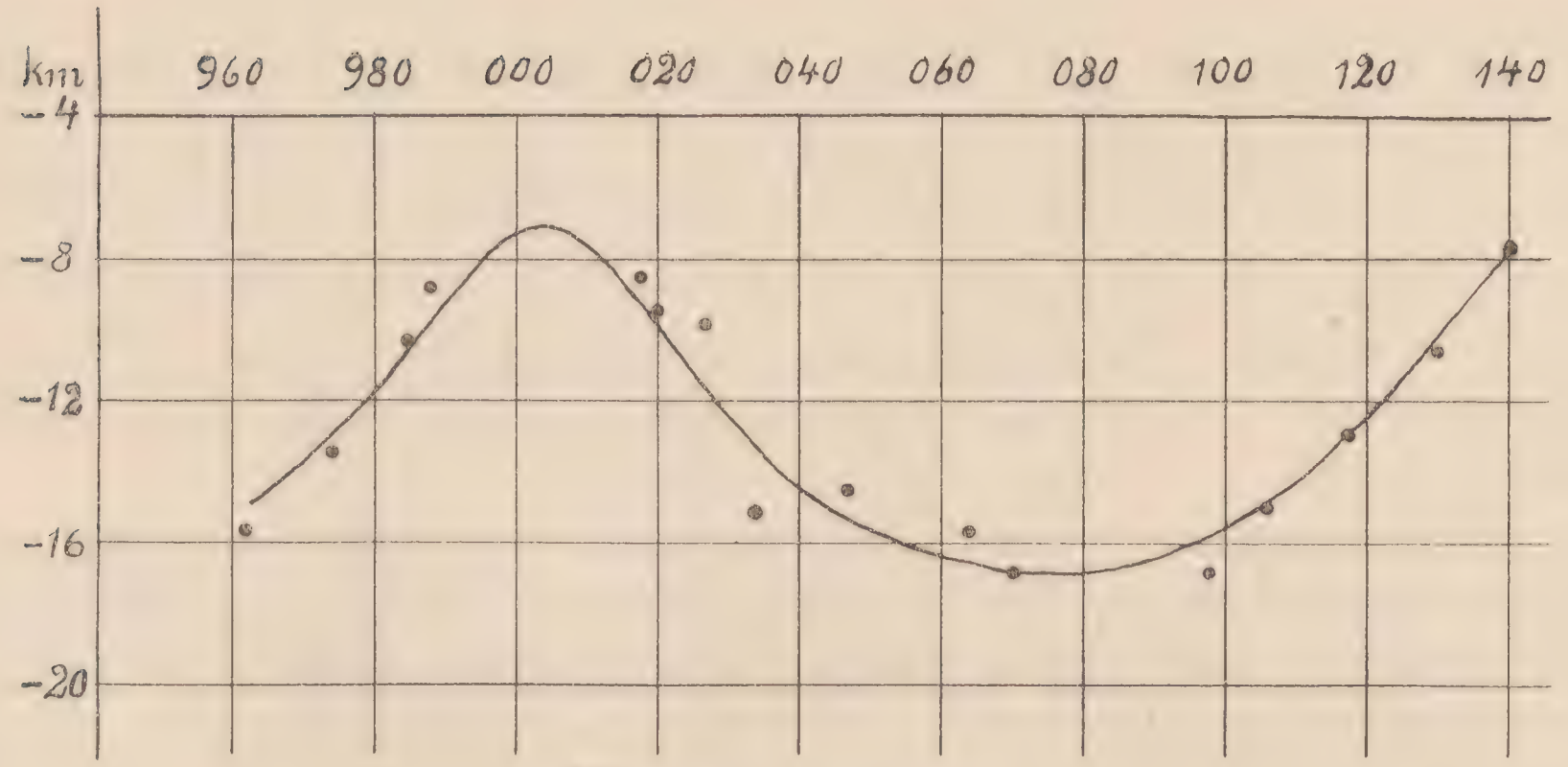


Fig. 3 1910-11

Bevor auf diese langperiodische Bewegung eingegangen wird, sei hier noch eine Bemerkung eingeschaltet. Die Erfahrung hat gelehrt, daß sich scheinbare Anomalien in der Bewegung spektroskopischer Doppelsterne zuweilen dadurch beseitigen lassen, daß man statt einer längeren (in unserem Falle also etwa 150tägigen) Periode eine solche von sehr nahe einem Tage oder einem aliquoten Teile des Tages annimmt. In der Tat lassen sich die Beobachtungen des Zeitintervalles I ganz gut mit einer Periode von $0^d.995$, die des Zeitintervalles III mit einer solchen von $1^d.006$ darstellen; die Geschwindigkeitskurven sind allerdings sehr verschieden voneinander. Mehr Schwierigkeiten bereitete schon das Intervall II. Um die Frage zu entscheiden, habe ich dann am 24. November 1911 und am 10. Januar 1912 ε Aurigae die ganze Nacht hindurch, solange es ging, beobachtet. Wie die oben gegebene Tabelle der Radialgeschwindigkeiten zeigt, sind die in diesen beiden Nächten erhaltenen Beobachtungen nicht mit der Annahme einer eintägigen oder noch kürzeren Periode vereinbar, und man muß diese Annahme demnach fallen lassen.

Wir wenden uns nun dem Studium der langperiodischen Bewegung zu, die sich dadurch verrät, daß die Schwerpunktsgeschwindigkeit γ der Bewegung kürzerer Periode veränderlich ist. Für die Zeitintervalle I bis III ist γ bereits bestimmt worden, für die andern Zeiten muß man seinen Wert, so gut es geht, nach den vorhandenen Beobachtungen abschätzen; das ist zum Teil nur mit erheblicher Ungenauigkeit möglich. Sehr zustatten kam es mir, daß Hr. FROST[1] kürzlich für die Jahre 1917, 1918 und 1920 Mittelwerte der Radialgeschwindigkeit von ε Aurigae veröffentlicht hat, die auf Beobachtungen an 14, 4 und 10 Tagen beruhen. Diese Mittelwerte wurden einfach als Schwerpunktsgeschwindigkeiten angenommen; ohne sie wäre eine Bestimmung der langperiodischen Bahn nicht möglich gewesen. In der folgenden Tabelle sind die angenommenen Werte von γ zusammengestellt; besonders unsichere Werte sind eingeklammert.

1897.0	$\gamma = (+\ 9)$ km	1910.0	$\gamma = -11$ km
1900.0	$(+\ 4)$	11.0	-13
01.8	$(+\ 4)$	12.0	-13
03.0	$-\ 8$	13.0	-13
04.0	$-\ 7$	17.5	$-\ 4$
05.0	$(-\ 8)$	18.5	$(-\ 3)$
07.0	-10	20.5	$+13$
09.0	-11		

Eine graphische Darstellung dieser Zahlen lehrt, daß sich die γ ganz leidlich einer Kurve mit einer Periode von 27.1 Jahren, die mit der des Lichtwechsels identisch ist, anpassen. Die entsprechenden, nach der Methode von LEHMANN-FILHÉS berechneten Bahnelemente lauten:

$P_o = 27.1$ Jahre	$\omega_o = 319°.7$
$\gamma_o = -1.8$ km	$T_o = 1920.6$
$K_o = 14.8$ »	$a_o \sin i_o = 1887000000$ km
$e_o = 0.35$	$f_o = 2.7\ \odot$

[1] Popular Astronomy 29 S. 158 (1921).

Diese Elemente dürfen natürlich nur als rohe Annäherung betrachtet werden. Fig. 4 zeigt, wie die mit ihnen berechnete Kurve der Radialgeschwindigkeiten mit den angenommenen Werten von γ übereinstimmt. Es kommen einige stärkere Abweichungen vor, doch ist dies nicht anders zu erwarten, da die γ teilweise recht unsicher sind. (Auffällig ist eigentlich nur die starke Abweichung des für 1903.0 gefundenen Wertes von γ; die entsprechenden Platten sind während des Anstieges der Helligkeit nach dem Minimum aufgenommen, zu einer Zeit, wo das Spektrum [siehe unten] besondere Eigentümlichkeiten zeigt.) Angesichts der starken Veränderlichkeit der Geschwindigkeitskurven kürzerer Periode ist überhaupt die Bestimmung der γ eine recht prekäre Sache. Daß die lange Periode in den Radialgeschwindigkeiten mit der des Lichtwechsels übereinstimmt, kann jedenfalls nicht bezweifelt werden.

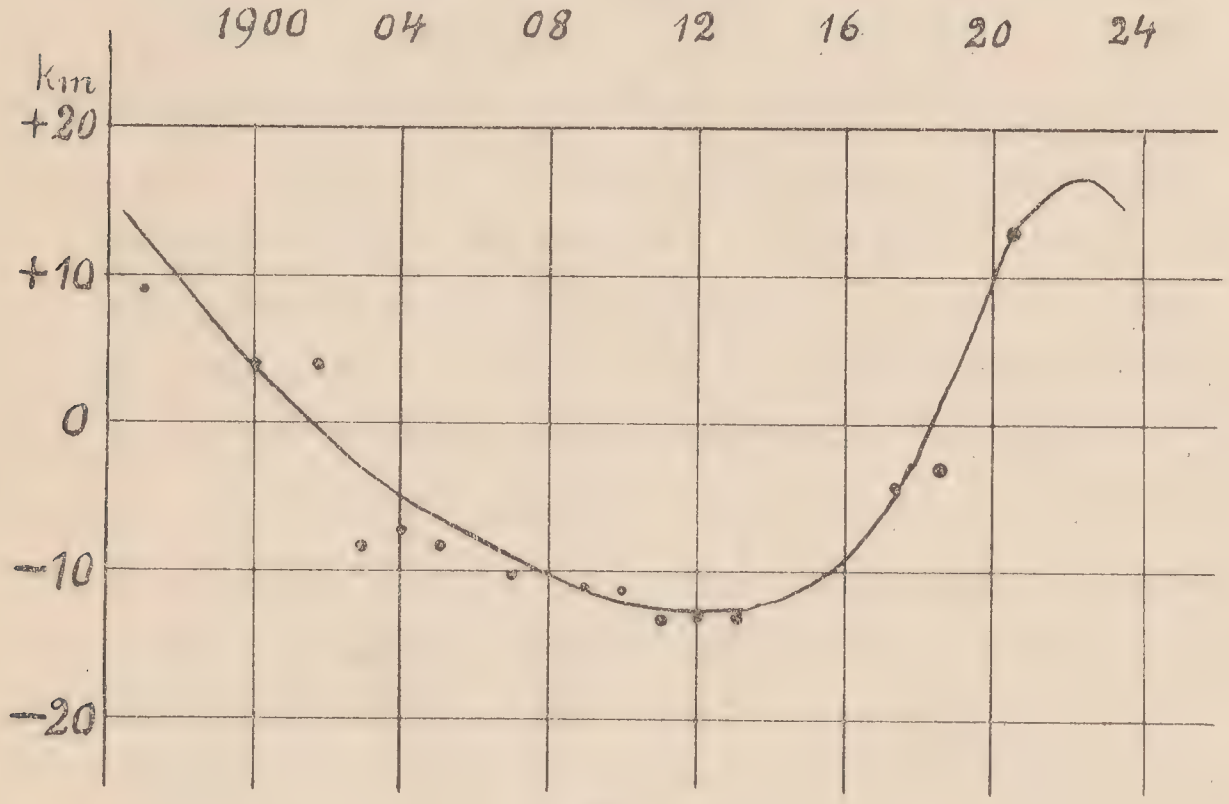


Fig. 4

Der Verlauf der Radialgeschwindigkeitskurve entspricht durchaus der Annahme, daß der Lichtwechsel von ε Aurigae durch eine Verfinsterung hervorgebracht wird. Die Mitte des Minimums muß auf den Zeitpunkt fallen, in welchem die wahre Anomalie des verfinsterten Körpers $= 90° - \omega = 130°.3$ ist; dies war, wie die Rechnung nach obigen Elementen ergibt, 1900.6 der Fall. Aus den Helligkeitsbeobachtungen hat sich andererseits für die Mitte des Minimums 1902.3 ergeben; beide Zahlen weichen nur um 1.7 Jahre, d. h. um etwa 6 Prozent der Periodenlänge, voneinander ab. Eine bessere Übereinstimmung kann bei der Ungenauigkeit der Elemente kaum erwartet werden.

Während der Zeit der normalen Helligkeit des Sternes hat das Spektrum stets, soweit die Potsdamer Aufnahmen reichen, dasselbe Aussehen. Die Linien haben den bekannten *c*-Charakter, und es ist keine Spur von dem Spektrum einer zweiten Komponente sichtbar. Auch Frost hat auf seinen Aufnahmen aus den Jahren 1917—20 keine Andeutung einer solchen finden können.

Nur während des Helligkeitsminimums zeigen die Spektrallinien gewisse merkwürdige Erscheinungen, die zunächst daran denken lassen, daß sich in ihnen die zweite Komponente zu erkennen gäbe, wobei allerdings von vornherein zu bedenken ist, daß während des Minimums die relative Radialgeschwindigkeit beider Komponenten gering sein muß. Die erwähnten Erscheinungen habe ich in meiner bereits zitierten Arbeit in Astr. Nachr. Bd. 171 schon beschrieben, möchte aber der Vollständigkeit wegen das Wesentliche hier kurz wiederholen.

Aus der Zeit der Abnahme der Helligkeit besitzen wir keine Platten. Während des konstanten Teiles des Minimums ist nur unsere erste Platte hier

aufgenommen worden. Die Linien sind genau dieselben wie zur Zeit normaler Helligkeit, nur sind sie etwas weniger gut abgegrenzt. Bei einigen ist eine schärfere Begrenzung nach der Seite der größeren Wellenlängen hin angedeutet.

Aus der Zeit des Anstieges der Helligkeit stammen unsere Platten Nr. 2 bis 9. Auch auf diesen Platten sind dieselben Linien wie immer sichtbar (VOGELS Angabe, daß auf den ersten von ihnen weniger Linien vorhanden seien, beruht augenscheinlich auf einem Versehen), aber sie sind etwas breiter als zu Zeiten normaler Helligkeit des Sternes und haben zum Teil die Eigentümlichkeit, daß sie nach der Seite der kleineren Wellenlängen hin sehr scharf begrenzt sind und dann häufig auf der anderen Seite (vgl. Figur in Astr. Nachr. Bd. 171 S. 52) einen stufenförmigen Abfall der Intensität zeigen. (VOGEL hat die letztere Erscheinung als Andeutung einer Linienverdoppelung aufgefaßt und daraus auf eine relative Radialgeschwindigkeit von 30 km bis 40 km geschlossen. So große relative Bewegungen können aber zur Zeit des Minimums unmöglich aufgetreten sein.) Für weitere Einzelheiten verweise ich auf meine zitierte Arbeit. Dort ist auch bemerkt, daß einige Linien während des Anstieges der Helligkeit gegen ihre normale Lage im Spektrum etwas verschoben sind.

Nachdem die Helligkeit ihren normalen Betrag erreicht hat, verschwinden alle diese Erscheinungen, nur die Platte Nr. 10, die unmittelbar nach dem Ende des Minimums aufgenommen ist, zeigt sie noch teilweise.

Es erscheint mir nun nicht möglich, die oben geschilderten Eigentümlichkeiten der Linien während des Minimums durch die Annahme zu erklären, daß sich im Minimum die Linien der zweiten Komponente bemerkbar machen. Denn diese Linien könnten dann außerhalb des Minimums, wo die relative Radialgeschwindigkeit viel größer wird, nicht völlig verschwinden. Man kann auch nicht etwa annehmen, daß ein solches Verschwinden deswegen stattfindet, weil die hellere Komponente nun nicht mehr zum Teil abgeblendet ist; dazu sind jene Eigentümlichkeiten um die Mitte des Helligkeitsanstieges, wo die Abblendung nur noch 0.3 bis 0.4 Größenklassen beträgt, noch viel zu deutlich. Ich bin vielmehr der Meinung, daß die geschilderten Eigentümlichkeiten der Linien dadurch zustande kommen, daß während des Minimums das zu uns gelangende Licht der Hauptkomponente die äußeren Schichten der Atmosphäre des Begleiters passiert. Wie freilich die Erklärung im einzelnen ist, vermag ich nicht zu sagen; man könnte vielleicht gerade in diesem Falle an anomale Dispersion denken. Es erscheint mir aber, ehe man sich in Hypothesen über diesen Punkt verliert, ratsam, das bevorstehende Minimum von ε Aurigae abzuwarten. Man wird dann auch während der Abnahme der Helligkeit Aufnahmen machen und die Untersuchung über einen größeren Spektralbereich ausdehnen können. Beides wird zur Klärung der Frage wesentlich beitragen.

Das Endergebnis der vorstehenden Diskussion lautet dahin, daß sich die Linien einer zweiten Komponente nicht im Spektrum von ε Aurigae nachweisen lassen.

Wir wollen nun sehen, was wir weiter unter gleichzeitiger Berücksichtigung des spektroskopischen und des photometrischen Befundes über das merkwürdige System ε Aurigae aussagen können.

Vor einer Reihe von Jahren hat SHAPLEY[1] versucht, sich auf Grund der Lichtkurve eine nähere Vorstellung von dem Bau des Systemes zu verschaffen. Er hebt sehr zutreffend hervor, daß man die Lichtkurve nicht durch die Verfinsterung eines großen, hellen Sternes durch einen kleinen, dunklen Begleiter erklären kann; dazu ist die Dauer des konstanten Minimums (340^d) und die Helligkeitsamplitude (0.74 Größenklassen) zu groß. Er nimmt daher an, daß das System aus zwei Komponenten von gleicher Gesamthelligkeit besteht, von denen die eine kleinen Durchmesser und große Flächenhelligkeit, die andere großen Durchmesser und kleine Flächenhelligkeit besitzt. Während des Helligkeitsminimums bedeckt die große Komponente die kleine, und zwar ist während der konstanten Phase des Minimums diese Bedeckung total. Zu dieser Zeit dürfte also nur das Spektrum der großen Komponente sichtbar sein, außerhalb des Minimums aber die Spektren beider Komponenten, die ja beide gleiche Gesamthelligkeit haben sollen. Wie wir sahen, ist das Spektrum von ε Aurigae aber einfach, und SHAPLEYS Vorstellungen von der Beschaffenheit des Systems lassen sich daher nicht aufrechterhalten.

Um nun die Form der Lichtkurve zu erklären, sehe ich keine andere Möglichkeit als die Annahme, daß der verfinsternde Körper eine langgestreckte Gestalt hat; es könnte sich etwa um eine Art Wolke von Meteoren handeln. Um die Vorstellungen zu fixieren, wollen wir folgende Annahme machen: 1. Der Hauptstern ist kugelförmig, die Scheibe leuchtet gleichmäßig bis zum Rande. 2. Die »Wolke« ist dunkel und undurchsichtig; ihr Querschnitt senkrecht zur Richtung ihrer Bewegung ist kreisförmig mit konstantem Radius, und die Neigung i_0 ihrer Bahn beträgt 90°. Diese letztere Annahme kann nicht garzu falsch sein; im übrigen kann und wird die Konstitution der Wolke in Wirklichkeit wesentlich anders sein als wir hier der Einfachheit wegen vermuten, zumal eine Wolke von dem angenommenen Bau nicht stabil sein dürfte.

Der Verlauf der Verfinsterung ist dann wie folgt: Wenn der Kopf der Wolke den ersten Rand des Hauptsternes scheinbar berührt, beginnt die Helligkeit geringer zu werden. Die Abnahme dauert 180^d, bis der Kopf der Wolke den zweiten Rand der Sternscheibe erreicht hat. Dann beginnt die 340^d dauernde konstante Phase des Minimums; während derselben wird durch die langgestreckte Wolke ein Streifen aus der Scheibe des Sternes herausgeblendet. Nach Ablauf der 340^d hat das hintere Ende der Wolke den ersten Rand des Sternes erreicht, es beginnt die Zunahme der Helligkeit. Nach weiteren 180^d ist das hintere Ende der Wolke bis an den zweiten Rand vorgerückt, und das Minimum ist damit vorüber. Diese Vorstellung berührt uns zunächst wohl etwas merkwürdig, es dürfte aber nicht gut möglich sein, sie zu umgehen.

Die Rechnung ergibt, daß, wenn man mit R den Radius des Hauptsternes bezeichnet, man dem Radius des kreisförmigen Querschnittes der Wolke den Wert $0.40\,R$ beilegen muß, und daß die Länge der Wolke $5.8\,R$ ist. Die Länge der Wolke verhält sich also zu ihrem Durchmesser ungefähr wie 7 : 1.

[1] Astr. Nachr. Bd. 194 S. 225 (1913).

Das Volumen der Wolke ist ungefähr 0.7 von dem des Hauptsternes, die halbe große Achse der relativen Bahn der Wolke um den Hauptstern ist 22.6 R. (Bei der Berechnung wurden die gefundenen elliptischen Bahnelemente zugrunde gelegt.)

Für die mittlere Dichte des Hauptsternes, ausgedrückt in Einheiten der Sonnendichte, besteht die Gleichung[1]

$$\rho = \frac{0.01344}{P^2 R^3 (1+\alpha)},$$

wo die Einheit für P der Tag, die für R die große Halbachse der relativen Bahn ist, und wo $\alpha = \frac{\mu}{m_1}$ das Verhältnis der Masse μ des Begleiters zu der m_1 des Hauptsternes bedeutet. Wir haben also $P = 9900^d$ und $R = \frac{1}{22.6}$ zu setzen und finden

$$\rho = \frac{1.6 \cdot 10^{-6}}{1+\alpha}.$$

Da α positiv ist, so ist ρ höchstens gleich $1.6 \cdot 10^{-6}$. Die mittlere Dichte des Hauptsternes ist also außerordentlich gering. Wir kennen aber noch einige andere Sterne, die enorm geringe Dichten haben, vor allen den β Lyrae-Stern W Crucis, bei dem die Dichte von derselben Größenordnung ist wie bei ε Aurigae. Die Sonne würde die Dichte $1.6 \cdot 10^{-6}$ haben, wenn ihr Radius auf das 85.5fache seines wirklichen Wertes ausgedehnt würde; der Sonnenradius würde dann ungefähr gleich der großen Halbachse der Merkurbahn sein.

Das Volumen des Begleiters hatte sich bei der oben gemachten Hypothese über seine Beschaffenheit zu 0.7 des Volumens des Hauptsternes ergeben. Man kann nun leicht unter verschiedenen Annahmen über α die Dichte des Begleiters berechnen. Da aber die erwähnte Hypothese nur eine ganz rohe Annäherung sein kann, so verzichte ich auf Zahlenangaben.

Das Massenverhältnis $\alpha = \frac{\mu}{m_1}$ läßt sich leider nicht ermitteln, da im Spektrum von ε Aurigae nur die Linien der einen Komponente sichtbar sind. Wir haben aber bei der Berechnung der elliptischen Bahnelemente gefunden, daß

$$f_0 = \frac{\alpha^3}{(1+\alpha)^2} m_1 \sin^3 i_0 = 2.7$$

ist, in Einheiten der Sonnenmasse ausgedrückt; $\sin^3 i_0$ kann, da i_0 jedenfalls nicht sehr von 90° verschieden ist, gleich 1 gesetzt werden, und es ist daher

$$\frac{\alpha^3}{(1+\alpha)^2} m_1 = 2.7 .$$

Wir wissen, daß ε Aurigae ein Übergigant ist, und es ist daher keinesfalls anzunehmen, daß seine Masse m_1 kleiner als die Sonnenmasse ist. Für $m_1 = 1$ ergibt sich aus obiger Gleichung rund $\alpha = 4$. Es wird also $\alpha < 4$

[1] H. N. RUSSELL in Astrophysical Journal Bd. 36 S. 73 (1912).

sein; natürlich ist es an sich sehr unwahrscheinlich, daß der dunkle Begleiter eine größere Masse haben sollte als der Hauptstern, und wir können daher mit ziemlich großer Sicherheit sagen, daß sogar $\alpha < 1$ sein muß. Wir wollen nun unter verschiedenen Annahmen über α den Radius R des Hauptsternes, die Masse m_1 desselben und diejenige μ des Begleiters berechnen. Für R wählen wir den Sonnenradius $R_\odot$ als Einheit. Mit Hilfe des Ausdruckes für die Dichte finden wir leicht:

$$R = 119 \frac{1+\alpha}{\alpha} R_\odot .$$

In die Tabelle, in der die zu verschiedenen Werten von α gehörigen Werte von R, m_1 und μ gegeben werden, sollen nun gleich auch noch einige über das engere System von etwa 5 Monaten Periode leicht abzuleitende Daten aufgenommen werden. Es soll dabei die für das Zeitintervall II (1909—10) abgeleitete Bahn zugrunde gelegt werden. Die hier in Betracht kommenden Bahnelemente II lauten:

$$e = 0.58 \quad a \sin i = 8171000 \text{ km} = 11.7\, R_\odot$$

$$f = \frac{\beta^3}{(1+\beta)^2} m_1 \sin^3 i = 0.00094 .$$

Hierin ist $\beta = \frac{m_2}{m_1}$, wo m_2 die Masse der den Hauptstern in etwa 5 Monaten umlaufenden Komponente bedeutet.

Da nicht anzunehmen ist, daß die Bahnneigung des engeren Systems wesentlich von der des weiteren verschieden ist, so kann $i = i_0 = 90°$ gesetzt werden. Zu jedem Wert von m_1 gehört nun ein bestimmter Wert von β, der sich aus dem Zahlenwerte von f leicht berechnen läßt. Ist das Massenverhältnis β bekannt, so kann man mit Hilfe von $a = 11.7\, R_\odot$ die relative große Halbachse des engeren Systems $a + a' = a\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ berechnen. Die beiden Komponenten m_1 und m_2 werden sich dann im Periastron, da $e = 0.58$, bis auf $0.42\ (a + a')$ nähern. Alle diese Größen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

a	R	m_1	μ	β	m_2	$a + a'$	$0.42\ (a + a')$
0.1	1309 $R_\odot$	3270	327	0.0066	22	1785 $R_\odot$	750 $R_\odot$
0.3	515	170	51	0.018	3.1	662	278
0.5	357	49	25	0.027	1.3	445	187
0.7	289	23	16	0.035	0.8	346	145
1.0	238	11	11	0.045	0.50	272	114
1.5	199	5.0	7.5	0.06	0.30	207	87
2.0	178	3.0	6.0	0.07	0.21	179	75
4.0	149	1.1	4.4	0.10	0.11	129	54

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß der Radius des Hauptsternes jedenfalls sehr groß ist. Zum Vergleich sei daran erinnert, daß nach Interferometermessungen auf dem Mt.-Wilson-Observatorium der Radius von α Orionis

gleich ungefähr 280 $R_\odot$ ist. Es wäre vielleicht der Versuch interessant, den Durchmesser von ε Aurigae gleichfalls mit dem Interferometer zu messen, wenngleich die Parallaxe dieses Sternes wahrscheinlich bedeutend kleiner als die von α Orionis und so die Aussicht auf Erfolg geringer ist.

Für $\alpha = 0.1$ ergeben sich nach der Tabelle schon Massenwerte, die wohl unmöglich sind. Wahrscheinlich dürfte α zwischen 0.3 und 1.0 liegen.

Wir wenden uns nun der Betrachtung des engeren, aus m_1 und m_2 gebildeten Systems zu. Das Massenverhältnis $\beta = \frac{m_2}{m_1}$ ist jedenfalls sehr klein, und die relative Bahn von m_2 um m_1 wird daher ziemlich groß. Aus der letzten Kolumne der Tabelle ersehen wir aber, daß trotzdem infolge der Größe des Hauptsternes der Begleiter im Periastron tief in den Hauptstern eintauchen müßte. Wenn nun auch die äußeren Schichten desselben von einer sehr geringen Dichte sein werden (die mittlere Dichte war von der Größenordnung 10^{-6}), so scheint mir so etwas doch schwer vorstellbar zu sein. Es ist also wohl anzunehmen, daß die veränderlichen Linienverschiebungen von fünfmonatlicher Periode gar nicht durch eine Bahnbewegung zustandekommen, wie wir bisher angenommen haben, sondern irgendeiner andern Ursache zuzuschreiben sind.

Gegen diese Schlußfolgerung ist nun allerdings einzuwenden, daß wir oben rein formal so gerechnet haben, als ob die Bewegungen in dem engeren System und die in dem weiteren (mit der Periode von 27 Jahren) ganz unabhängig von einander vor sich gingen. Das kann natürlich nicht der Wirklichkeit entsprechen. Da aber jedenfalls m_2 im Verhältnis zu m_1 klein ist, so wird man zunächst die Störungen, die der Begleiter μ von 27 Jahren Umlaufszeit durch m_2 erfährt, vernachlässigen können. Nun ist nach den Elementen des weiteren Systems um die Zeit 1910.0, für die die Elemente des engeren Systems gelten, μ von m_1 etwa 29.5 R entfernt. Selbst unter der ganz extremen Annahme $\alpha = 4.0$ wird daher die Anziehung, die μ auf m_2 ausübt, nur ein sehr kleiner Bruchteil von der Anziehung des Hauptkörpers m_1 auf m_2 sein (etwa 0.004). Obwohl auch diese Überschlagsbetrachtung nicht streng ist, so scheint es danach doch, als ob die obige rein formale Rechnung wenigstens angenähert richtig sein muß.

Wir sahen, daß die Elemente des engeren Systems sich sehr rasch und sehr stark ändern. Da sich μ nun sehr langsam, nämlich in 27 Jahren, um m_1 bewegt, so dürfte es ganz unmöglich sein, diese Änderungen durch Störungen, die durch die Masse μ bewirkt werden, zu erklären. Nach allem scheint der oben gezogene Schluß, daß die veränderlichen Linienverschiebungen kurzer Periode im Spektrum von ε Aurigae nicht durch den Umlauf eines Begleiters zustande kommen, berechtigt zu sein.

Nun könnte man vielleicht noch an die Möglichkeit denken, daß nicht die Masse m_1, sondern μ einen kurzperiodischen Begleiter hat, und daß dadurch die kurzperiodischen Schwankungen der Radialgeschwindigkeit des Hauptsternes hervorgerufen werden. Aber auch diese Hypothese dürfte nicht ausreichend sein, denn auch sie vermag wohl nicht, die raschen und großen Änderungen der Bahnelemente des Hauptsterns zu erklären.

Wir werden es also als sehr wahrscheinlich ansehen müssen, daß die kurzperiodischen Linienverschiebungen im Spektrum des c-Sternes ε Aurigae nicht als Radialgeschwindigkeiten zu deuten sind, sondern eine unbekannte Ursache haben. Es ist nun interessant, die übrigen spektroskopischen Doppelsterne, die c-Charakter haben, und über die schon nähere Untersuchungen angestellt sind, in den Kreis der Betrachtungen zu ziehen. Es sind dies ο Andromedae, β Lyrae, β Orionis, μ und υ Sagittarii. (Von o^2 Canis majoris, dessen Bahnelemente erst ganz genähert bekannt sind[1], sehe ich hier ab.) Über die genannten 5 Sterne ist folgendes zu bemerken:

1. ο Andromedae. Harper in Ottawa hat 50 Spektogramme dieses Sternes vermessen[2], hat aber keine Periode für die Änderungen der Radialgeschwindigkeit finden können, ein Umstand, der ziemlich merkwürdig ist.
2. β Lyrae. Das Spektrum ist außerordentlich kompliziert, und es kann hier nicht auf die Erscheinungen, die es bietet, eingegangen werden. Einen Beitrag zu der hier erörterten Frage liefert dieser Stern nicht[3].
3. β Orionis. Nach J. S. Plaskett[4] ist die Amplitude der Radialgeschwindigkeiten bei diesem Stern stark veränderlich. Es dürfte kaum möglich sein, diese Tatsache durch Annahme eines dritten Körpers in diesem System zu erklären.
4. μ Sagittarii. Die Bahn ist von Ichinohe[5] und neuerdings auf Grund desselben Plattenmaterials von Kohl[6] bestimmt worden. Zwar weichen 2 Platten sehr stark von der Ephemeride ab, doch scheinen hierfür äußere Gründe vorzuliegen.
5. υ Sagittarii. Die Bahnelemente sind von R. E. Wilson[7] bestimmt worden. Die Beobachtungen werden auffallend schlecht durch die Rechnung dargestellt, und Wilson vermutet daher, daß die Elemente veränderlich seien. Nun hat Miss Maury[8] vor kurzem eine wichtige Notiz über den Stern veröffentlicht. Danach gehört das Spektrum der Klasse cF 2 an, hat aber außer den dieser Spektralklasse eigentümlichen Linien auch solche des Heliums. Zu den Zeiten, wo der Stern die größte positive Radialgeschwindigkeit besitzt, sind auch Linien des Spektrums des Begleiters sichtbar, und zwar beträgt die relative Radialgeschwindigkeit beider Komponenten 280 km. Auch Miss Maury vermutet »irregularity in the star's motion«. Übrigens sind auch Emissionslinien in dem Spektrum vorhanden.

---

[1] Lick Obs. Bulletin Nr. 181.
[2] Report of the Chief Astronomer for the year ending March 31, 1911. S. 185.
[3] Vergl. R. H. Curtiss in Publ. of the Allegheny Observatory, Vol. II, Nr. 11.
[4] Astrophysical Journal 30 S. 26 (1909) und Report of the Chief Astronomer for the year ending March 31, 1909, S. 214.
[5] Astrophysical Journal 26 S. 157 (1907).
[6] Astr. Nachr. 219 S. 213 (1923).
[7] Lick Observatory Bulletin Nr. 267.
[8] Popular Astronomy 29 S. 636 (1921). In der Überschrift des Artikels von Miss Maury steht fälschlich υ Centauri statt υ Sagittarii.

Aus der Angabe der relativen Radialgeschwindigkeit kann man nun unter Hinzuziehung der WILSONschen Bahnelemente die Massen von υ Sagittarii berechnen. Da dies bisher noch nicht geschehen ist, so soll es hier nachgeholt werden.

Nach WILSON ist die größte positive Radialgeschwindigkeit +60 km, oder, da die Radialgeschwindigkeit des Schwerpunktes $\gamma = +12$ km ist, die größte positive radiale Bahngeschwindigkeit +48 km. Die entsprechende relative Bahngeschwindigkeit beider Komponenten ist 280 km, also ist $\alpha = \frac{m_2}{m_1} = \frac{48}{232}$.

Ferner ist nach WILSON

$$\frac{\alpha^3}{(1+\alpha)^2} m_1 \sin^3 i = 1.582 .$$

Hieraus folgt

$$m_1 \sin^3 i = 260$$
$$m_2 \sin^3 i = 54 .$$

i ist unbekannt, doch können wir aussagen, daß die Gesamtmasse des Systems mindestens 314 Sonnenmassen ist, vorausgesetzt, daß Miss MAURYS Angabe über die relative Radialgeschwindigkeit beider Komponenten richtig ist, was zu bezweifeln kein Grund vorliegt.

Die Masse des Systems υ Sagittarii ist die größte, die man bisher für ein Doppelsternsystem gefunden hat. Die nächstgrößte ist die des Sternes B. D. +6°1309, die nach J. S. PLASKETT[1] $139 \sin^{-3} i$ Sonnenmassen beträgt.

Die obigen Ausführungen zeigen, daß bei 4 von 6 spektroskopisch doppelten c-Sternen, nämlich bei ε Aurigae, ο Andromedae, β Orionis und υ Sagittarii, sich die Radialgeschwindigkeiten nicht durch eine einfache elliptische Bahnbewegung darstellen lassen, oder daß wenigstens Anzeichen für ein solches Verhalten vorhanden sind. (Vielleicht kann man diesen Fällen auch noch den von α Cygni anreihen. Ich habe eine größere Zahl von Spektrogrammen dieses Sternes vermessen, ohne eine Periode für die Änderungen der Radialgeschwindigkeit finden zu können; doch ist die Ungenauigkeit meiner Beobachtungen im Verhältnis zu der kleinen Amplitude der Radialgeschwindigkeiten zu groß, als daß ich die Frage definitiv entscheiden könnte.) Auch bei den mit den c-Sternen verwandten ac-Sternen kommt dergleichen häufig vor, so bei δ Canis majoris[2], β Doradus[3] und dem jedenfalls mit dem ac-Typus verwandten Sterne β Coronae borealis[4]. Besonders aber zeigen die veränderlichen Sterne der δ Cephei-Klasse, die bekanntlich ac-Spektra besitzen, in bezug auf ihre Radialgeschwindigkeiten große Eigentümlichkeiten, die ich in einer früheren Arbeit[5] ausführlich diskutiert habe. Die dort vermuteten Änderungen der Geschwindigkeitskurven sind für γ Sagittarii und RT Aurigae durch neuere Beobachtungen von DUNCAN[6] und KIESS[7]

---

[1] Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 82 S. 447 (1922).
[2] LICKS Obs. Publications 9 S. 142.
[3] Popular Astronomy 29 S. 84 (1921).
[4] Publications of the Dominion Obs., Ottawa, **1**, S. 375.
[5] Astronomische Nachrichten 203, S. 361 (1916).
[6] Astrophysical Journal 56 S. 340 (1922).
[7] Publications of the Astr. Obs. of the Univ. of Michigan, 3, S. 131.

bestätigt worden. Schließlich möchte ich noch darauf hinweisen, daß auch bei den roten Übergiganten α Orionis und α Scorpii, die wohl mit den c-Sternen ebenfalls einige Verwandtschaft besitzen, Anzeichen dafür vorhanden sind, daß wir es bei ihnen nicht mit einfacher elliptischer Bahnbewegung zu tun haben[1].

Wir haben also bei den c-, den ac- und den ihnen verwandten Sternen eine Häufung von solchen Fällen, und es ist wohl in hohem Grade unwahrscheinlich, daß es sich hier überall oder auch nur meist um Dreikörpersysteme handeln sollte. Es scheint vielmehr, daß, wie wir es bei ε Aurigae wahrscheinlich machen konnten, bei diesen Sternen, die wohl sämtlich von äußerst geringer Dichte sind, andere, noch unbekannte Ursachen scheinbare Änderungen der Radialgeschwindigkeiten hervorbringen, die uns dann Abweichungen von der elliptischen Bahnbewegung vortäuschen. Diese Vermutung ist für die δ Cephei-Sterne keineswegs neu, hat man doch bei ihnen überhaupt die gesamten Änderungen der Radialgeschwindigkeit durch Pulsationen erklären wollen.

Der einzige c-Stern, bei dem wir Genaueres über die Masse aussagen können, ist υ Sagittarii, für den sich eine enorm große Mindestmasse ergeben hat. Wir werden daraus wohl schließen dürfen, daß auch die übrigen c-Sterne große Massen haben. Für ε Aurigae kann man dies auch auf Grund der Tabelle auf S. 64 vermuten, denn kleine Werte von α sind plausibler als große. Bei den übrigen c-Sternen können wir, soweit ihre Bahnen als spektroskopische Doppelsterne bestimmt sind, nur die Größe

$$f = \frac{\alpha^3}{(1+\alpha)^2} m_1 \sin^3 i$$

angeben. Es haben sich dafür folgende Werte ergeben (ε Aurigae und υ Sagittarii sind mit angeführt), denen ich die für ac-Sterne gefundenen hinzufüge, soweit es sich nicht um δ Cephei-Veränderliche handelt:

1. c-Sterne.

Stern	Spektrum	f	Stern	Spektrum	f
ε Aurigae (weiteres System)	F 5	2.7	ε Aurigae (engeres System)	F 5	0.00094 bis 0.0066
β Lyrae	B 8 p	8.4	o^2 Canis maj.	B 5	0.0003
μ Sagittarii	B 8	4.0	β Orionis	B 8	0.0001
υ »	F 2 p	1.6			

2. ac-Sterne.

Stern	Spektrum	f	Stern	Spektrum	f
o Leonis	F 5 p	0.24	δ Canis maj.	F 8	0.0001
			β Coronae bor.	F o p	0.0001
			β Doradus	F 5	0.0037

Die δ Cephei-Veränderlichen haben, wie bekannt, gleichfalls außerordentlich kleine f-Werte.

[1] Astrophysical Journal 44 S. 250 (1916).

Wie man sieht, zerfallen die c-Sterne deutlich in 2 Gruppen; die Sterne der ersten Gruppe haben extrem große f-Werte, wie sie sonst höchstens bei den Spektralklassen Oe und B0 bis B3 vorkommen, die der zweiten Gruppe dagegen extrem kleine f-Werte. Bei der ersten Gruppe muß man entweder beträchtliche Massen oder sehr große Werte von α annehmen (letzteres ist unwahrscheinlich), bei der zweiten, um zu plausiblen Werten der Masse zu kommen, sehr kleine Werte von α oder von $\sin^3 i$. Wir sahen nun aber bei ε Aurigae, daß die Bewegungen in dem engeren System, aus denen die kleinen f-Werte folgen, höchstwahrscheinlich nur durch Linienverschiebungen von unbekannter Ursache vorgetäuscht werden, und bei β Orionis scheint die Sache ähnlich zu liegen. Meiner Ansicht nach dürften daher allgemein extrem kleine f-Werte bei c-Sternen nicht auf wirklicher Bahnbewegung beruhen (sie verlieren dann natürlich ihren physikalischen Sinn), während die großen f-Werte sich durch große Massen erklären, die eine Bahnbewegung erfahren.

Es liegt nun nahe, den bezüglich der kleinen f-Werte gezogenen Schluß auf die ac-Sterne auszudehnen, die mit Ausnahme von ο Leonis alle sehr kleine f-Werte besitzen (die δ Cephei-Veränderlichen sind in die Tabelle nicht aufgenommen). Dafür sprechen die Abweichungen von der einfachen elliptischen Bahnbewegung, die diese Sterne in vielen Fällen zeigen. Man gelangt so wiederum zu der Ansicht, daß es sich bei den δ Cephei-Veränderlichen nicht um spektroskopische Doppelsterne handelt, sondern daß man die Änderungen ihrer Radialgeschwindigkeiten auf andere Weise erklären muß.

Eine Ausnahmestellung unter den ac-Sternen nimmt mit $f = 0.24$ ο Leonis ein. Bei diesem Stern sind die Spektren beider Komponenten sichtbar, und zwar hat die zweite Komponente ein A-Spektrum. Es hat sich $m_1 \sin^3 i = 1.3$, $m_2 \sin^3 i = 1.1$ ergeben, also durchaus normale Werte. Immerhin wäre es möglich, daß i klein ist, so daß die Massen selbst doch erheblich wären. Übrigens ist bemerkenswert, daß im DRAPER-Katalog diesem Stern nicht der ac-Charakter beigelegt ist.

Bei den letzten Betrachtungen über die c- und ac-Sterne ist nicht zu vergessen, daß das zur Verfügung stehende Beobachtungsmaterial zum Teil erst recht gering ist, und daß die daraus gezogenen Schlüsse natürlich noch unsicher sind.

Über den Einfluß des Alters der Keimzellen. I.

Dritte Fortsetzung der Versuche zur experimentellen Verschiebung des Geschlechtsverhältnisses.

Von C. Correns.

(Vorgelegt am 28. Februar 1924 [s. oben S. 29].)

Angeregt durch die bekannte Hypothese Thurys (nach der die frühzeitig befruchteten Eier Weibchen, die älteren Männchen liefern), hat meines Wissens zuerst H. Hofmann seit 1864 entsprechende Versuche mit Blütenpflanzen angestellt und darüber 1871 berichtet.

Die ersten 6 Versuchspaare von *Mercurialis annua* gaben für alte Eizellen stets einen Vorteil der Weibchen, das letzte Versuchspaar, das Hofmann für besonders wichtig hält, hatte dagegen gerade das umgekehrte Resultat. Alter Pollen »aus dem September des Vorjahres« gab ebenfalls mehr Weibchen als junger. In Tabelle 1 sind die Zahlen zusammengestellt; man sieht, daß die meisten klein oder sehr klein sind. Der Pollen stammte wohl nicht immer beim selben Versuchspaar vom selben Männchen; die »Weibchen« waren zum Teil nicht rein weiblich, sondern nur subgynoezisch.

Tabelle 1.

Versuche H. Hofmanns mit *Mercurialis annua*.

Jahr der Versuche	I. frühe Bestäubung				II. späte Bestäubung				Differ. der Prozente I—II
	Ges.-Zahl	♀	♂	Proz. ♂	Ges.-Zahl	♀	♂	Proz. ♂	
1864	183	145	38	**20.8**	74	70	4	**5.4**	**+15.4**
»	24	10	14	**58.3**	15	12	3	**20.0**	**+38.3**
1866	550			***20.5**	241			***16.4**	**+ 4.1**
Pollen frisch	371			***22.9**	145			***18.6**	**+ 4.3**
Pollen alt	179			***18.4**	96			***14.6**	**+ 3.8**
1867	60	34	26	**43.3**	116	57	59	**50.9**	**— 7.6**

* Diese Prozentzahlen sind aus den Verhältniszahlen 100 ♂ : x ♀ berechnet, die Hofmann hier allein angibt.

Wichtiger für uns sind Hofmanns Versuche mit *Melandrium*. Hier wurden nur junge und alte Blüten bestäubt, also verschieden alte Eizellen geprüft; mit jungem und altem Pollen hat er nicht experimentiert. Die Ergebnisse sind in der kleinen Tabelle 2 zusammengestellt; jedes umfaßt mehrere (4 bis 10) Einzelversuche.

Tabelle 2.

Versuche H. HOFMANNS mit *Melandrium*.

Jahr der Versuche	I. frühe Bestäubung				II. späte Bestäubung				Differ. der Prozente I—II
	Ges.-Zahl	♀	♂	Proz. ♂	Ges.-Zahl	♀	♂	Proz. ♂	
1868	50	28	22	**44**	177	79	98	**55**	**— 11**
1869	714	384	330	**46.2**	714	415	299	**41.9**	**+ 4.3**
Zus. ...	764	412	352	**46.1**	891	494	397	**44.6**	**+ 1.5**
	m = ± 1.80				m = ± 1.67				

Die beiden Versuchsreihen gaben also widersprechende Resultate, zusammengenommen eine geringe Zunahme der Weibchen mit dem Altern der Eizellen. Die Differenz ist aber geringer als der mittlere Fehler der einzelnen Versuche. (HOFMANN selbst hatte in beiden Versuchsreihen eine starke Zunahme der Weibchen herausgerechnet, dadurch, daß er hier, wie auch sonst immer, irrtümlich den Mittelwert aus den Verhältniszahlen [x Weibchen zu 100 Männchen] für die einzelnen Versuche bildete. HEYER hat das bereits [1884, S. 22] richtiggestellt.)

Die Herkunft des Pollens wird nicht angegeben. Da die zu den Versuchen verwendeten Weibchen und Männchen weiße Blüten hatten, bei den Sämlingen aber alle Schattierungen von Weiß über Blaßrosa bis zu intensivem Purpur auftraten, war wohl auch die Isolierung ungenügend gewesen. Ich wenigstens habe nie, auch nicht bei Verwendung weißblühender, aus dem Bastard *Melandrium album* + *rubrum* abgespaltener Pflanzen, rotblühende erhalten, was an sich ja möglich wäre.

Auf die Versuche mit *Spinacia oleracea* legt HOFMANN selbst kein großes Gewicht: Frühe Bestäubung gab 95 Pflanzen, davon 63 (66 Prozent) Männchen, 26 (27 Prozent) reine Weibchen und 6 (6 Prozent) Weibchen mit männlichen Blüten (»subfoemineae«), späte Bestäubung 90 Pflanzen, davon 56 (62 Prozent) Männchen, 27 (30 Prozent) reine Weibchen und 7 (7.8 Prozent) Weibchen mit männlichen Blüten. Die Zahlen sind zu klein, und die spät bestäubten Weibchen hatten wohl schon zum Teil mit Pollen aus eigenen einzelnen männlichen Blüten angesetzt. Auch *Rumex Acetosella* gab kein sicheres Resultat: Frühe Bestäubung 131 Pflanzen, davon 60 (45.8 Prozent) männlich, und späte Bestäubung 223 Pflanzen, darunter 111 (49.8 Prozent) männlich. Die Individuenzahl ist viel zu klein, als daß die Differenz von 4 Prozent sichergestellt wäre.

Die späteren Mitteilungen HOFMANNS (1881, 1885) enthalten keine neuen einschlägigen Tatsachen.

Die Versuche STRASBURGERS (1900, S. 762) mit *Melandrium* führten auch zu keinem sicheren Ergebnis. Bei dem ersten wurde der Pollen sehr jung — aus noch geschlossenen Antheren — auf die Narben junger und alter Blüten gebracht. Angaben über die Einzelergebnisse fehlen; insgesamt wurden 289 Weibchen und 221 (43.3 Prozent) Männchen erhalten. Die erste Kapsel, hervorgegangen aus der Bestäubung einer älteren Blüte, gab 22 Weibchen und

1 Männchen. Bei den zwei weiteren Versuchen brachte 7 Tage alter Pollen unter 116 Nachkommen 48 (41 Prozent) Männchen und 13 Tage alter unter 107 Nachkommen 50 (47 Prozent) Männchen hervor. Die Zahlen sind natürlich zu klein, um beweisend zu sein.

Endlich muß noch einer Veröffentlichung Th. Ciesielskis gedacht werden (1911), dessen Versuche bis 1877 und weiter zurückliegen und mit *Cannabis sativa* angestellt worden sind. Zahlen werden nur für einen gegeben: Drei zusammen isolierte Weibchen wurden mit dem Pinsel mit ganz frischem Pollen bestäubt (polline, quem collegi ex antheris jamjam primum dehiscentibus sed nondum apertis), drei andere mit älterem Pollen (polline sumpto quidem mane, reservato tamen in charta ad tempus pomeridianum). Die ersten gaben 120 Früchte und 112 Pflanzen, davon waren 6 Weibchen, der Rest (95 Prozent) Männchen; die anderen brachten 96 Früchte und 89 Pflanzen, die alle weiblich waren. 1877 gaben Weibchen, die bei Sonnenaufgang bestäubt worden waren, 85.5 Prozent Männchen, solche, bei denen der Pollen nahe dem Sonnenuntergang aufgetragen worden war, nur 8 Prozent Männchen (die Gesamtzahlen fehlen). Die weiblichen Versuchspflanzen waren an möglichst weit auseinanderliegenden Stellen eines großen Gartens isoliert und in diesem Fall durch Schütteln sorgfältig abgeschnittener Männchen bestäubt worden.

Ciesielski hat die Versuche später mehrmals wiederholt und immer ein ähnliches Resultat erhalten. Er schließt daraus, daß frischer Pollen zur Hervorbringung männlicher Samen tauge, älterer dagegen zu der von weiblichen.

Fl. Lilienfeld hat diese Versuche mit allen Vorsichtsmaßregeln und in sehr viel größerem Umfange wiederholt (1921), sie aber nicht im geringsten bestätigen können. Im Gegenteil erhielt sie eine Zunahme der Männchen, wenn sie Pollen verwendete, der über 30 Stunden alt war, nämlich 42.57 Prozent, statt 37.77 bei Bestäubung mit ganz frischen Pollen, und 38.55 Prozent bei solcher mit 12 Stunden altem Pollen. Die Differenz von 4.80 Prozent ist etwa doppelt so groß als ihr mittlerer Fehler (2.25 Prozent). Sie ist also nicht sichergestellt, aber nach meinen Versuchen bei *Melandrium* wohl nicht zufällig.

Über diese eigenen Versuche habe ich vorläufig 1918 (S. 1198) in diesen Berichten und vor allem 1921 a in der »Hereditas« referiert. Sie haben einen sehr deutlichen Einfluß des Alters des Pollens auf das Geschlechtsverhältnis der Nachkommen ergeben: Je älter er wird, desto mehr Männchen bringt er hervor. Das Alter der Eizellen blieb dagegen ohne erkennbare Wirkung. Im folgenden sollen nun die Belege für diese Angaben und weitere, seitdem ausgeführte Untersuchungen mitgeteilt werden, soweit sie den Einfluß des Alters, sowohl bei Eizellen als bei Pollenkörnern, betreffen.

Strasburger hatte seinerzeit (1900, S. 762) darauf aufmerksam gemacht, daß ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Alternlassen der Eizelle und dem des Pollenkorns vorhanden sei. Im Pollenkorn altere der generative Kern, nicht die der Eizelle gleichzusetzenden Spermakerne, die erst kurz vor der Befruchtung im Pollenschlauch gebildet würden. Ich habe mich dem angeschlossen (1921 a, S. 17), dabei aber übersehen, daß sich die generative Zelle gerade bei *Melandrium* so früh teilt, daß das reife Pollenkorn schon die 3 Kerne,

den vegetativen und die 2 generativen, enthält, wie STRASBURGER selbst später (1910, S. 456 u. Taf. IX, Fig. 14—16) beschreibt und abbildet. Bei unserer Versuchspflanze kann also das Alter der Eizelle direkt mit dem des Pollenkornes verglichen werden.

I. Junge und alte Eizellen.

Die ersten Versuche wurden 1917 und 1918 mit fünf Weibchen ausgeführt: 41 B, 57 B, 64 B, 66 A und 67 A. Die beiden letzten waren Schwestern. Für jedes Weibchen wurde natürlich stets der Pollen eines Männchens benutzt, und zwar ganz frisch. Mittags zwischen 12 und 1 Uhr entnahm ich die Antheren aus Blüten, die sich abends zum erstenmal geöffnet hätten, und verteilte sie, noch geschlossen, in Petrischalen, in denen sie im Lauf des Nachmittags aufsprangen. Abends wurden sie verwendet. Das Alter der weiblichen Blüten wurde nach dem Aussehen bestimmt; junge und alte lassen sich an den Blumenblättern und vor allem an den Griffeln leicht unterscheiden. Eben sich öffnende Blüten können schon mit Erfolg bestäubt werden; sobald die Blumenblätter deutlich welk geworden sind, setzen die Blüten nicht mehr an.

Die Versuche sollten zum Teil auch der Entscheidung anderer Fragen dienen, so, ob die Pollenmenge von Einfluß sei, oder ob die Belegung der Griffelspitze und des Griffelgrundes ein verschiedenes Zahlenverhältnis der Geschlechter gebe (1921 b, S. 349). Es wurde aber immer Sorge getragen, daß ungefähr gleich viel junge und alte Blüten mit annähernd gleich viel Pollen in der gleichen Weise an ein und demselben Tage bestäubt wurden.

Ein Teil der Ernte wurde 1919, ein anderer 1921 ausgesät. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengestellt. Dabei wurden die einzelnen Versuche so weit als möglich zusammengefaßt. Ihre Zahl ist gewöhnlich doppelt so groß als die der Kapseln, weil die Samen des oberen und unteren Teiles getrennt ausgesät worden waren (1918, S. 1188 u. 1921 b, S. 337), selten kleiner, wenn der Inhalt mehrerer Kapseln unter der gleichen Nummer zusammengezogen worden war (nach Bestäubung mit sehr wenig Pollen).

Faßt man alle fünf Weibchen zusammen, so haben die jungen Eizellen 41.74 ± 0.55 Prozent Männchen gegeben, die alten 42.04 ± 0.52 Prozent. Die Differenz ist sehr klein, = 0.30 Prozent; ihr mittlerer Fehler, ± 0.756, ist mehr als doppelt so groß. Sie ist folglich ganz unsicher. Die alten Eizellen haben also so viel Männchen und Weibchen gegeben als die jungen; das Alter der Eizellen hatte auf das Zahlenverhältnis der Geschlechter keinen nachweisbaren Einfluß.

Die einzelnen Weibchen haben sich etwas verschieden verhalten. Bei zweien, den beiden Schwestern 66 A und 67 A, haben die alten Eizellen einen geringen Überschuß an Männchen gegeben, bei dreien, 41 B, 57 B und 64 B, einen ebenfalls geringen an Weibchen. In allen Fällen bleibt die Differenz gegenüber dem Ergebnis mit jungen Eizellen unter dem dreifachen mittleren wahrscheinlichen Fehler; keine ist also sichergestellt. Trotzdem erwecken die Zahlen den Eindruck, als ob nicht alles reine Zufallsache wäre, z. B. wenn bei dem Weibchen 66 A vier von den fünf Teilergebnissen eine Differenz zu-

Tabelle 3.

		I. Eizellen jung					II. Eizellen alt					Differenz II—I
	Versuche	Kapseln	Samen	Pflanzen	♂	Proz. ♂	Versuche	Kapseln	Samen	Pflanzen	♂	Proz. ♂	
♀ 66 A 1918 Spitze	*1919*												
	551—60	5	1783	1329	577	**43.42**	561—70	5	1841	1434	618	**43.10**	**— 0.32**
							719—22	2	791	382	175	**45.81**	**+ 2.39**
♀ 66 A 1918 Grund	*1919*												
	571—80	5	1658	1116[1]	489	**43.82**	581—90	5	1757	1306[1]	609	**46.63**	**+ 2.81**
	723—30	4	1364	583	254	**43.57**	731—38	4	1458	586	266	**45.39**	**+ 1.82**
	1921												
	1122—32	6	1597	527[2]	220	**41.75**	1133—44	6	2439	1056	461	**43.66**	**+ 1.91**
	Zus.	20	6402	3555[3]	1540	**42.32**	Zus.	22	8286	4764[1]	2129	**44.69**	**+ 2.37**
	Mittel		**320**	**178**		**± 0.82**	Mittel		**376**	**216**		**± 0.72**	
	Differenz II—I = + 2.37 ± 1.092												
♀ 67 A 1918 1917 Gr. Sp.	*1921*												
	1096—99	4	658	390[3]	117	**30.00**	1100—03	4	763	397	166	41.81	**+ 11.81**
	1173—80	4	696	294[3]	97	**32.99**	1181—88	4	1023	297	77	**25.93**	**— 7.06**
	1189—96	4	882	290[3]	107	**36.90**	1197—04	4	820	360	124	**34.44**	**— 2.46**
	Zus.	12	2236	974[9]	321	**32.95**	Zus.	12	2606	1054	367	**34.82**	**+ 1.87**
	Mittel		**186**	**81**		**± 1.506**	Mittel		**217**	**88**		**± 1.467**	
	Differenz II—I = + 1.87 ± 2.078												
♀ 64 A 1918 Gr. Sp.	*1921*												
	1145—50	3	804	431	161	**37.44**	1151—56	3	730	365[1]	150	**41.10**	**+ 3.66**
	1157—64	4	845	513	240	**46.78**	1165—72	4	829	518	211	**40.73**	**— 6.05**
	Zus.	7	1649	944	401	**42.48**	Zus.	7	1559	883[1]	361	**40.88**	**— 1.60**
	Mittel		**236**	**135**		**± 1.608**	Mittel		**223**	**126**		**± 1.600**	
	Differenz II—I = — 1.60 ± 2.269												
♀ 57 B 1917	*1921*												
	1086—88	3	481	295	127	**43.05**	1085	2	212	146	54	**36.99**	**— 6.06**
	1092—95	4	686	436	179	**41.06**	1089—91	3	574	368	134	**36.41**	**— 4.55**
	Zus.	7	1167	731	306	**— 41.86**	Zus.	5	786	514	188	**36.58**	**— 5.28**
	Mittel		**167**	**104**		**± 1.824**	Mittel		**157**	**103**		**2.124**	
	Differenz II—I = — 5.28 ± 2.800												
♀ 41 B 1917	*1921*												
	s. wenig Pollen												
	1078—84	15	1517	640[1]	326	**50.94**	1075—77	10	622	238	120	**50.42**	**— 0.52**
	s. viel Pollen												
	1104—11	8	2496	1130[1]	434	**38.41**	1112—21	10	3413	1690[2]	679	**40.18**	**+ 1.77**
	Zus.	23	4013	1770[2]	760	**42.94**	Zus.	20	4035	1928[2]	799	**41.44**	**— 1.50**
	Mittel		**174**	**77**		**± 1.175**	Mittel		**202**	**96**		**± 1.122**	
	Differenz II—I = — 1.50 ± 1.634												
	Zusammen....	69	15467	7974[14]	3328	**41.74**	Zus.	66	17272	9143[4]	3844	**42.04**	**+ 0.30**
	Mittel....		**224**	**116**		± 0.552	Mittel		**262**	**139**		± 0.516	
				51.8 Prozent						53.1 Prozent			
	Differenz II—I = + 0.30 ± 0.756												

Die kleinen, als Exponenten gedruckten Zahlen geben die beobachteten Zwitter an.

gunsten der Männchen geben und das fünfte nur eine ganz geringfügige zugunsten der Weibchen. Schuld daran kann aber nicht das Alter der Eizellen sein, sondern es müssen andere, nicht festgestellte Einflüsse mitgespielt haben, die bei den verschiedenen Weibchen in verschiedener Richtung, beim selben aber gewöhnlich im gleichen Sinne wirkten.

Die Bestäubung der alten Eizellen gab an sich, auffallenderweise, kein schlechteres, sondern eher ein besseres Resultat als die der jungen.

Es lassen sich bei der Ernte gute, fragliche und taube Samen unterscheiden. Unter den tauben müssen wieder solche auffallen, die so groß oder nicht viel kleiner geworden sind als gute, aber beim Trocknen faltig einsanken, gewöhnlich so, daß sie etwa viereckig, fast quadratisch, und abgeplattet aussehen. Legt man sie in Wasser, so quellen sie auf und gleichen ganz den guten. Sie enthalten einen fast immer leicht nachweisbaren, mehr oder weniger weit entwickelten Embryo, sind aber nicht (oder nur ganz ausnahmsweise) keimfähig. Um einen kurzen Ausdruck für sie zu haben, wollen wir sie weiterhin »großtaub« nennen. Während sich nun, wie wir bald sehen werden, das Zahlenverhältnis der großtauben Samen zu den guten und fraglichen mit dem zunehmenden Alter der männlichen Keimzellen (eigentlich der Pollenkörner) in sehr auffallender Weise ändert, ist hiervon bei den Eizellen nichts zu merken. Als Tabelle 4 sind einige der Zählungen wiedergegeben.

Tabelle 4.

Junge Eizellen Samen					Alte Eizellen Samen					
n	gut u. fragl.	großtaub	Prozent	*m*	*n*	gut u. fragl.	großtaub	Prozent	*m*	
1810	1778	32	**1.77**	± 2.76	1848	1821	27	**1.46**	± 2.86	A
3129	3022	107	**3.41**	± 3.25	3211	3105	106	**3.30**	± 3.15	B
4939	4800	139	**2.81**	± 2.35	5059	4926	133	**2.63**	± 2.25	A+B

Man sieht, der Unterschied zwischen den beiden Ernten A und B, die von denselben Eltern stammen, aber von zwei Bestäubungen zu verschiedener Zeit, ist viel größer als der zwischen den Ernten von jungen und alten weiblichen Blüten.

Auch die durchschnittliche Zahl der guten Samen in jeder Kapsel (erhalten durch Division der Samenzahl durch die Zahl der Kapseln) ist für die Spätbestäubung nicht ungünstiger, sondern bei jedem Weibchen größer. Die Tabelle 3 enthält die entsprechenden Angaben (»Mittel«). Alle Versuche zusammengenommen, gaben die jungen Blüten 224 gute Samen auf die Kapsel, die alten 262. Der Durchschnittswert für alle zusammen ist 243; die Abweichung beträgt nach oben und unten 19 und kann nicht zufällig sein.

Auch die Zahl der Pflanzen, die es aus jeder Kapsel zum Blühen brachten, ist nach später Bestäubung gewöhnlich — bei vier Weibchen — größer und nur bei einem etwa ebenso groß. Auch diese Zahlen sind in die Tabelle 3 aufgenommen worden. Alle Weibchen zusammen gaben nach Spätbestäubung 139, nach Frühbestäubung 116 blühende Pflanzen. Das Verhältnis ist annähernd das gleiche wie jenes zwischen den guten Samen (262 : 224); die Samen aus Spätbestäubungen brachten nur wenig mehr blühende Stöcke hervor als die aus Frühbestäubungen, 53.1 Prozent statt 51.8 Prozent.

Voraussetzung für diesen Vergleich ist natürlich, daß für beiderlei Bestäubungen gleich viel Pollen verwendet wurde. Es gelang mir nicht, eine praktisch durchführbare, genaue Dosierung zu finden; doch wurde darauf gesehen, möglichst gleiche Mengen zu verwenden und die unvermeidlichen zufälligen, aber beträchtlichen Schwankungen durch eine größere Zahl Bestäubungen von beiderlei Art auszugleichen.

Das Ergebnis dieser ersten Versuche befriedigte mich noch nicht, und ich stellte deshalb 1921 neue an, bei denen besondere Sorgfalt darauf verwendet wurde, möglichst alte Blüten zu bestäuben. Als Weibchen wurden fünf Schwestern verwendet, 1163 B, C, D und 1164 B, C; den Pollen lieferten zwei ihrer Brüder, das Männchen 1163 A für 1163 C und 1164 C, das Männchen 1164 A für 1163 B, D und 1164 B. Jeden Abend wurden die sich eben öffnenden Blüten paarweise ausgesucht, womöglich sich gegenüberstehende desselben Dichasiums. Die eine jeden Paares sollte sofort, die andere erst nach einer bestimmten Zeit bestäubt werden. Die eine belegte ich deshalb gleich mit dem frischen Pollen einer Anthere, der im Schlunde gut verteilt wurde, und bezeichnete sie mit rotem oder weißem Faden, jenachdem 1163 A oder 1164 A den Blütenstaub geliefert hatte. Die andere markierte ich mit Wolle von einer bestimmten Farbe, die jeden Tag anders gewählt wurde, und an der das Datum der Markierung und damit das Alter der Blüte erkennbar waren. Ich begann mit dem Bestäuben, für das gleich viel und ganz frischer Pollen benutzt wurde, nach 5 Tagen, hatte aber auch nach $5^1/_2$, 6, $6^1/_2$ und selbst noch nach 7 Tagen Erfolg. Die Blüten ein und desselben Weibchens konnten sich, trotz gleichem Alter, etwas verschieden verhalten. Die Mehrzahl konnte noch ansetzen, während einzelne schon abfielen. Die belegten Blüten erhielten zu der schon vorhandenen Alters-Wollmarke eine zweite Marke, je nach dem Männchen aus rotem oder weißem Faden. Der Tag der ersten Markierung und der der Bestäubung wurden natürlich notiert. So war für jede geerntete Kapsel genau bekannt, wie alt die Blüte war, als sie bestäubt wurde.

Während dieser Zeit (ab 26. Juni) herrschte zunächst auffallend kühles Wetter; als dann wieder wärmere Tage kamen, blieben die Blüten immer weniger lang befruchtbar, und schließlich (am 6. Juli), war ich wieder bei 4 Tagen angekommen, der Altersgrenze, die schon Strasburger bei seinen Versuchen gefunden hatte. Es ist möglich, daß außer der Temperatur auch die Entwickelung der befruchteten Fruchtknoten korrelativ die Lebensdauer der neuen Blüten herabsetzte, denn schließlich waren einzelne Blüten schon am dritten Tage nicht mehr befruchtbar.

Der Zufall wollte, daß ich als Pollenlieferanten zwei Männchen gewählt hatte, deren Blütenstaub mit den Eizellen eines normalen Weibchens fast nur Weibchen hervorbrachte. Ich habe solche Männchen thelygon genannt (1922, S. 1050), möchte jetzt aber lieber thely**gen** verwenden[1]. Die Abstufungen

[1] Der altgebrauchte Ausdruck thelytok läßt sich, da τόκος ja die Geburt heißt, nur bei einem Weibchen anwenden, thelygen aber für beide Geschlechter. Dasselbe gilt natürlich auch für arrhenotok und arrhenogen.

Tabelle 5.

	I. Eizellen jung				II. Eizellen alt					Differenz II—I
	Versuch	Samen	Pflanzen	♂	Proz. ♂	Versuch	Samen	Pflanzen	♂	Proz. ♂	
♀ 1163B × ♂ 1164A	1513	261	209	3	**1.4**	1512	64	39	—	**0**	
	1515	271	171	1	**0.6**	1514	165	128	—	**0**	
	1517	224	73	—	**0**	1516	119	76	—	**0**	
						1553	131	76	3	**3.9**	
						1554	169	131	4	**3.1**	
	Zus. . .	756	453	4	**0.88**	Zus.	648	450	7	**1.56**	**+ 0.68**
	Mittel.	252	151	$m = \pm 0.44$		Mittel . .	130	90	$m = \pm 0.58$		
♀ 1163C × ♂ 1163A	1527	316	84	2	**2.4**	1526	187	56	1	**1.8**	
	1529	204	67	1	**1.5**	1528	97	26	—	**0**	
	1531	279	101	—	**0**	1530	137	39	—	**0**	
	1544	208	129	—	**0**	1543	125	73	1	**1.4**	
						1555	101	59	7	**11.9**	
						1556	112	66	5	**7.6**	
						1557	129	77	5	**6.5**	
						1558	130	97	1	**1.0**	
	Zus. . .	1007	381	3	**0.79**	Zus.	1018	495	20	**4.04**	**+ 3.25**
	Mittel.	252	95	$m = \pm 0.45$		Mittel . .	126	62	$m = \pm 0.89$		
♀ 1163D × ♂ 1164A	1519	307	184	8	**4.3**	1518	262	178[1]	1	**0.6**	
	1521	353	168	7	**4.1**	1520	232	147	3	**2.0**	
	1523	291	112	1	**0.9**	1522	137	61	1.6	**1.6**	
	1525	357	159	3?	**1.9?**	1524	159	64	3	**4.5**	
	1546	325	212	3	**1.6**	1545	105	48	—	**0**	
	1548	321	172	4	**2.3**	1547	178	95	2	**2.1**	
						1559	119	70	—	**0**	
						1560	167	138	3	**2.1**	
						1561	199	115	7	**6.1**	
						1562	199	136	5	**3.7**	
						1563	229	203	6	**3.0**	
	Zus. . .	1954	1007	23 + 3	**2.58**	Zus.	1986	1255	31	**2.47**	**− 0.09**
	Mittel.	326	168	$m = \pm 0.4996$		Mittel . .	180	114	$m = \pm 0.44$		
♀ 1164B × ♂ 1164A	1533	199	124	1	**0.8**	1532	102	72	2	**2.8**	
	1535	272	130	2	**1.5**	1534	124	99	—	**0**	
	1537	221	87	2	**2.3**	1536	112	79	3	**3.8**	
	1550	246	127	4	**3.1**	1549	161	100	1	**1.0**	
	1552	207	143	2	**1.4**	1551	129	58	2	**3.4**	
						1564	137	113	3	**2.7**	
						1565	140	97	7	**7.2**	
						1566	153	138	5	**3.6**	
						1567	172	136	1	**0.7**	
	Zus. . .	1145	611	11	**1.80**	Zus.	1230	893	24	**2.69**	**+ 0.89**
	Mittel.	229	122	$m = \pm 0.54$		Mittel . .	137	99	$m = \pm 0.54$		
♀ 1164C × ♂ 1163A	1540	300	79	11	**14.1**	1538	153	76	4	**5.3**	
	1542	298	92	8	**8.8**	1539	208	80	—	**0**	
						1541	189	99	7	**7.1**	
						1568	228	100	2	**2.0**	
	Zus. . .	598	171	19	**11.11**	Zus.	778	355	13	**3.66**	**− 7.45**
	Mittel.	299	86	$m = \pm 2.40$		Mittel . .	195	89	$m = \pm 0.997$		

gegen das normale Verhalten hin lassen sich durch Zusätze — stark, schwach usw. — bezeichnen. Das Gegenstück dazu, das arrhenogene Männchen, kommt bei *Melandrium* ebenfalls vor. Ich werde auf diese Verhältnisse später eingehen.

Von den geernteten Kapseln beiderlei Art, Frühbestäubungen und Spätbestäubungen, wurde 1922 so viel ausgesät, daß die Anzahl der guten Samen ungefähr gleich groß war. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Dabei werden diesmal die einzelnen Versuche, von denen jeder den Inhalt einer Kapsel umfaßt, getrennt aufgeführt, um die Schwankungen in der Prozentzahl der Männchen zu zeigen.

Es mußte auffallen, daß die jungen Blüten der beiden Weibchen 1163 C und 1164 C mit demselben Männchen 1163 A zwar sehr wenig, aber doch unter sich auffallend verschiedene Prozente Männchen gegeben hatten, das eine (Versuch 1527, 1529, 1531, 1544) 0.79, das andere (Versuch 1540, 1542) 11.11 Prozent. Um zu prüfen, ob das Zufall sei, wurde 1923 nochmals der Inhalt von je 14 Kapseln aus Frühbestäubungen ausgesät. Das Ergebnis ist in Tabelle 6 mitgeteilt. Der Unterschied zwischen den beiden Weibchen war demnach rein zufälliger Natur; die Differenz zwischen den Prozentzahlen für die Männchen (3.15 und 3.48) ist diesmal nur 0.33 Prozent und kleiner als ihr mittlerer wahrscheinlicher Fehler $m = \pm 0.478$.

Tabelle 6.

Eizellen jung										II—I
I ♀ 1163 C × ♂ 1163 A					II ♀ 1164 C × ♂ 1163 A					
Versuche	Samen	Pflanzen	♂	Proz. ♂	Versuche	Samen	Pflanzen	♂	Proz. ♂	
2782	147	130	3	**2.3**	2796	190	164	11	**6.7**	
2783	156	93	3	**3.3**	2797	209	130	13	**9.1**	
2784	158	182	9	**4.9**	2798	209	167	4	**2.4**	
2785	162	138	1	**0.6**	2799	216	214	—	**0**	
2786	167	139	8	**5.8**	2800	218	185	2	**1.1**	
2787	173	156	—	**0**	2801	220	170	—	**0**	
2788	177	130	5	**3.8**	2802	228	170	6	**3.5**	
2789	218	172	1	**0.6**	2803	287	220	7	**3.2**	
2790	250	201	8	**4.0**	2804	290	235	12	**5.1**	
2791	267	255	13	**5.9**	2805	296	231	9	**3.9**	
2792	279	241	7	**2.9**	2806	308	270	7	**2.6**	
2793	288	246	9	**3.7**	2807	312	267	5	**1.9**	
2794	290	263	11	**4.2**	2808	312	258	7	**2.7**	
2795	302	254	4	**1.6**	2809	360	324	22	**6.8**	
Zus. . . .	3034	2600	82	**3.15**	Zus. . . .	3655	3018	105	**3.48**	**+ 0.33**
Mittel . .	217	186			Mittel . .	261	216			

Differenz II—I = 0.33 ± 0.478

Das Ergebnis aus allen Versuchen von 1922 und 1923 läßt sich in folgender Weise zusammenfassen (Tabelle 7):

Tabelle 7.

Ei-zellen	Kap-seln	Samen	Samen pro Kapsel	Pflanzen	Pflanzen pro Kapsel	Pflanzen pro 100 Samen	*m*	♂	Proz. ♂	*m*
jung	48	12149	253	8241	172	67.8	± 0.18	251	**3.045**	± 0.19
alt	37	5660	153	3448	93	60.9	± 0.65	95	**2.755**	± 0.28

Differenz alt − jung = **− 0.290** ± 0.337

Die alten Eizellen haben diesmal etwas mehr Weibchen gegeben als die jungen; die Differenz von 0.290 Prozent ist aber geringer als ihr einfacher mittlerer Fehler, ± 0.337, und vollkommen unsicher. Sie ist so groß wie bei den ersten Versuchen (Tabelle 3, 0.30 Prozent), hat aber das entgegengesetzte Vorzeichen. Beide heben sich also gegenseitig auf.

Die einzelnen Weibchen der zweiten Versuche verhielten sich kaum verschieden. Bei 1163D betrug die Differenz nur 0.09 Prozent, bei 1163B und 1164B blieb sie unter einem Prozent, und auch bei 1163C und 1164C ist sie unbeträchtlich, wenn man die Ergebnisse der Tabelle 6 berücksichtigt.

Die zweiten Versuche haben also das Ergebnis der ersten bestätigt: Auch wenn der Unterschied im Alter der Eizellen so groß als irgend möglich gewählt wird, ist bei den Nachkommen im Zahlenverhältnis der Geschlechter kein Unterschied vorhanden.

Sehr auffallend ist bei diesen zweiten Versuchen der Unterschied zwischen dem Ansatz nach Früh- und Spätbestäubung: Die alten Blüten gaben, genau gleich behandelt, viel weniger Samen als die jungen, im Durchschnitt auf die Kapsel 153 statt 253. Das Verhältnis ist ungefähr 3 : 5 und die Differenz viel zu groß, als daß sie zufälliger Natur sein könnte. Bei den einzelnen Weibchen ist das Mittel für die Kapseln verschieden, aber bei jedem einzelnen wiederholt sich der schlechtere Ansatz der alten Blüten; es läßt sich immer wieder eine Verminderung um $^2/_5$ bis $^1/_2$ feststellen, wie aus den Zahlen hervorgeht, die in die Tabelle 5 aufgenommen wurden.

Die Zahl der großtauben und fraglichen Samen war nach den Spätbestäubungen diesmal größer als nach den Frühbestäubungen, wenn auch nur um wenig. Zu den 12149 guten Samen aus jungen Eizellen (Tabelle 7) kamen 266 fragliche und taube, also 2.14 ± 0.13 Prozent, zu den 5660 guten aus alten Eizellen 259 fragliche und taube, also 4.37 ± 0.27 Prozent. Die Differenz macht 2.23 Prozent aus, und da ihr mittlerer Fehler ± 0.30 Prozent beträgt, ist sie, trotz ihrer geringen Größe, völlig sichergestellt.

Entsprechend der geringeren Samenzahl in den Kapseln aus spätbestäubten Blüten ist auch die Zahl der Pflanzen, die aus einer Kapsel zum Blühen kommen, geringer; ja es stellt sich heraus, daß sie nicht nur absolut, sondern auch relativ kleiner ist. Frühbestäubung gab im Mittel 172, Spätbestäubung nur 93 auf jede Kapsel; hätten die »Spätsamen« die gleiche Wahrscheinlichkeit gehabt, blühende Pflanzen zu geben, so hätten sie 104 geben müssen. Anders formuliert: Von 1000 Samen der frühbestäubten Blüten gaben

678 blühende Pflanzen, von 1000 Samen der spätbestäubten nur 609. Die Differenz von 6.9 Prozent ist sicher nicht zufälliger Natur; ihr mittlerer Fehler ist ±0.21. Während die ersten Versuche (von 1917 und 1918) mit den zweiten (von 1921) darin übereinstimmen, daß das Alter der Eizellen ohne Einfluß auf das Zahlenverhältnis der Geschlechter bleibt, unterscheiden sich die zweiten von den ersten also dadurch, daß 1. die Spätbestäubungen viel weniger an guten Samen gaben als die Frühbestäubungen (statt merklich mehr), 2. die Zahl der großtauben und fraglichen Samen bei ihnen etwas größer ist (statt gleich), und sie 3. weniger blühende Pflanzen geben (statt etwas mehr).

Vielleicht lassen sich die Unterschiede in folgender Weise erklären: Bei den zweiten Versuchen standen die alten Blüten sicher noch näher an der Altersgrenze der Eizellen, die eben noch die Befruchtung zuläßt, als bei den ersten. Die Eizellen derselben Plazenta verhielten sich dann verschieden: ein Teil war noch befruchtbar, ein Teil nicht mehr. Das könnte auf einem ungleichzeitigen Untauglichwerden der verschiedenen Samenanlagen desselben Fruchtknotens beruhen — wie sich ja auch gleichalte Blüten desselben Weibchens, in gleicher Weise bestäubt, verschieden verhalten können (S. 76). Oder die Altersgrenze könnte bei allen Samenanlagen gleichzeitig überschritten werden; da aber die Pollenschläuche erst nach und nach im Fruchtknoten ankommen, würde ein Teil noch befruchtet werden können, für die übrigen würde es zu spät. Dann müßten freilich die Samen, die noch gebildet werden, vorzüglich in der oberen Hälfte der Plazenta sitzen, was mir nicht auffiel. Ich halte die erste Annahme für viel wahrscheinlicher.

Im einen wie im anderen Falle wäre, wenn die weibchenbestimmenden Pollenschläuche im Durchschnitt schneller wachsen als die männchenbestimmenden, bei derartig später Bestäubung nach meinen sonstigen Erfahrungen eine Zunahme der Weibchen gegenüber der frühen Bestäubung zu erwarten. Denn im ersten Fall verschärft die Abnahme der Zahl der Samenanlagen die Konkurrenz zwischen den Weibchen- und Männchenbestimmern, wie es eine Zunahme der Pollenkornzahl tun würde. Im zweiten Fall werden unter den ersten noch zur Befruchtung kommenden Pollenschläuchen mehr weibchenbestimmende sein als unter den später ankommenden, die keine tauglichen Samenanlagen mehr finden. Es wäre also bei den zweiten Versuchen ein Unterschied im Zahlenverhältnis der Geschlechter zu erwarten gewesen, der freilich mit dem Alter der Eizellen als solchem gar nichts zu tun hätte, und es muß auffallen, daß sie zwar eine Zunahme der Weibchen bei Spätbefruchtung gegeben hatten, daß die Differenz gegen die Frühbefruchtung aber sehr gering war und unter ihrem einfachen wahrscheinlichen Fehler zurückblieb. Nun habe ich schon früher gezeigt (1921, S. 15), daß es außer den gewöhnlichen Männchen, mit ausgesprochen verschiedenem Verhalten der Weibchen- und Männchenbestimmer beim Wachstum der Pollenschläuche, auch solche gibt, die fast keinen Unterschied aufweisen und wo dann die Konkurrenz wirkungslos ist. Leider stehen mir für die beiden Männchen 1163 A und 1164 A keine Konkurrenzversuche zu Gebot; ein Bruder, 1164 G, ebenfalls thelygen, zeigte die normale Begünstigung der Weibchenbestimmer.

Eine andere Möglichkeit wäre, daß das Optimum der Konkurrenz hier schon mit dem Inhalt einer Anthere erreicht wäre, und deshalb eine weitere Steigerung (durch Herabsetzen der Zahl befruchtbarer Samenanlagen) wirkungslos blieb. Ich fand aber früher (1918, S. 1185) dazu größere Pollenmengen nötig, freilich bei anderen Individuen.

Daß bei den ersten Versuchen die späten Bestäubungen einen besseren Ansatz gaben, erklärt sich wohl so, daß nach ganz früher Bestäubung ein schlechterer Ansatz erfolgt als bei später, aber nicht zu später. Bei den zweiten Versuchen träte der geringere Nachteil der Frühbestäubung — die zum gleichen Zeitpunkt wie bei den ersten ausgeführt wurde — gegenüber dem viel größeren der Spätbestäubung — die durchschnittlich später als bei den ersten Versuchen erfolgten — ganz zurück. Der optimale Ansatz wäre bei den zweiten Versuchen gar nicht erzielt worden.

Die Eizellen der zweiten Versuche waren bei Spätbestäubung wenigstens zum Teil an der Grenze der Befruchtbarkeit. Das erklärt vielleicht die geringere Lebensfähigkeit eines Teiles der Embryonen und damit sowohl die größere Zahl fraglicher und großtauber Samen als auch die geringere Prozentzahl blühender Pflanzen, die die äußerlich guten Samen der Spätbefruchtungen hier gaben. Ähnlich ließe sich das schlechtere Erträgnis der »Frühsamen« an blühenden Pflanzen bei den ersten Versuchen erklären, wenn es nicht zufälliger Natur ist.

II. Junge und alte Pollenkörner.

Die Versuche wurden dreimal, 1917, 1918 und 1919, angestellt.

Versuche von 1917.

Es wurden 7 verschiedene Weibchen verwendet. Der Blütenstaub stammte vom selben Männchen und wurde in der schon geschilderten Weise (S. 73) gesammelt. Er kam dann gleich in Exsiccatoren über Chlorcalcium .oder (annähernd) konzentrierte Schwefelsäure, da nach den Untersuchungen PFUNDTS (1909) trocken aufbewahrter Blütenstaub seine Keimfähigkeit meist länger bewahrt. Nach 10 bis 21 Tagen wurden damit frische Blüten reichlich mit einem feinen Pinsel bestäubt, und zur Kontrolle, bei 4 von den 7 Weibchen, andere, ebenso frische, mit ganz frischem Pollen, ebenfalls reichlich, um möglichst gleiche Bedingungen zu haben. Wie sich später herausstellte, war es möglich, den Blütenstaub bei geeigneter Behandlung viel länger am Leben zu erhalten; unter den damaligen Bedingungen waren aber 21 Tage das Maximum. Mit dem zunehmenden Alter des Pollens wurde der Ansatz immer schlechter, bei Bestäubung mit dem ältesten fiel die Mehrzahl der belegten Blüten ab, und die Kapseln, die sich entwickelten, waren klein und enthielten nur wenige gute Samen; z. B. fanden sich in fünfen nur 2, 4, 7, 8 und 12 anscheinend normale Samen, daneben fragliche und viel mehr »großtaube« (S. 75).

Tabelle 8 gibt das Resultat der Aussaat. Dabei sind nicht nur die einzelnen Versuche soweit als möglich zusammengefaßt, sondern auch die Ergebnisse der verschiedenen Weibchen mit gleich altem Pollen.

Tabelle 8.

	Alter des Pollens in Tagen													
	0	10	11	13	14	15	16	17	18	19	20, 21	10—15	16—21	10—21
Gesamtzahl der Pflanzen	3018	25	260	506	402	14	319	397	32	169	43	1207	960	2167
♂	1013	9	115	158	167	8	110	142	15	73	22	457	362	819
in Prozent	**33.56** m = ± 0.85	**36**	**44.2**	**31.2**	**41.5**	**57**	**34.5**	**35.8**	**47**	**44**	**51**	**37.86**	**37.71**	**37.79** m = ± 1.05
♀	2	1	2	10	5	2	8	5	—	1	3	20	17	37
in Prozent	**0.066** m = ± 0.047	**4**	**0.77**	**1.97**	**1.24**	**14.29**	**2.58**	**1.26**	**0**	**0.59**	**6.67**	**1.66**	**1.77**	**1.71** m = ± 0.28

Die Zahlen zeigen eine deutliche, wenn auch nicht sehr auffallende Zunahme der Männchen mit steigendem Alter des Pollens. Frischer Pollen gab 33.56 ± 0.85 Prozent Männchen, alter (10—21 Tage alter) 37.79 ± 1.05 Prozent. Die Differenz ist 4.23 Prozent, ihr mittlerer Fehler ± 1.36; sie ist also eben größer als das dreifache desselben und sichergestellt.

Bei diesen Versuchen und auch bei der Mehrzahl der Versuche des folgenden Jahres war eine Fehlerquelle nicht berücksichtigt, die erst durch das Ergebnis, die Zunahme der Männchen, Bedeutung erhielt. Die Verschiebung zu ihren Gunsten bei der Bestäubung mit altem Pollen könnte einfach darauf beruhen, daß von dem in gleicher Menge verwendeten Blütenstaub durch das Altern sehr viele Körner untauglich geworden sind, und zwar von Männchenbestimmern und Weibchenbestimmern die gleiche Prozentzahl, so daß sich das Zahlenverhältnis der beiderlei Körner zueinander nicht geändert hätte. Ist dann der taugliche Rest klein genug geworden, so ist der Wettstreit zwischen ihnen bei dem alten Pollen entweder ganz aufgehoben oder doch herabgesetzt, während er bei der Verwendung von frischem Pollen wirksam ist. Das muß auch zu einer Zunahme der Männchen führen, die aber keinerlei Schlüsse auf ein ungleiches Verhalten der beiderlei Körner beim Altern erlaubte. Kommt der Altersversuch so doch auf eine Bestäubung mit sehr wenig Pollen heraus, die nur auf einem ungewöhnlichem Wege erreicht worden ist. Eine Herabsetzung der Zahl tauglicher Pollenkörner im Blütenstaub wird man aber immer da annehmen dürfen, wo die Zahl der erzielten Samen hinter der zurückbleibt, die mit der gleichen Menge frischen Pollens erhalten wird. Das ist bei unseren Versuchen der Fall gewesen.

Selbstverständlich ist eine ungleiche Beeinflussung der beiderlei Pollensorten durch das Altern aber dann bewiesen, wenn die Prozentzahl der Männchen größer gefunden wird als nach Bestäubung mit Spuren von frischem Blütenstaub (oder wenn die Zahl der Weibchen zugenommen hätte, was ich erwartet hatte). Zur Kontrolle sind also Versuche mit Ausschluß der Konkurrenz nötig.

Auffällig ist die Zunahme der Zwitter. Frischer Pollen gab nur 0.066 ± 0.047 Prozent, alter 1.71 ± 0.28 Prozent; die Differenz ist 1.644 ± 0.28

Prozent. Jede Versuchsklasse (Pollenalter 10, 11, 12 usw. Tage) bis auf eine (18 Tage) gab, trotz der viel kleineren Zahlen, mehr Zwitter, zum Teil sehr viel mehr als die Kontrollversuche. Aber auch diese Zunahme braucht kein zwingender Beweis für eine Veränderung des Pollens beim Altern zu sein. Wie wir noch sehen werden, kann mit dem Ausschluß der Konkurrenz die Zahl der Zwitter sehr stark steigen, viel mehr als die der Männchen (S. 102), also alter Pollen schon deshalb mehr Zwitter geben als frischer. Dagegen ist der Nachweis thelygener Zwitter (S. 102) ein Zeichen für eine wirkliche Veränderung des Pollens selbst mit dem Altern.

Versuche von 1918.

Der Pollen wurde in der gleichen Weise wie im Vorjahre aufgehoben, aber nur im Alter von 15 und 16 Tagen verwendet. Dafür bestäubte ich eine größere Zahl von Blüten, um sicherere Ergebnisse zu bekommen. Zum Teil wurde der Inhalt einer Anthere verwendet, bei den Altersversuchen aber auch jener von 5 Antheren und bei den Kontrollversuchen der eines Antherenviertels. Dafür wurden die reifen, aber noch geschlossenen Antheren auf glattem, schwarzem Wachstuch mit dem Rasiermesser erst querüber halbiert, dann jede Hälfte längs in die Theken geteilt. Ging dabei merklich Pollen verloren, oder gelang die Teilung nicht annähernd genau, so wurden die Stücke weggeworfen. Die tauglichen sprangen bis abends, in Petrischalen aufgehoben, auf. Der Pollen stammte stets vom selben Männchen.

In Tabelle 9 sind die Ergebnisse zusammengestellt.

Die drei Weibchen haben so verschiedene Resultate gegeben, daß wir sie getrennt besprechen wollen. Beginnen wir mit

Weibchen 221.

Es hat mit altem Pollen mehr Männchen hervorgebracht als mit jungem. Die Prozentzahlen für frischen Pollen sind nur wenig verschieden, gleichgültig ob mit dem Pollen einer ganzen Anthere oder mit dem eines Antherenviertels bestäubt wurde. Immerhin gab die spärlichere Bestäubung weniger Samen in den Kapseln (im Durchschnitt 253 statt 316), die etwas schlechter keimten (im Durchschnitt 83.7 Prozent statt 88.7) und etwas mehr Männchen gaben (44.61 Prozent statt 43.76). Fassen wir die beiderlei Bestäubungen mit frischem Pollen zusammen, so erhalten wir 44.13 ± 0.71 Prozent Männchen.

Auch die Werte für den alten, 15tägigen Pollen weichen wenig von einander ab, wenn mit dem Pollen von einer oder mit dem von 5 Antheren bestäubt worden war. Die letztere Bestäubung gab etwas mehr Samen pro Kapsel (115 statt 94), die etwas schlechter keimten (47.1 Prozent statt 52.2) und etwas weniger Männchen (53.32 Prozent statt 55.46) hervorbrachten. Vereinigt man beide Versuchsreihen, so erhält man 54.57 ± 0.99 Prozent Männchen. Die Differenz alter Pollen — junger Pollen macht 10.44 Prozent aus, ihr mittlerer Fehler ist ± 1.21, noch nicht den achten Teil so groß. Sie ist also ganz sichergestellt.

Äußerlich gute Samen gab der alte Pollen weniger als der frische, im Durchschnitt auf die Kapsel etwa ein Drittel (102 statt 285); und aus diesen

Tabelle 9.

	Versuche	Kapseln	Samen	Pflanzen	♂	Proz. ♂
	Pollen frisch (Kontrolle)					
♀ 72 × 36 F			1 Anthere			
	349—353, 358—362		645	319	118	**37.0**
	354—357, 363—368		769	453	168	**37.1**
	Zus.	11	1414	772	286	**37.05**
	Mittel . .		129	54.6 Proz.	$m = \pm 1.73$	
♀ 221 × ♂ 214			1 Anthere			
	419—423, 429—433	5	1794	1629[1]	712	**43.7**
	424—428, 434—438	5	1368	1177[4]	516	**43.8**
	Zus.	10	3162	2806[5]	1228	**43.76**
	Mittel . .		316	88.7 Proz.	$m = \pm 0.93$	
			1/4 Anthere			
	439—443	5	1331	1082[3]	497	**45.9**
	444—448	5	1197	1034[2]	447	**43.2**
	Zus.	10	2528	2116[5]	944	**44.61**
	Mittel . .		253	83.7 Proz.	$m = \pm 1.08$	
	419—448	20	5690	4922[10]	2116	**44.13**
	Mittel . .		285	86.5 Proz.	$m = \pm 0.71$	
♀ 189 × ♂ 214			1 Anthere			
	629—634	19	902	605[1]	263	**43.5**
	Mittel . .		47	67.7 Proz.	$m = \pm 2.01$	
			1/4 Anthere			
	635—642	32	1322	875	367	**41.9**
	Mittel . .		41	66.2 Proz	$m = \pm 1.66$	
	629—642	51	2224	1480[1]	630	**42.57**
	Mittel . .		44	66.5 Proz.	$m = \pm 1.28$	

	Versuche	Kapseln	Samen	Pflanzen	♂	Proz. ♂
	Pollen 15 (A) und 16 (B) Tage alt					
	A		1 Anthere			
	386—395	10	1160	573	165	**28.8**
	396—405	10	957	543	164	**30.2**
	Zus.	20	2117	1116	329	**29.48**
	Mittel . .		106	52.7 Proz.	$m = \pm 1.36$	
	B		1 Anthere			
	369—376	8	677	333	82	**24.6**
	377—386	9	785	378	83	**22.0**
	Zus.	17	1462	711	165	**23.21**
	Mittel . .		86	48.6 Proz.	$m = \pm 1.58$	
	A		1 Anthere			
	449—463	15	1350	691[13]	363	**52.5**
	464—478	15	1459	776[2]	451	**58.1**
	Zus.	30	2809	1467[15]	814	**55.46**
	Mittel . .		94	52.2 Proz.	$m = \pm 1.29$	
	A		5 Antheren			
	479—488	10	1084	507[6]	278	**54.8**
	489—498	10	1217	577[3]	300	**52.0**
	Zus.	20	2301	1084[9]	578	**53.32**
	Mittel . .		115	47.1 Proz.	$m = \pm 1.51$	
	449—498	50	5110	2551[24]	1392	**54.57**
	Mittel . .		102	49.9 Proz.	$m = \pm 0.99$	
	A		1 Anthere			
	643—647	28	739	397[3]	163	**41.1**
	Mittel . .		26	53.7 Proz.	$m = \pm 2.46$	
	A		5 Antheren			
	648—650	13	258	105[1]	48	**45.7**
	Mittel . .		20	40.7 Proz.	$m = \pm 4.86$	
	643—650	41	997	502[4]	211	**42.0**
	Mittel . .		24	50.4 Proz.	$m = \pm 2.20$	

Die kleinen Zahlen als Indizes geben die Zwitter an.

erhielt ich noch weniger blühende Pflanzen, im Mittel statt 86.5 Prozent nur 49.9. Auch hierin verrät sich, wie in der großen Zahl großtauber Samen, der schwächliche Zustand bei vielen der mit altem Pollen erzeugten Embryonen.

Die Konkurrenz war bei dem alten Pollen aufgehoben; daß aber mehr als 50 Prozent Männchen erhalten wurden, spricht dafür, daß mit dem Altern eine tiefergehende Änderung mit dem Blütenstaub vor sich gegangen war, aus der eine Verschiebung des Zahlenverhältnisses der Geschlechter zugunsten der Männchen resultierte.

Von den beiden andern Weibchen, die kein so umfangreiches Material lieferten, gab das eine, 189, keine deutliche Veränderung des Geschlechterverhältnisses, das andere, 72, das entgegengesetzte Resultat, eine Abnahme der Männchen mit Zunahme des Alters des Blütenstaubes.

Weibchen 189.

Es gehört in eine besondere Kategorie, die man kurz »oligotok« nennen könnte. Solche Weibchen bringen aus inneren Ursachen nur wenig Samen hervor, auch wenn die Blüten mit einem Überschuß von frischem, tauglichem Pollen bestäubt werden.

Bei meinen Zählungen an heranreifenden Früchten, auf die ich später einzugehen gedenke, stellte es sich zwar heraus, daß überhaupt keines der untersuchten Weibchen, auch bei reichlichster Bestäubung, alle Samenanlagen eines Fruchtknotens zu reifen Samen werden ließ. 9 Prozent blieben zum mindesten unbefruchtet (1921, S. 17). Schuld daran kann kaum das Ausbleiben eines Pollenschlauches oder, nach der Befruchtung, ungenügende Ernährung sein; der Grund muß an den Samenanlagen selbst liegen. Bei einem oligotoken Weibchen ist aber die Zahl dieser unbefruchtet bleibenden Samenanlagen sehr viel größer; das Verhältnis kann sich fast umkehren. Ob gegenüber normalen Weibchen eine scharfe Grenze besteht, bleibt zu ermitteln. Voraussetzung ist natürlich, daß der zur Bestäubung verwendete Pollen gut ist, was durch Kontrollversuche mit normalen Weibchen ja leicht geprüft werden kann und für unsern Fall zutrifft.

An der Plazenta der reifen Kapsel sitzen die vielen unvergrößert verschrumpften, braunen Samenanlagen; die wenigen guten Samen und die fraglichen und großtauben, gefalteten mit abgestorbenen Embryonen sind gleichmäßig, oder nahezu so, zwischen sie über die ganze Länge der Plazenta verteilt; Übergänge sind nicht häufig. Der Unterschied gegenüber Kapseln normaler Weibchen, die mit einem Minimum von Pollen bestäubt worden waren, oder bei denen die Leitungsbahnen für die Pollenschläuche frühzeitig unterbrochen wurden (1921, S. 341), und die deshalb auch sehr wenigsamig sind, ist ganz auffällig; hier sitzen die guten Samen vorwiegend gegen die Spitze der Plazenta zu (1918, S. 1195, Fig. 3).

In der Tabelle 10 ist die Zahl der Samen in den Kapseln angegeben, und zwar die der guten Samen allein und die der guten und großtauben zusammen.

Die einzelnen Kapseln sind dafür in Klassen mit einem Spielraum von je 5 Samen gebracht.

Da im Durchschnitt etwa 300 Samenanlagen im Fruchtknoten vorhanden gewesen sein werden, wenn nicht mehr, haben bei mehr als genügender Bestäubung mit frischem Pollen im Mittel 45.1 Samenanlagen, also etwa 16 Prozent, angesetzt, und davon hatten wieder 43.6 = 96.7 Prozent gute Samen gegeben. Eine Viertelanthere brachte etwas weniger als eine ganze. Mit dem alten Pollen setzten dagegen im Mittel 35.9 Samenanlagen an, von denen nur 24.3, genauer 65.9 Prozent, gute Samen gaben, während der Rest vor der vollen Reife abstarb. Die »guten« Samen aus altem Pollen keimten merklich schlechter als die aus jungem und brachten nur zu 50.4 Prozent, statt zu 66.5 Prozent, blühende Pflanzen.

Es wird auffallen, daß die Zahl der guten Samen bei Verwendung alten Pollens geringer ist (24.3 pro Kapsel) als nach der Bestäubung mit jungem (43.6), trotzdem die Zahl der befruchtbaren Samenanlagen in jedem Fruchtknoten sehr gering war und die gleiche Menge gleichalten Pollens desselben

Tabelle 10.

Ansatz des ♀ 189 mit dem frischen Pollen einer Anthere (I) und einer Viertelsanthere (II), und mit dem alten Pollen einer Anthere (III) und von fünf Antheren (IV).

Zahl der guten Samen in den einzelnen Kapseln.

	−10	−15	−20	−25	−30	−35	−40	−45	−50	−55	−60	−65	−70	n	M
I	—	—	—	—	1	—	5	2	4	3	2	1	1	19	**47.5**
II	—	2	1	2	1	2	6	5	4	6	2	1	—	32	**41.3**
I u. II	—	**2**	**1**	**2**	**2**	**2**	**11**	**7**	**8**	**9**	**4**	**2**	**1**	51	**43.6**
III	—	1	3	9	9	3	2	1	—	—	—	—	—	28	**26.4**
IV	1	3	2	5	—	2	—	—	—	—	—	—	—	13	**19.8**
III u. IV	**1**	**4**	**5**	**14**	**9**	**5**	**2**	**1**	—	—	—	—	—	41	**24.3**

Zahl der guten und großtauben Samen in den einzelnen Kapseln.

	−10	−15	−20	−25	−30	−35	−40	−45	−50	−55	−60	−65	−70	n	M
I	—	—	—	—	1	—	2	4	3	3	4	—	2	19	**49.3**
II	—	1	2	2	1	2	4	5	4	5	4	2	—	32	**42.6**
I u. II	—	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**	**6**	**9**	**7**	**8**	**8**	**2**	**2**	51	**45.1**
III	—	—	1	—	4	8	9	5	—	1	—	—	—	28	**35.9**
IV	—	—	—	3	—	2	1	3	3	1	—	—	—	13	**39.0**
III u. IV	—	—	**1**	**3**	**4**	**10**	**10**	**8**	**3**	**2**	—	—	—	41	**36.9**

n = Zahl der Kapseln, M = Mittelwert.

Männchens (214) bei dem Weibchen 221 etwa 100 gute Samen gab. Ein großer Teil der Differenz von 18.3 Samen erklärt sich zwar durch die großtauben Samen, die bei altem Pollen 34.1 Prozent der Bestäubungen ausmachen, bei jungen nur 1.5 Prozent. Zieht man sie — die ja Embryonen enthalten — in Betracht, so erniedrigt sich die Differenz auf 8.2 Samen pro Kapsel, ist aber nicht ganz aufgehoben. Eine Erklärung weiß ich dafür zur Zeit nicht zu geben[1] und ebensowenig für die Tatsache, daß 5 Antheren alten Pollens etwas weniger gute Samen brachten, als es eine einzige tat.

Viel wichtiger ist, daß der alte Pollen, der mit dem Weibchen 221 mehr Männchen gab, mit dem Weibchen 189 ebensoviel Männchen hervorbrachte als der frische. Denn die Differenz von 0.57 Prozent ist viel kleiner als ihr einfacher mittlerer Fehler ±2.5, und zudem zugunsten der Weibchen ausgefallen. Die Ursache muß in dem Weibchen 189 liegen, ohne daß ich sie aufklären könnte.

Weibchen 72.

Auch diese Pflanze war oligotok, wenn auch nicht so ausgesprochen wie das Weibchen 189. Der Ansatz betrug selbst bei Überfluß an frischen Pollen im Mittel nur 129 gute Samen in der Kapsel; es wurden also etwa 40 Prozent der Samenanlagen befruchtet und zu normalen Samen. Hier ist eine Ab-

[1] Vielleicht starben die Embryonen so früh ab, daß die betreffenden Samenanlagen als unbefruchtet nicht gezählt wurden.

nahme der Männchen mit dem Altern des Pollens ganz deutlich: Der frische gab 37.1 ± 1.73 Prozent, 15 Tage alter 29·5 ± 1.36 Prozent und 16 Tage alter 23.2 ± 1.58 Prozent. Die Differenz zwischen den Extremen (0 Tagen und 16 Tagen) ist 13.84 ± 2.34; sie ist etwa 6mal größer als ihr mittlerer Fehler und sichergestellt. Aber auch der Unterschied zwischen dem Ergebnis mit frischem und dem mit 15tägigem Pollen, 7.57 ± 2.17 Prozent, kann nicht zufällig sein.

Die gleichartigen Versuche (mit Pollen desselben Alters) am Weibchen 72 sind bei dem Zusammenstellen der Tabelle 9 immer in zwei möglichst gleiche Hälften geteilt worden. Die Prozentzahlen für diese Hälften stimmen unter sich gut, zum Teil auffallend gut, überein: 37.0 und 37.1 Prozent, 28.8 und 30.2 Prozent, 24.6 und 22 Prozent, während sich die Hälften verschiedener Versuche sehr deutlich unterscheiden.

Der Pollen stammte von einem andern Männchen (36F) als der für die Weibchen 221 und 189 verwendete.

Wir müssen uns damit abfinden, daß das Weibchen 72 gerade das entgegengesetzte Resultat als das Weibchen 221 gab. Hier kann aber auch das nicht identische Männchen schuld gewesen sein.

Auch hinsichtlich der Hervorbringung von Zwittern unterschieden sich die drei Weibchen. Junger Pollen gab bei ♀221 unter 4922 Pflanzen 10, also 0.20 Prozent, alter unter 2551 Pflanzen 24, also 0.94 Prozent. Bei ♀189 brachte der junge Pollen unter 1480 Pflanzen 1 Zwitter, also 0.068 Prozent, der alte unter 502 Pflanzen 4, also 0.80 Prozent, hervor. 72 gab überhaupt keine Zwitter. Wenn aber Zwitter gebildet wurden, gab der alte Pollen also stets mehr.

Versuche von 1919.

Diesmal lagen die Versuchsergebnisse von 1917 fertig vor, und es wurden nun auch Kontrollversuche mit völligem Ausschluß der Konkurrenz, also Bestäubungen mit sehr wenig Pollen, ausgeführt. Es kamen lauter Geschwister zur Verwendung, 12 Weibchen und 2 Männchen aus Versuch 499. Der Pollen wurde in der gleichen Weise wie früher (S. 73 u. 81) gesammelt, aber etwas anders weiterbehandelt. Die Petrischalen blieben zunächst (gedeckelt) für 24 Stunden im Arbeitszimmer stehen und kamen erst dann in die Exsiccatoren, und zwar über Natronkalk. Der Wasserentzug geschah so langsamer und war weniger vollständig als vorher, wo Chlorcalcium und Schwefelsäure zum Trocknen verwendet wurde. Auch war die Bildung von Spuren von SO_2 und HCl ausgeschlossen. Dieser Behandlung — und nicht der Herkunft des Pollens — schreibe ich es zu, daß diesmal die Lebensdauer sehr viel länger war; ich habe noch mit 120tägigen Pollen einzelne Befruchtungen erhalten. Im übrigen war auch nach anscheinend gleicher Behandlung des Pollens ein und desselben Männchens die Widerstandskraft ungleich, oft auffallend. Der Pollen eines bestimmten Tages konnte wesentlich schlechter sein als vorher aufgehobener, also älterer, wie wir noch sehen werden (S. 97). Bevor die Bestäubungen ausgeführt wurden, kamen die Petrischalen (gedeckelt) für ein paar Stunden aus dem Exsiccator in ein feuchtwarmes Gewächshaus und wurden mit einem etwas angefeuchteten Blumentopf überdeckt. Es wurde so

für allmählichen Zutritt von etwas Feuchtigkeit gesorgt und auch erreicht, daß die einzelnen offenen Antheren ohne großen Pollenverlust mit einer feinen Pinzette gefaßt und auf den Narben abgestrichen werden konnten. Antheren, die viel Pollen verloren hatten, wurden nicht verwendet. Der Rest an unbenutzten Antheren wurde nicht aufgehoben, sondern an jedem Bestäubungstag eine neue Petrischale einem Exsiccator entnommen.

Als Kontrolle wurde, außer mit sehr wenig Pollen, auch mit einer ganzen Anthere bestäubt; vom alten Pollen wurde bis zu 75 Tagen je eine Anthere für eine Blüte verwendet, von da ab mehrere, bis zu 5 und 10. Auch unter so großen Pollenmengen waren dann nur noch wenige Körner voll befruchtungstüchtig, unter dem Inhalt einer Anthere sehr oft keines mehr.

Zunächst wurde 1920 nur ein Teil der Ernte, von 5 Weibchen (499D, T, W, AA und AC), ausgesät. 1921 konnte mit der Ernte von 3 weiteren Weibchen (499N, S, AB) ebenso verfahren werden. 1923 wurden diese Aussaaten noch ergänzt und einige weitere Weibchen herbeigezogen. Im folgenden sind aber im allgemeinen nur die Versuche von 1920 und 1921 berücksichtigt. Die von 1923 sind noch nicht abgeschlossen; die Ergebnisse fallen aber ganz in den Rahmen, den die früheren Versuche gegeben haben. Diese sind in den acht Tabellen 11—18 zusammengestellt.

Tabelle 11.

♀ 499D × ♂ 499H (Aussaat 1920).

Alter des Pollens in Tagen	Kapseln	Ges.-Zahl der Samen	pro Kapsel	Samen gut	Samen fragl.	Samen großtaub	Vers.-Nr.	Samen	Keimlinge	blüh. Pflanzen	♀	♂	☿
0 1 Anth.	10	2666	266.6	2603	6	57	872—876	(2110)	1954	1604	844	760	—
		Prozent...		**97.6**	0.2	**2.1**					**52.6**	**47.4**	**0**
0 Spuren	20	2950	147.5	2541	396	13	885—890	1445 (1631)	1240	1048	490	556	2
		Prozent...		**86.1**	13.4	**0.4**					**46.76**	**53.1**	**0.2**
42	10	657	65.7	103	41	513	891	103 (144)	60	44	15	28	1
		Prozent...		**15.7**	6.24	**78.1**					**34**	**64**	**2.3**
47	24	1738	72.4	585	179	974	892—894	585 (764)	344	254	86	163	5
		Prozent...		**33.7**	10.3	**56.0**					**33.9**	**64.2**	**2.0**
75	17	1307	72.6	307	147	853	895—896	307 (454)	237	209	57	146	6
		Prozent...		**23.5**	11.3	**65.3**					**27.3**	**69.9**	**2.9**
80	10	804	80.4	26	27	75.1	897	26 (53)	22	14	4	9	1
		Prozent...		**3.2**	3.4	**93.4**					**29**	**64**	**7**
100	3	85	28.3	4	7	74	898	9 (22)	8	5	1	3	1
		Prozent...		**4.7**	8.2	**87.1**					**20**	**60**	**20**
110	6	139	23.2	5	6	139							
		Prozent...		**3.3**	4.0	**92.7**							
120	2	33	16.5	—	—	33							
		Prozent...		—	—	**100.0**							

Tabelle 12.

♀ 499 T × ♂ 499 M (Aussaat 1920).

Alter des Pollens in Tagen	Kapseln	Ges.-Zahl der Samen	pro Kapsel	Samen: gut	Samen: fragl.	Samen: großtaub	Vers.-Nr.	Samen	Keimlinge	blüh. Pflanzen	♀	♂	♀♂
0 1 Anth.	16	2539	158.7	2420	6	113							
		Prozent...		**95.3**	0.2	**4.5**							
0 Spuren	29	1933	66.7	1758	78	97	984—991	1758 (1836)	1749	1383	732	648	3
		Prozent...		**90.9**	4.03	**5.01**					**52.9**	**46.9**	**0.2**
18	9	1221	135.7	942	91	188	992—996	549 (580)	544	372	164	204	4
		Prozent...		**77.2**	7.5	**15.4**					**44.1**	**54.8**	**1.1**
19	6	524	87.3	304	36	184	997—998	304 (340)	185	118	37	80	1
		Prozent..		**58.0**	6.9	**35.1**					**31.4**	**67.8**	**0.8**
20	6	598	99.7	354	59	185	999—1001	354 (413)	381	163	63	97	3
		Prozent...		**59.2**	9.9	**30.9**					**38.7**	**59.5**	**1.8**
21	5	926	185.2	618	62	246	1002—1006	618 (680)	444	389	132	249	2
		Prozent...		**66.7**	6.7	**26.6**					**34.5**	**65.0**	**0.5**
22	2	422	211	308	44	70	1007—1008	308 (352)	324	269	112	156	1
		Prozent...		**73.0**	10.4	**16.6**					**41.6**	**58.0**	**0.4**
50	27	966	35.9	339	112	515	1009—1010	339 (351)	383	278	68	202	8
		Prozent...		**35.1**	11.6	**53.3**					**24.5**	**72.7**	**2.9**
55	30	1221	40.7	392	79	750	1011—1013	392 (471)	361	223	19	196	8
		Prozent...		**32.1**	6.5	**61.4**					**8.7**	**87.9**	**3.6**
59	25	1624	64.9	751	97	776	1014—1018	751 (848)	679	422	61	353	8
		Prozent...		**46.2**	6.0	**47.8**					**14.4**	**83.7**	**1.9**
80	9	242	26.9	30	8	204	1019	30 (38)	24	15	—	15	—
		Prozent...		**12.4**	3.3	**84.3**					**0**	**100**	**0**
90	8	44	5.5	2	1	41	1020	2 (3)	3	3	—	3	—
		Prozent...		**4.5**	2.3	**93.2**					**0**	**100**	**0**
95	9	168	18.7	8	2	158	1021	8 (10)	9	7	—	7	—
		Prozent...		**4.8**	1.2	**94.0**					**0**	**100**	**0**
100	3	42	14.0	3	—	39	1022	3 (3)	2	2	0	1	1
		Prozent...		**7.1**	—	**92.9**							
120	1	3	3.0	—	—	3							
		Prozent...		—	—	**100**							

Die linke Seite jeder Tabelle enthält die Resultate, die die Auszählung der Ernte gab: die Zahl der Fruchtknoten, die ansetzten und zu Kapseln wurden, die Gesamtzahl der Samen, die durchschnittliche Zahl der Samen für eine Kapsel und die Beschaffenheit der Samen, nach den uns schon bekannten drei

Tabelle 13.

♀499 W × ♂499 M (Aussaat 1920).

Alter des Pollens in Tagen	Kapseln	Ges.-Zahl der Samen	pro Kapsel	Samen: gut	Samen: fragl.	Samen: großtaub	Vers.-Nr.	Samen	Keimlinge	blüh. Pflanzen	♀	♂	☿
0 1 Anth.	15	333.6	222.4	2989	112	235							
			Prozent . . .	**89.6**	3.4	**7.1**							
0 Spuren	27	2441	90.4	2203	105	133	960—966	1387 (1454)	1313	1106	561	545	—
			Prozent . . .	**90.3**	4.3	**5.4**					**50.7**	**49.3**	**0**
18	8	1216	152	883	62	271							
			Prozent . . .	**72.6**	5.1	**22.3**							
19	12	1944	162	1227	120	597							
			Prozent . . .	**63.1**	6.2	**30.7**							
20	10	1104	110.4	632	96	376							
			Prozent . . .	**57.3**	8.7	**34.0**							
21	14	3223	230.2	2348	91	784							
			Prozent . . .	**72.9**	2.8	**24.3**							
22	30	6194	206.5	4994	154	1046							
			Prozent . . .	**80.6**	2.5	**16.9**							
47	29	1963	70.1	914	194	855	967—971	914 (1108)	657	605	124	473	8
			Prozent . . .	**46.6**	9.9	**43.6**					**20.5**	**78.2**	**1.3**
50	35	1345	38.4	691	160	494	972—975	691 (851)	609	467	116	342	9
			Prozent . . .	**51.4**	11.9	**36.7**					**24.8**	**73.2**	**1.9**
75	24	944	39.3	248	124	572	976—977	248 (362)	204	153	34	110	9
			Prozent . . .	**26.3**	13.1	**60.6**					**22.2**	**71.9**	**5.9**
80	32	795	24.7	210	67	518	978—979	210 (276)	189	125	27	95	3
			Prozent . . .	**26.4**	8.4	**65.2**					**21.6**	**76.0**	**2.4**
85	16	839	53.4	159	54	626	980—981	159 (213)	106	65	8	53	4
			Prozent . . .	**19.0**	6.4	**74.6**					**12.3**	**81.5**	**6.2**
90	8	236	29.5	13	14	209	982	13 (27)	11	7	2	5	—
			Prozent . . .	**5.5**	5.9	**88.6**					**29**	**71**	**0**
95	7	130	18.6	3	5	122	983	3 (8)	7	5	—	5	—
			Prozent . . .	**2.3**	3.9	**93.9**					**0**	**100**	**0**

Kategorien: gut, fraglich und großtaub, ausgelesen. Unter den absoluten Zahlen stehen zum besseren Vergleich die Prozentzahlen. Die Zählungen stammen nur zum Teil von mir selbst her und sind außerdem nicht alle zur selben Zeit gemacht worden. Die Beurteilung der Güte und die Verteilung auf die drei Kategorien wird also nicht immer ganz gleich ausgefallen sein.

Bei den Kontrollversuchen mit ganz frischem Pollen bleibt die Zusammensetzung der Ernte hinsichtlich ihrer Güte im allgemeinen gleich, ob mit dem

Tabelle 14.

♀ 499 AA × 499 H (Aussaat 1920).

Alter des Pollens in Tagen	Kapseln	Ges.-Zahl der Samen	pro Kapsel	Samen: gut	Samen: fragl.	Samen: großtaub	Vers.-Nr.	Samen	Keimlinge	blüh. Pflanzen	♀	♂	♀♀
0 1 Anth.	3	1009	336.3	669	307	33	*2654	182 (294)		125	49	76	—
		Prozent ...		**66.3**	30.4	**3.3**					**39.2**	**60.8**	
0 Spuren	19	1798	94.6	1381	348	69	764—772	1381 (1629)	1303	972	489	483	—
		Prozent ...		**76.8**	19.4	**3.8**					**50.3**	**49.7**	
22	8	1954	244.5	979	535	440	773—780	979 (1514)	1118	834	387	446	1
		Prozent ...		**50.1**	27.4	**22.5**					**46.4**	**53.5**	**0.1**
23	17	4401	258.9	2728	502	1171	781—788	2728 (3230)	1445	1043	457	582	4
		Prozent ...		**62.0**	11.4	**26.6**					**43.8**	**55.8**	**0.4**
25	26	5026	193.3	2326	427	2273							
		Prozent ...		**46.3**	8.5	**45.2**							
28	26	6110	235.0	1948	1041	3121	*2655–2658	486 (675)	457	230	96	132	2
		Prozent ...		**31.9**	17.0	**51.1**					**41.7**	**57.4**	**0.8**
30	25	6768	270.7	2828	1531	2409	*2659–2662	688 (849)	640	382	149	228	5
		Prozent ...		**41.8**	22.6	**35.6**					**39.2**	**59.7**	**1.3**
33	28	7208	257.4	2536	1999	2673	796—803	1201 (2353)	1461	1064	439	619	6
		Prozent ...		**35.2**	27.7	**37.1**					**41.3**	**58.2**	**0.5**
35	7	1634	233.4	670	390	574	804—808	670 (1060)	599	392	148	241	3
		Prozent ...		**41.0**	23.9	**35.1**					**37.8**	**61.5**	**0.8**
59	26	1830	73.2	386	371	1073							
		Prozent ...		**21.1**	20.3	**58.6**							
66	56	2881	51.4	995	213	713	789—795	995 (1108)	491	351	119	227	5
		Prozent ...		**33.1**	7.4	**59.5**					**33.9**	**64.7**	**1.4**
70	19	229	12.1	18	11	200	809	18 (29)	8	7	—	7	—
		Prozent ...		**7.9**	4.8	**87.3**					**0**	**100**	**0**
75	25	937	37.5	109	66	762	810	109 (175)	61	41	14	27	0
		Prozent ...		**11.6**	7.0	**81.3**					**34.2**	**65.8**	**0**
80	52	2082	40.0	239	51	1792	811—812	239 (290)	142	105	35	67	3
		Prozent ...		**11.5**	2.4	**86.1**					**33.3**	**63.8**	**2.9**
85	18	947	52.6	120	65	762	813	120 (185)	92	58	8	49	1
		Prozent ...		**12.7**	6.9	**80.5**					**14**	**84**	**1.7**
90	18	713	39.6	30	16	667	814	30 (46)	24	16	2	13	1
		Prozent ...		**4.2**	2.2	**93.6**					**13**	**81**	**6**

* Aussaat 1923.

Alter des Pollens in Tagen	Kapseln	Ges.-Zahl der Samen	pro Kapsel	Samen: gut	Samen: fragl.	Samen: großtaub	Vers.-Nr.	Samen	Keimlinge	blüh. Pflanzen	♀	♂	♀♂
100	9	499	55.8	3	19	477	815	3 (22)	8	4	1	3	—
		Prozent ...		**0.6**	3.8	**95.6**					**25**	**75**	**0**
110	7	113	16.1	3	3	107	816	3 (6)	3	2	0	2	—
		Prozent ...		**2.7**	2.7	**94.7**					**0**	**100**	**0**
120	2	19	9.5	1	1	17	817	1 (2)	—	—	—	—	—
		Prozent ...		**5.3**	5.3	**89.5**					—	—	—

Tabelle 15.

♀ 499 AC × ♂ 499 M (Aussaat 1920).

Alter des Pollens in Tagen	Kapseln	Ges.-Zahl der Samen	pro Kapsel	Samen: gut	Samen: fragl.	Samen: großtaub	Vers.-Nr.	Samen	Keimlinge	blüh. Pflanzen	♀	♂	♀♂
0 1 Anth.	1	141	141	131	4	6							
		Prozent ...		**92.9**	2.8	**4.3**							
0 Spuren	24	1401	58.3	1257	85	59	818—823	1098 (1342)	1009	960	483	477	—
		Prozent ...		**89.7**	6.1	**4.2**					**50.3**	**49.7**	**0**
28	18	2449	136.1	898	200	1351	829—833	898 (1098)	680	491	108	379	4
		Prozent ...		**36.7**	8.2	**55.2**					**22.0**	**77.2**	**0.8**
31	13	1486	114.3	428	32	1026	834—835	428 (460)	324	252	68	178	6
		Prozent ..		**28.8**	2.2	**69.1**					**27.0**	**70.6**	**2.4**
66	15	320	21.3	84	7	229	836	84 (91)	63	51	9	41	1
		Prozent ...		**26.3**	2.2	**71.6**					**17.6**	**80.4**	**2.0**
70	26	823	31.7	263	23	537	837—838	263 (286)	197	160	39	119	2
		Prozent ...		**32.0**	2.8	**65.3**					**24.4**	**74.4**	**1.3**
75	32	551	17.2	124	75	352	839	124 (199)	115	86	20	65	1
		Prozent ...		**22.5**	13.6	**63.9**					**23.3**	**75.6**	**1.2**
80	14	421	30.1	80	27	314	840	81 (110)	61	43	10	32	1
		Prozent ...		**19.0**	6.4	**74.6**					**23.3**	**74.4**	**2.3**
100	2	29	19.5	1	2	36							
		Prozent ...		**2.6**	5.1	**92.3**							

Inhalt einer ganzen Anthere oder mit wenig Pollen bestäubt worden war. Die Prozentzahl fraglicher und großtauber Samen ist gering; nur beim Weibchen AA ist die der fraglichen auffallend groß.

Tabelle 16.

♀ 499 N × ♂ 499 M (Aussaat 1921).

Alter des Pollens in Tagen	Kapseln	Ges.-Zahl der Samen	pro Kapsel	Samen: gut	Samen: fragl.	Samen: großtaub	Vers.-Nr.	Samen	Keimlinge	blüh. Pflanzen	♀	♂	☿
0 1 Anth.	6	1970	328.3	1918	24	28	1330—1335	1918 (1942)	1808	1107	516	591	—
		Prozent . . .		**97.4**	1.2	**1.4**					**46.6**	**53.4**	**0**
0 Spuren	10	692	69.2	683	7	2	1336—1339	683 (690)	636	403	214	188	1
		Prozent . . .		**98.7**	1.0	**0.3**					**53.1**	**46.7**	**0.25**
25	23	4615	200.7	2828	184	1603							
		Prozent . . .		**61.3**	4.1	**34.7**							
28	15	2762	184.1	1377	144	1241							
		Prozent . . .		**50.0**	5.2	**44.9**							
59	46	2101	45.7	1051	405	645	1340—1346	1051 (1476)	717	424	85	336	3
		Prozent . . .		**50.0**	**19.3**	**30.7**					**20.0**	**79.3**	**0.7**
70	24	669	27.9	129	109	431	1347—1348	129 (238)	82	52	10	41	1
		Prozent . . .		**19.3**	16.3	**64.4**					**19.2**	**78.9**	**1.9**
80	27	695	25.7	151	96	448	1349—1350	151 (247)	117	69	14	53	2
		Prozent . . .		**21.7**	13.8	**64.5**					**20.3**	**76.8**	**2.9**
85	12	561	46.8	110	13	438	1351—1352	110 (123)	69	38	8	30	—
		Prozent . . .		**19.6**	2.3	**78.1**					**21.1**	**78.9**	**0**
90	14	145	10.4	6	1	138	1353	6 (7)	3	3	—	3	—
		Prozent . . .		**4.2**	0.7	**95.2**					**0**	**100.0**	**0**
95	4	51	12.8	3	1	47	1354	3 (4)	3	2	—	2	—
		Prozent . . .		**5.9**	2.0	**92.2**					**0**	**100.0**	**0**
100	3	85	28.3	12	1	72	1355	12 (13)	11	3	—	2	1
		Prozent . . .		**14.1**	1.2	**84.7**					**0**	**66.6**	**3.4**
110	1	17	17	3	0	14	1356	3 (3)	2	2	—	2	—
		Prozent . . .		**17.7**	0	82.4					**0**	**100.0**	**0**

Mit dem zunehmenden Alter des Pollens wird die Ernte immer geringer. Schon bei 18tägigem bleibt die Samenzahl weit hinter der zurück, die sich durch Bestäubung mit derselben Menge frischem Pollens erhalten läßt; die Konkurrenz ist schon aufgehoben. Unter den überhaupt noch erzielten Samen nehmen die guten immer mehr ab, die großtauben immer mehr zu, bis schließlich die ganze, geringe Ernte fast nur noch aus großtauben Samen besteht oder ausschließlich aus solchen. Die Prozentzahl der fraglichen Samen bleibt sich annähernd gleich. Ich habe bereits an anderer Stelle (1921a, S. 18) photographische Aufnahmen der Samen desselben Elternpaares aus Bestäubung mit ganz frischem Pollen und mit solchem von 59 und 80 Tagen veröffentlicht

Tabelle 17.

♀499 S × 499 M (Aussaat 1921).

Alter des Pollens in Tagen	Kapseln	Ges. Zahl der Samen	pro Kapsel	Samen: gut	Samen: fragl.	Samen: großtaub	Vers.-Nr.	Samen	Keimlinge	blüh. Pflanzen	♀	♂	♀♂
0 1 Anth.	21	4018	191.3	3913	36	69	1301—1306	1495 (1510)	1375	1144	656	484	4
		Prozent ...		**97.4**	0.9	**1.7**					**57.3**	**42.3**	**0.4**
0 1 Anth.	20	4092	209.6	3947	23	122	1307—1312	1441 (1450)	1356	984	549	434	1
		Prozent ...		**96.5**	0.6	**3.0**					**55.8**	**44.1**	**0.1**
0 Spuren	29	2055	70.9	1967	51	37	1313 1320	1638 (1684)	1449	1028	519	508	1
		Prozent ...		**95.7**	2.5	**1.8**					**50.5**	**49.2**	**0.1**
70	15	115	7.6	20	5	90	1321	20 (25)	15	11	2	9	—
		Prozent ...		**17.4**	4.3	**78.3**					**18.2**	**81.8**	**0**
75	26	667	25.6	233	18	416	1322—1323	233 (251)	197	101	31	70	—
		Prozent ...		**34.9**	2.7	**62.4**					**30.7**	**69.3**	**0**
80	33	978	29.6	284	11	683	1324—1326	284 (295)	140	66	18	47	1
		Prozent ...		**29.0**	1.1	**69.8**					**27.3**	**71.2**	**1.5**
95	6	125	24.1	12	2	111	1327	12 (4)	9	6	1	5	—
		Prozent ...		**9.6**	1.6	**88.8**					**16.7**	**83.3**	**0**
100	8	158	19.8	16	9	133	1328	16 (25)	15	8	2	6	—
		Prozent ...		**10.1**	5.7	**84.2**					**25.0**	**75.0**	**0**
110	2	23	11.5	0	0	23	—	—	—	—	—	—	—
		Prozent ...		**0**	0	**100.0**							
120	1	7	7.0	1	0	6	1329	1 (1)	1	1	—	1	—
		Prozent ...		**14.3**	0	**85.7**					**0**	**100**	**0**

und auch (S. 19, 20) zwei Kurven gegeben, die die Abnahme der guten Samen mit der Zunahme des Alters des Pollens bei den Weibchen W und T zeigen (vgl. auch Fig. 2).

Die rechte Seite der Tabellen bringt die Ergebnisse der Aussaaten, für die nicht immer die ganze ausgezählte Ernte verwendet werden konnte. Unter der Zahl der guten Samen steht in Klammern die Zahl der guten und fraglichen Samen, welch letztere mit ausgesät wurden.

Der schädigende Einfluß des Alters des Pollens bei der Bestäubung zeigt sich nicht nur an der zunehmenden Zahl der großtauben Samen; er äußert sich auch bei der Keimung der »guten« Samen und in der Zahl der Keimlinge, die es zum Blühen gebracht haben. Bei den Aussaaten des Jahres 1920 keimten von den äußerlich guten Samen, wenn sie durch Bestäubung mit frischem Pollen entstanden waren, 93.34 ± 0.26 Prozent, wenn sie auf alten

Tabelle 18.

♀499AB × 499H (Aussaat 1921).

Alter des Pollens in Tagen	Kapseln	Ges.-Zahl der Samen	pro Kapsel	Samen: gut	Samen: fragl.	Samen: großtaub	Vers.-Nr.	Samen	Keimlinge	blüh. Pflanzen	♀	♂	♀♂
0 1 Anth.	10	2841	284.1	2687	6	148	1275—1279	1628 (1631)	1342	1292	742	583	12
		Prozent ...		**94.6**	0.2	**5.2**					**57.4**	**41.6**	**0.9**
0 Spuren	25	3427	137.1	3165	103	159							
		Prozent ...		**92.4**	3.0	**4.6**							
21	26	6858	263.8	4912	46	1900							
		Prozent ...		**71.6**	0.7	**27.7**							
23	20	4085	204.3	2521	28	1536							
		Prozent ...		**61.7**	0.7	**37.6**							
70	27	1215	45.0	287	63	865							
		Prozent ...		**23.6**	5.2	**71.2**							
75	42	2108	50.2	399	71	1638							
		Prozent ...		**18.9**	3.4	**77.7**							
80	29	1514	52.2	295	26	1193	1281—1282	295 (321)	246	163	57	102	4
		Prozent ...		**19.5**	1.7	**78.8**					**35.0**	**62.6**	**2.4**
85	15	1263	84.2	274	23	966	1283—1284	274 (297)	204	137	47	86	4
		Prozent ...		**21.7**	1.8	**76.5**					**34.3**	**62.8**	**2.9**
90	17	1039	61.1	92	14	933	1285—1286	92 (106)	71	41	8	30	3
		Prozent ...		**8.9**	1.3	**89.8**					**19.5**	**73.2**	**7.3**
95	10	268	26.8	20	3	245	1287	20 (23)	14	12	3	9	—
		Prozent ...		**7.5**	1.1	**91.4**					**25**	**75**	**0**
100	1	48	48.0	3	2	43	1288	4 (6)	2	2	—	2	—
		Prozent ...		**6.2**	4.2	**89.6**					—		—
110	3	31	10.3	1	0	30					**0**	**100**	**0**
		Prozent ...		**3.2**	0	**96.8**							
120	4	42	10.5	1	2	39	2673	—	—	—	—	—	—
		Prozent ...		**2.4**	4.8	**92.9**					—	—	—

Pollen zurückgingen, nur 80.25 ± 0.30 Prozent. Zum Blühen kamen im einen Falle 77.06 ± 0.44 Prozent, im anderen 57.22 ± 0.38 Prozent. Es waren also von den durch alten Pollen entstandenen Sämlingen wieder relativ mehr zugrunde gegangen (28.70 Prozent) als von den auf jungen Pollen zurückgehenden (17.45 Prozent).

Die Ergebnisse waren bei den Versuchen des Jahres 1921 — also bei Aussaat zweijähriger Samen — ganz ähnlich, nur war die Keimfähigkeit überhaupt geringer und die Sterblichkeit der Sämlinge überhaupt größer, was sicher durch das höhere Alter der Samen bedingt war. Dabei wird aber nach vergleichenden Versuchen, freilich an anderem Material, das Zahlenverhältnis der Geschlechter nicht merklich verändert.

Tabelle 19.

Weibchen 499	frischer Pollen					alter Pollen				
	Samen	Keimlinge	Prozent	blühende Pflanzen	Prozent	Samen	Keimlinge	Prozent	blühende Pflanzen	Prozent
D.....	3555	3194	**89.84**	2652	**74.60**	1130	671	**59.38**	526	**46.55**
T.....	1758	1749	**99.49**	1383	**78.67**	3658	3339	**91.28**	2261	**61.81**
W.....	1387	1313	**94.66**	1106	**79.74**	2238	1783	**79.67**	1427	**63.76**
AA.....	1381	1303	**94.35**	972	**70.39**	8270	6549	**79.19**	4529	**54.76**
AC.....	1098	1009	**91.89**	960	**87.43**	1878	1440	**76.68**	1083	**57.67**
Zus....	9179	8568	**93.34**	7073	**77.06**	17174	13782	**80.25**	9826	**57.22**
		m = ± 0.26		m = ± 0.44			m = ± 0.30		m = ± 0.38	
N.....	2601	2444	**93.96**	1510	**58.06**	1465	1004	**68.53**	593	**40.48**
S.....	4574	4180	**91.39**	3156	**68.87**	566	377	**66.61**	193	**34.10**
AB.....	1628	1342	**82.43**	1292	**79.36**	685	537	**78.39**	355	**51.82**
Zus....	8803	7966	**90.49**	5958	**67.68**	2716	1918	**70.62**	1141	**42.01**
		m = ± 0.31		m = ± 0.94			m = ± 0.87		m = 0.95	

In Tabelle 19 sind die Belege für das Ausgeführte aus den Einzeltabellen 11—18 zusammengestellt. Man sieht, daß alle Versuchspflanzen gleichsinnige Resultate gegeben haben, wenn sich auch die einzelnen im Ausmaß der Wirkung des Alters des Pollens unterscheiden. — Das Absterben der Sämlinge erfolgt teils schon im Jahr der Aussaat, teils während des Überwinterns der nicht zum Blühen gekommenen Rosetten. Es ist, obwohl jedenfalls auch Zufälligkeiten mitspielen, bei den Versuchen mit altem Pollen aus Ursachen größer, die in den Samen selbst liegen.

Was nun das Zahlenverhältnis der Geschlechter anbetrifft, so zeigen alle Tabellen, daß das »proximale« Verhältnis (1922, S. 1051), also jenes, das bei Ausschluß der Konkurrenz und bei Bestäubung mit frischem Pollen erhalten wird, auffallend genau 1♀: 1♂ ist. Die weibchenbestimmenden und die männchenbestimmenden Pollenkörner sind außerdem hinsichtlich der Schnelligkeit des Schlauchwachstums nicht sehr verschieden. Wie die Bestäubung der Weibchen D (Tabelle 11) und S (Tabelle 17) mit dem Pollen einer ganzen Anthere lehrt, sind die Schläuche der Weibchenbestimmer nur wenig schneller, ja es scheinen sogar die der Männchenbestimmer im Vorteil sein zu können (Versuche mit N, Tabelle 16), ganz im Gegensatz zu dem gewöhnlichen Verhalten des Pollens.

Je älter nun der Pollen ist, mit dem bestäubt wird, desto mehr nimmt die Zahl der Männchen zu. Schon der etwa 20tägige gibt einen deutlichen Überschuß; bei ganz altem Pollen können die — dann freilich nicht mehr umfangreichen — Versuche nur mehr Männchen hervorbringen.

Ich gebe als Fig. 1 noch die Prozentzahlen an Weibchen für die einzelnen Versuchspflanzen der Aussaat von 1920 in Kurvenform. Es zeigt sich so ganz besonders deutlich ihre Abnahme mit dem zunehmenden Alter des Pollens, der die Zunahme an Männchen und Zwittern parallel geht. Freilich sind meist — das Weibchen D macht eine Ausnahme — sehr starke Schwankungen vor-

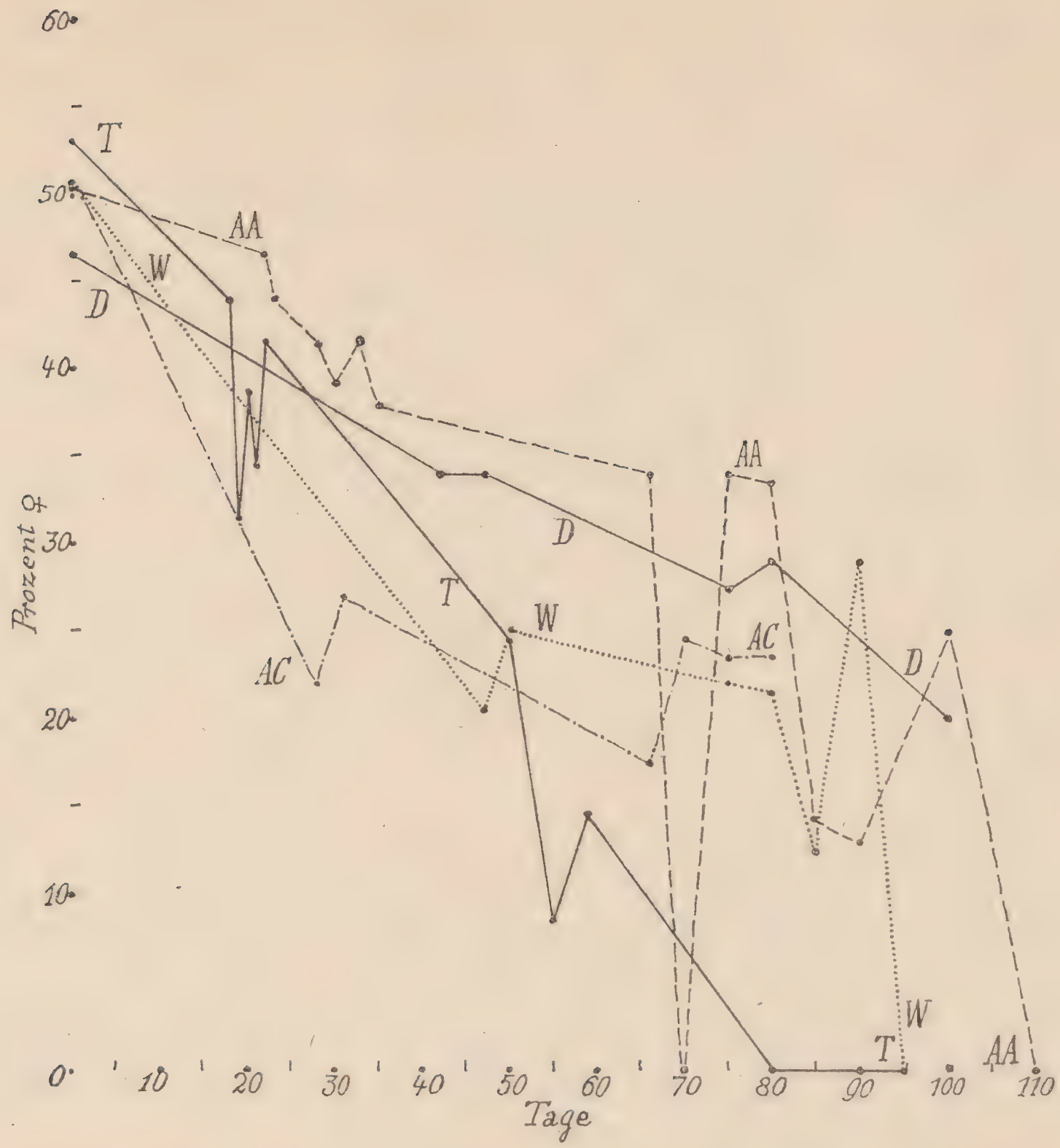


Fig. 1. Abnahme der Weibchen mit Zunahme des Alters des zur Bestäubung verwendeten Pollens bei den Versuchspflanzen 499 D, W, T, A A und A C.

handen. Schuld an ihnen ist zweierlei. Einmal, daß, je älter der Pollen wird, die Ernte desto geringer ausfällt, ganz besonders an tauglichen Samen, wie wir sahen. Der Umfang der Versuche wird so immer kleiner, und infolgedessen werden die rein zufälligen Schwankungen immer größer. So erklärt sich gewiß das auffällige Zickzack gegen das rechte Ende der Kurven bei den Versuchspflanzen W, A A und A C. Dann spielt auch die Beschaffenheit des Pollens eine Rolle. Die einzelnen Portionen haben in den Petrischalen über Natronkalk offenbar ihre Befruchtungstüchtigkeit nicht immer gleich rasch verloren; der Pollen, der an einem bestimmten Tage gesammelt worden war, behielt ihn weniger lang als der von einem anderen Tage. Schuld daran können wohl nur unerkannte Fehler in der Behandlung vor dem Einbringen in den Exsiccator oder vor und bei der Bestäubung sein, vielleicht auch Witterungseinflüsse vor dem Aufblühen der pollenliefernden männlichen Blüten. Die Kurve für das Weibchen T (Fig. 2, punktierte Linie) zeigt das besonders gut. Die Zacken zwischen dem 18. und 22. Tage und dann wieder zwischen dem 50. und 59. sehen aus wie Anhängsel an einer Linie, die vom 0. bis 80. Tage fast gerade verläuft.

In der Fig. 2 sind auch die Kurven für die Prozentzahlen der guten und fraglichen Samen und der guten Samen allein eingetragen, wobei der Maß-

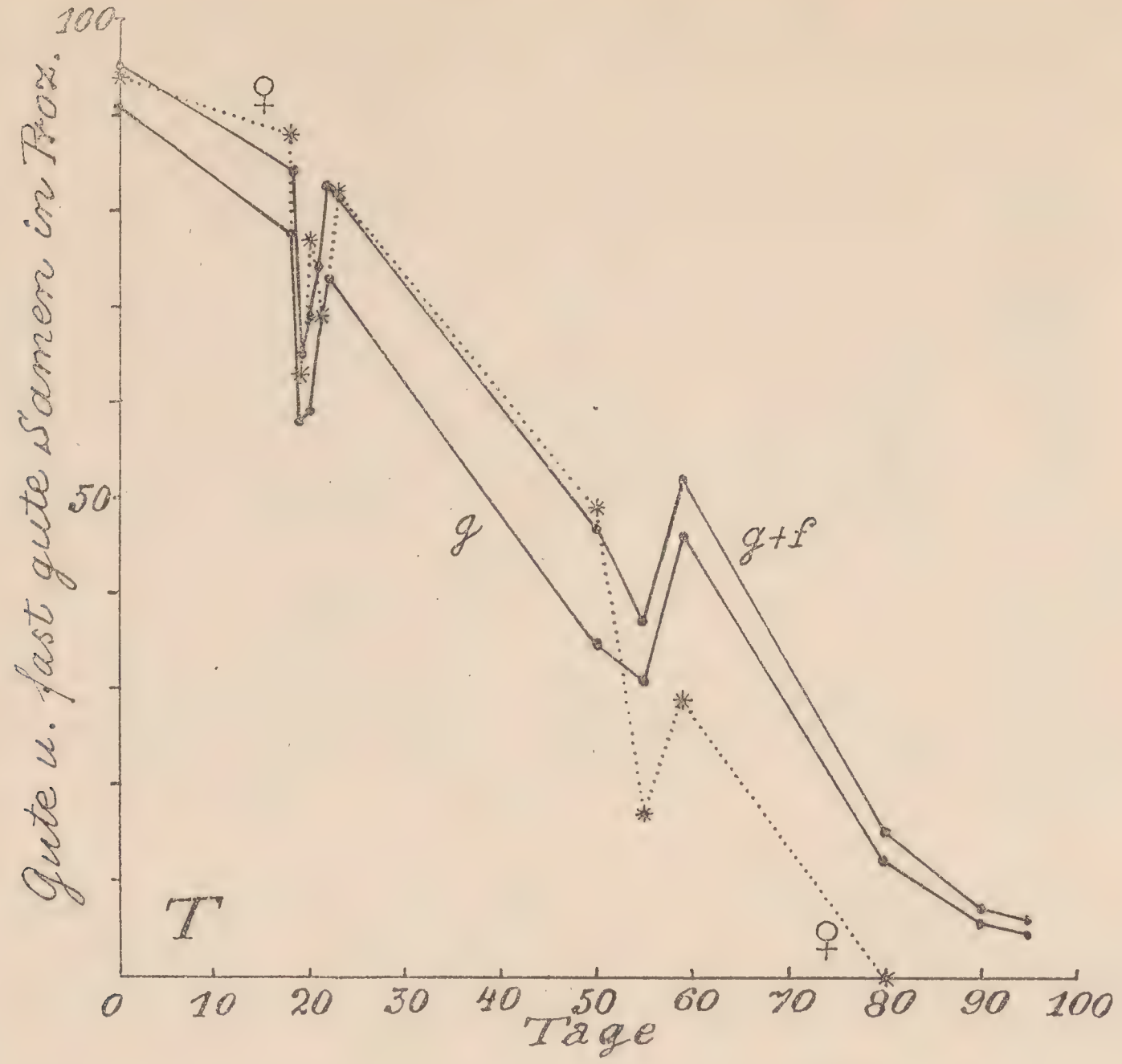


Fig. 2. Abnahme der guten (g) und der guten und fraglichen ($g+f$) Samen in der Gesamternte, sowie der Weibchen (♀) in der Nachkommenschaft der Versuchspflanze 499 T mit dem zunehmenden Alter des zur Bestäubung verwendeten Pollens. (Der Maßstab der Ordinaten ist für die Weibchen doppelt so groß als für die Samen.)

stab für ihre Ordinaten so verkürzt wurde (auf $^1/_2$), daß die Anfänge aller drei Kurven sich ungefähr decken. Man sieht, wie die Schwankungen in der Prozentzahl der Weibchen mit den Schwankungen in der Prozentzahl guter und großtauber Samen zeitlich und gleichsinnig verlaufen, besonders schön auf der linken Seite der Figur, wo die absolute Zahl der blühenden Pflanzen und der Samen noch groß ist.

Wir können daraus schließen, daß dieselbe Ursache die Abnahme der Weibchen und die der guten Samen bedingt.

Wie bei den früheren Versuchen nahm auch diesmal die Zahl der zwittrigen Individuen bei der Bestäubung mit altem Pollen sehr stark zu. Die Einzelergebnisse aus den 8 Tabellen sind in der Tabelle 20 zusammengezogen.

Der frische Pollen gab bei den Versuchen des Jahres 1920 unter 7073 Nachkommen nur 0.07 ± 0.03 Prozent Zwitter, der alte unter 9826 Nachkommen 1.32 ± 0.12 Prozent, also fast zwanzigmal mehr. Die Differenz, 1.25 Prozent, ist fast zehnmal so groß als ihr mittlerer Fehler (± 0.124) und folglich sichergestellt. Es zeigt sich auch, daß, wie zu erwarten war, die Zahl der Zwitter mit dem Alter des Pollens zunimmt: Unter 50 Tage alter brachte 0.96 ± 0.11 Prozent, über 50 Tage alter 2.62 ± 0.34 Prozent. Auch diese Differenz von 1.66 ± 0.36 kann nicht mehr Zufallswerk sein.

Tabelle 20.

Weibchen 499	Pollen frisch			Pollen alt								
				bis 50 Tage			über 50 Tage			zusammen		
	blühende Pflanzen	zwittrig	Prozent	blühende Pflanzen	zwittrig	Prozent	blühende Pflanzen	zwittrig	Prozent	blühende Pflanzen	zwittrig	Prozent
D.....	2652	2	**0.08**	298	6	2.01	228	8	3.51	526	14	**2.66**
T.....	1383	3	**0.22**	1589	19	1.20	672	17	2.53	2261	36	**1.59**
W.....	1106	—	—	1072	17	1.59	355	16	4.51	1427	33	**2.31**
AA.....	972	—	—	3945	21	0.53	584	11	1.88	4529	32	**0.71**
AC.....	960	—	—	743	10	1.38	340	5	1.47	1083	15	**1.39**
Zus....	7073	5	**0.07**	7647	73	0.96	2179	57	2.62	9826	130	**1.32**
		m = ± 0.03			m = ± 0.11			m = ± 0.34			m = ± 0.12	
N.....	1510	1	**0.07**	—	—	—	593	7	1.18	593	7	**1.18**
S.....	3156	6	**0.19**	—	—	—	193	1	0.51	193	1	**0.51**
AB.....	1292	12	**0.9**	—	—	—	355	11	3.10	355	11	**3.10**
	5958	19	**0.32**				1141	19	1.67	1141	19	**1.67**
		m = ± 0.07						m = ± 0.38			m = ± 0.38	

Die Aussaaten der Ernte dreier weiterer Weibchen im Jahre 1921 gaben ein ähnliches Resultat, wenn die Zunahme auch nicht so auffällig ist. Bemerkenswert ist die relativ große Zahl Zwitter, die die Weibchen S und besonders AB schon mit frischem Pollen gaben; mit altem entstanden aber relativ noch mehr.

Faßt man die bisher besprochenen Ergebnisse aller drei Jahre zusammen so kann man zunächst sagen, daß sich durch die Bestäubung mit altem Pollen eine Verschiebung des Geschlechtsverhältnisses zugunsten der Männchen erzielen läßt, zwar nicht bei allen Versuchspflanzen, aber doch bei der Mehrheit, und dann, wie vor allem die Versuche von 1919 lehren, mit voller Sicherheit und in sehr weitgehendem Maße.

Die Tauglichkeit des Blütenstaubes nimmt mit dem zunehmenden Alter allmählich ab, wie zu erwarten war. Es wird eine immer größere Prozentzahl der Körner funktionsunfähig. Von den noch tauglichen Körnern gibt wieder nur ein Teil lebensfähige Embryonen, eine immer größer werdende Zahl dagegen solche, die vor der Samenreife absterben, nicht mehr keimen oder nicht mehr zur Blüte kommen. Endlich entstehen trotz der größten, noch auf den Narben unterbringbaren Pollenmenge nur noch einige früh absterbende Embryonen.

Mit der Abnahme der befruchtungstauglichen Pollenkörner in einer bestimmten Menge Blütenstaub wird natürlich die Konkurrenz der Männchen- und Weibchenbestimmer schwächer; sie ist bei Bestäubung mit dem Inhalt einer Anthere wohl schon nach 20 Tagen aufgehoben. Das muß an sich eine Zunahme der Männchen hervorrufen, auch wenn sich jedes einzelne Pollenkorn dem Alterseinfluß gegenüber gleich verhält und nur der Zufall die absterbenden Körner ausliest. Diese Zunahme kann aber natürlich nicht über die »proximale« Prozentzahl der Männchen hinausgehen. Eine weitere Stei-

gerung der Männchenprozente darüber hinaus muß auf einer Veränderung des Pollens durch das Altern beruhen, die verschiedene Körner ungleich trifft. Zwei Annahmen liegen nahe:

1. Die Absterbeordnung ist bei den männchenbestimmenden Pollenkörnern eine andere als bei den weibchenbestimmenden: es werden mehr weibchenbestimmende untauglich, und so verschiebt sich das Zahlenverhältnis der Geschlechter zugunsten der Männchen, besonders wenn die Konkurrenz dem nicht mehr entgegenarbeitet. Es wird sich bei der größeren Empfindlichkeit der Weibchenbestimmer nur um einen Durchschnittswert handeln wie bei der größeren Schnelligkeit im Wachstum ihrer Schläuche, so daß selbst ganz alter Pollen noch einzelne taugliche Weibchenbestimmer enthalten kann. Die Männchen wären dann alle unter sich gleichartig, seien sie nun durch frischen oder alten Pollen entstanden.

2. Es tritt mit dem Altern des Blütenstaubes, unabhängig von der Abnahme an tauglichen Körnern, eine Änderung der Tendenz oder der Valenz bei den Weibchenbestimmern ein, die sich immer zahlreicher in Männchenbestimmer verwandeln und so die Zunahme an Männchen über das proximale Verhältnis hinaus hervorrufen. Wir hätten dann zweierlei Männchen, solche, die auf die Befruchtung durch die ursprünglichen Männchenbestimmer zurückzuführen sind, und solche, die durch veränderte Weibchenbestimmer entstanden sind.

Als zweites Ergebnis ist hervorzuheben, daß auch die Zahl der Zwitter mit dem Alter des Pollens ganz auffällig zunimmt. Sie bleibt klein — es wurden kaum mehr als 3 Prozent beobachtet —, steigt unter Umständen aber bis auf fast das Zwanzigfache der Menge, die man nach Bestäubung mit demselben, aber frischen Pollen erhält.

Dabei ist eine naheliegende Ursache für die Zunahme der Zwitter, die Aufhebung der Konkurrenz zwischen Zwitterbestimmern und den Männchen- und Weibchenbestimmern, bei dem gealterten Pollen ausschließbar. Daß sie sehr wirksam sein kann, werden wir bald sehen, daß sie aber wenigstens bei den Bestäubungen des Jahres 1919 keine Rolle gespielt hat, ist auch sicher. Denn bei den Kontrollversuchen mit sehr wenig Pollen war ja hier die Konkurrenz ausgeschlossen, und sie gaben dennoch nur ganz wenig Zwitter.

Dann gilt dieselbe Überlegung wie oben. Die Sorte Pollenkörner, durch die die Zwitter entstehen, könnte gegen die Einflüsse des Alterns besonders resistent sein und häufiger als die Weibchenbestimmer, und selbst als die Männchenbestimmer, tauglich bleiben. Oder das Altern wirkte auf den Zustand eines Teiles der Pollenkörner so ein, daß sie zwittrige Nachkommen hervorbrächten. Solche Körner müßten auch ganz einzeln beim frischen Pollen vorhanden sein (weil auch er Zwitter geben kann); es nähme nur ihre Zahl zu.

Ich habe früher für die Zunahme der Männchen die Selektion durch das Alternlassen und für die Zunahme der Zwitter eine Einwirkung auf die Valenzen für wahrscheinlicher gehalten. Inzwischen hat die Fortsetzung der Versuche eine Reihe von Tatsachen zutage gefördert, die mir merkwürdig erscheinen, und über die ich noch kurz berichten will. Die Mitteilung der

Belege und die Auswertung für unsere Fragen müssen auf später verschoben werden, wenn weitere, im Gang befindliche Versuchsreihen abgeschlossen sind.

Der Kürze wegen will ich von nun an Pflanzen, die durch Bestäubung mit altem Pollen entstanden sind, gerontogon (von ΓÉΡΩΝ Greis und ΓÓΝΟC Sprößling) und die durch frischen Pollen entstandenen neogon (von ΝÉΟC frisch, jung und ΓÓΝΟC) nennen.

1. Die gerontogonen Männchen unterscheiden sich von ihren neogonen Brüdern dadurch, daß ihr Pollen im Durchschnitt schlechter ist. Die Antheren mancher Stöcke springen überhaupt nicht mehr oder nur einzeln auf (ohne daß etwa als Kompensation das Gynoeceum weiter entwickelt würde); die Pflanzen sind dann einfach völlig sterile Männchen.

Schlechter Pollen kommt hie und da auch bei neogonen Männchen vor, wie umgekehrt, und viel häufiger, bei gerontogonen sehr guter. Es handelt sich also nicht um etwas ganz Neues, sondern bei den gerontogonen Männchen nur um eine Verschiebung des Verhältnisses der Pflanzen mit gutem und schlechtem Pollen zugunsten der letzteren.

2. Zu meiner Überraschung fand ich ferner, daß die gerontogonen Männchen zum guten Teil thelygen sind, ihr (frischer) Pollen also fast ausschließlich oder ausschließlich weibliche Nachkommen hervorbringt. Die übrigen gerontogonen Männchen und alle ihre neogonen Brüder geben dagegen die gewöhnliche, aus Männchen und Weibchen bestehende Nachkommenschaft.

Die bisherigen Ergebnisse (mit Männchen aus den Versuchspflanzen 499 D bis AC, Tabellen 11—18) sind in der kleinen Tabelle 21 zusammengestellt. Die Männchen sind nach der Prozentzahl Männchen, die sie hervorgebracht haben, in Klassen mit einem Spielraum von je 5 Prozent gebracht.

Tabelle 21.

Prozente Männchen in Klassen.

Pollen-lieferanten	0	—5	—10	—15	—20	—25	—30	—35	—40	—45	—50	—55	—60	—65	—70	—75	—80	*n*
neogon					1	2		7	15	9	6	5	2				1	48
gerontogon..	**12**	**7**	**3**	**1**	2	8	4	9	10	6	21	10	3	3				99

Keines der 48 neogonen Männchen brachte weniger als 15 Prozent Männchen hervor; die kleinste Zahl war 18.6 Prozent ($n = 296$). Von den 99 gerontogonen Männchen gaben 23 weniger als 15 Prozent, nämlich 12 überhaupt keine, 7 weniger als 5 Prozent, 3 weniger als 10 Prozent und eines 10.3 Prozent. Während die Kurve für die neogonen Männchen eingipflig ist, und die Mediane etwa bei 40 Prozent liegt, ist sie bei den gerontogonen zweigipflig. Der eine Gipfel liegt etwa bei 45 Prozent, der andere bei 0 Prozent; dazwischen findet sich ein ganz tiefer Sattel.

Für etwa 20 der wenigen Männchen, die von den thelygenen Männchen wieder hervorgebracht worden waren, konnte ich zeigen, daß sie alle, ohne Ausnahme, wieder ausgesprochen thelygen waren, also wieder fast nur oder nur Weibchen gaben. Die Thelygenie war also genotypisch festgelegt.

Das Alternlassen scheint demnach bei dem Pollen eine dauernde Veränderung bewirkt zu haben. Ich sage »scheint«, weil die Zahl der Kontrollversuche mit neogonen Männchen gleicher Herkunft, 48, nicht sehr groß ist, und ich es nicht für ausgeschlossen halte, daß auch unter ihnen sich einzelne thelygene befinden. Dann könnte eine Selektionswirkung eine Zunahme mit dem Altern verursachen, müßte es freilich nicht tun. Der Ausfall weiterer Versuche, die ich 1923 ausgeführt habe, wird wohl die Antwort sicherer gestalten; absolute Gewißheit wird sich aber auf diesem Wege nicht gewinnen lassen, denn die Zahl der geprüften neogonen Männchen läßt sich nicht ins Unbegrenzte vermehren, und man kann immer sagen, daß unter ihnen nur zufällig keines der sehr seltenen thelygenen war.

3. Ebenso überraschend war das Verhalten der Zwitter. Leider habe ich ihnen zunächst nicht volle Aufmerksamkeit geschenkt, weil damals von anderer Seite im Institute über zwittrige Melandrien gearbeitet wurde. Soviel ist aber schon sichergestellt, daß sich fast ausnahmslos die gerontogonen und die neogonen Zwitter gleicher Herkunft verschieden verhielten, die gerontogonen unter sich und die neogonen unter sich aber gleich.

Der Pollen der neogonen Zwitter gab mit gewöhnlichen Weibchen (in 6 unter 7 Fällen) eine Nachkommenschaft, die aus Männchen und (mehr) Weibchen bestand; daneben konnten in wechselnder, immer geringer Menge auch wieder Zwitter auftreten.

Der Pollen der gerontogonen Zwitter brachte (in 12 von 13 Fällen) dagegen in entsprechenden Versuchen, also mit gewöhnlichen Weibchen verschiedener Herkunft, (fast) nur Weibchen hervor, dazu wieder einzelne Zwitter. Im Gewächshaus isoliert oder selbstbestäubt gaben sie (in 12 von 14 Fällen) ebenfalls (fast) nur Weibchen und meist dazu Zwitter in geringer, wechselnder Zahl. Kastriert und mit dem Pollen normaler Männchen bestäubt, brachten sie dagegen (in 5 Fällen) etwa gleich viel Männchen und Weibchen hervor, daneben wieder eine sehr bescheidene Anzahl Zwitter. Es ist das ein Typus Zwitter, wie ihn weder G. H. Shull (1911, 1912) noch G. und P. Hertwig (1922) beobachtet haben.

Die Zahl der Zwitter kann sehr weitgehend von der Pollenmenge abhängen, die zur Bestäubung verwendet wird. Das Weibchen 499 D gab, mit sehr viel Pollen des Zwitters 459 (von Weibchen 221, bestäubt mit Pollen des Männchens 214, 15 Tage alt) belegt, unter 2209 Pflanzen 10 zwittrige, also **0.45** ± 0.143 Prozent, mit sehr wenig Pollen bestäubt dagegen unter 1447 Pflanzen 40 zwittrige, also **2.76** ± 0.431 Prozent. Die Differenz von 2.31 Prozent ist etwa fünfmal so groß als ihr mittlerer Fehler (± 0.45 Prozent) und sichergestellt[1]. Der Rest der Nachkommen waren in beiden Fällen Weibchen.

Wie bei den gerontogonen Männchen ein guter Teil thelygen ist, so ist also bei den Zwittern die ganz überwiegende Mehrzahl thelygen geworden.

---

[1] Die Zwitterbestimmer mußten demnach bei der Konkurrenz um die Eizellen noch sehr viel stärker benachteiligt sein, als die Männchenbestimmer es gewöhnlich sind.

Die Parallelität der Altersreaktionen liegt auf der Hand. Die Zwitter sind aber Zwitter geblieben und geben, wie wir sahen, mit normalen Männchen immer noch zur Hälfte Männchen, zur Hälfte Weibchen.

Zusammenfassung der wichtigsten Versuchsergebnisse.

1. Das Alter der Samenanlagen, und damit das der Eizellen, hat auf das Zahlenverhältnis der Geschlechter gar keinen Einfluß. Die Zahl der befruchteten Samenanlagen, die Zahl der gut aussehenden Samen in der dann noch erhaltenen Ernte und die Zahl der Sämlinge, die zum Blühen kommen, ist dagegen nach extrem später Bestäubung wesentlich geringer als bei rechtzeitiger. Das gleiche ist, wenn auch in viel schwächerem Grade, bei sehr früher Bestäubung der Fall.

2. Das Alter der Pollenkörner, und damit das der Spermakerne, hat gewöhnlich sehr starken Einfluß. Mit dem zunehmenden Alter nimmt die Größe der Ernte, die Zahl der guten Samen in der Ernte, die Zahl der Keimlinge überhaupt und die Zahl der Sämlinge, die zum Blühen kommen, stetig mehr ab, bis zuletzt (bei 120tägigem Pollen), trotz reichlichster Bestäubung, nur noch einige absterbende Embryonen entstehen.

Es nimmt ferner die Prozentzahl der Männchen in der Nachkommenschaft zu, bis, mit sehr altem Pollen, fast nur noch solche entstehen. Ebenso wächst die Zahl der Zwitter, und zwar stärker als die der Männchen.

Bei einem Paar der Versuchspflanzen erwies sich jedoch das Alternlassen des Pollens wirkungslos, bei einem andern Paar nahm sogar die Zahl der Männchen dadurch ab (Tabelle 9).

3. Die durch alten Pollen entstandenen, gerontogonen Männchen haben im Durchschnitt schlechteren Pollen als ihre neogonen Brüder. Es gibt darunter ganz sterile.

4. Etwa ein Viertel der untersuchten gerontogonen Männchen war thelygen, brachte also nur Weibchen oder ganz überwiegend solche hervor, während der Rest und alle ihre neogonen Brüder, die geprüft wurden, die gewöhnliche Nachkommenschaft aus Männchen und Weibchen gaben. Die Thelygenie ist erblich.

5. Die gerontogonen Zwitter waren fast ausnahmslos thelygen, brachten also, selbst befruchtet oder als Pollenlieferanten benutzt, fast nur Weibchen und einige Zwitter hervor, während ihre neogonen Geschwister Männchen und Weibchen und ebenfalls einige Zwitter gaben. Die Thelygenie ist erblich.

6. Durch Ausschluß der Konkurrenz kann die Prozentzahl Zwitter sehr auffällig gesteigert werden.

7. Es gibt ausgesprochen »oligotoke« Weibchen, bei denen auch ein Überschuß an frischem, tauglichem Pollen nur einen oft sehr geringen Teil der Samenanlagen befruchten kann.

Allen, die mir bei diesen Versuchen geholfen haben, vor allem Frl. Dr. LILIENFELD, Hrn. Dr. KAPPERT, Frau Dr. BÉLAŘ-BENGELSDORFF und Frau HEINRICH-LAU, danke ich auch an dieser Stelle bestens.

Literaturverzeichnis.

Th. Ciesielski, 1911. Quomodo fiat, ut mox proles masculina mox feminina oriatur apud plantas, animalia et homines. Lwów (Lemberg).

C. Correns, 1918. Fortsetzung der Versuche zur experimentellen Verschiebung des Geschlechtsverhältnisses. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. S. 1175 u. f.

—, 1921 a. Versuche, bei Pflanzen das Geschlechtsverhältnis zu verschieben. Hereditas II 1.

—, 1921 b. Zweite Fortsetzung der Versuche zur experimentellen Verschiebung des Geschlechtsverhältnisses. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. S. 330 u. f.

—, 1922. Alkohol und Zahlenverhältnis der Geschlechter bei einer getrenntgeschlechtigen Pflanze (*Melandrium*). Naturwissenschaften, Heft 49, S. 1049.

G. und P. Hertwig, 1922. Die Vererbung des Hermaphroditismus bei *Melandrium*. Zeitschr. f. indukt. Abstamm.- u. Vererbungslehre, Bd. 28, S. 259.

F. Heyer, 1884. Untersuchungen über das Verhältnis des Geschlechts bei einhäusigen und zweihäusigen Pflanzen. Ber. d. landw. Instit. d. Univ. Halle, V. Heft.

H. Hofmann, 1871. Zur Geschlechtsbestimmung. Botan. Zeitung, Bd. 29, Sp. 81.

—, 1881. Rückblick auf meine Variationsversuche. Botan. Zeitung, Bd. 39, Sp. 345.

—, 1885. Über Sexualität. Botan. Zeitung, Bd. 43, Sp. 145.

Fl. Lilienfeld, 1921. Die Resultate einiger Bestäubungen mit verschiedenaltrigem Pollen bei *Cannabis sativa*. Biol. Centralbl., Bd. 41, S. 296.

M. Pfundt, 1909. Der Einfluß der Luftfeuchtigkeit auf die Lebensdauer des Blütenstaubes. Jahrb. f. wissensch. Botanik, Bd. 47, Heft 1, S. 1.

G. H. Shull, 1911. Reversible Sex-Mutants in *Lychnis dioica*. Botan. Gaz. Vol. 52, S. 239.

—, 1912. Hermaphrodite females in *Lychnis dioica*. Science, N. S. Vol. 36.

E. Strasburger, 1900. Versuche mit diözischen Pflanzen in Rücksicht auf Geschlechtsverteilung. Biol. Centralbl. XX, S. 657.

—, 1910. Über geschlechtbestimmende Ursachen. Jahrb. f. wissensch. Botan., Bd. 48, S. 427.

Ausgegeben am 3. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1924 X—XIII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 20. März. (S. 105)
SCHOTTKY: Über die Harmonie des Thetasystems. I. Mitteilung. (S. 106)
Adresse an Hrn. JOSEPH PARTSCH zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 7. März 1924. (S. 119)
Klassensitzung am 27. März. (S. 121)
HELLMANN: Untersuchungen über die jährliche Periode der Niederschläge in Europa. (S. 122)
ZIMMERMANN: Die Knickfestigkeit offener und geschlossener Stabzüge (Stabringe). (S. 153)
MÜLLER-BRESLAU: Versuche mit auf Biegung und Knickung beanspruchten Flugzeugholmen. (Mitteilung vom 13. März.) (S. 166)
Gesamtsitzung am 3. April. (S. 177)
Klassensitzung am 10. April. (S. 178)

Library of Congress
JUN 1 E 1924
Smithsonian Deposit

BERLIN 1924

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

X. Gesamtsitzung. 20. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Schottky sprach Über die Harmonie des Thetasystems.

Die Arbeit behandelt zuerst die durch Riemann angeregte Aufgabe, von der schon Weierstrass eine Lösung gegeben hat: Konvergenz und Divergenz der Thetareihe durch sichern Beweis zu entscheiden. Sie kommt bis zur Aufstellung des Thetasystems, dessen genauere Analyse später gegeben werden soll. — Es ist der Versuch einer Thetatheorie ohne den Gebrauch von Charakteristiken.

2. Vorgelegt wurden Wilhelm Diltheys Gesammelte Schriften, 5. und 6. Band (Leipzig und Berlin 1924) und Monumenta Germaniae historica, Scriptores rerum Germanicarum, Nova Series, tomus III: Chronica Iohannis Vitodurani (Berlin 1924).

3. Das korrespondierende Mitglied Hr. Joseph Partsch in Leipzig hat am 7. März sein fünfzigjähriges Doktorjubliäum gefeiert. Die Akademie hat an ihn eine Adresse gerichtet, die in diesem Stück abgedruckt ist.

Über die Harmonie des Thetasystems.

Von F. Schottky.

Erste Mitteilung.

Wenn man die Hefte der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften durchblättert, wird man fast erdrückt durch die Fülle dessen, was in diesen Wissenschaften geleistet worden ist. Aber man bemerkt auch, daß manches unfertig ist, manches Wichtige in einer Form gegeben, die unmöglich bestehen bleiben darf; die Entdecker hielten sich oft zu sehr an ihre unbedeutenderen Vorgänger, ohne zu berücksichtigen, daß neuer Wein auch neue Schläuche braucht. Vielleicht das schönste, was wir in der Mathematik haben, könnte die Theorie der Thetafunktionen sein. Aber sie besteht vorläufig aus Problemen, und damit sie erweitert werden kann, ist es nötig, daß man mit einiger Kritik auf ihre ersten Anfangsgründe zurückgeht. Ich will versuchen, dies zu tun, soweit meine bescheidene Kraft ausreicht. Ansätze dazu sind schon längst von Weierstrass gemacht worden, von Frobenius, der die Begriffe syzygetisch und azygetisch geprägt hat, auch von mir.

In dem Ausdruck der Thetareihe ist das wesentliche die quadratische Form, die darin vorkommt. Die Konvergenz, zum Teil auch die Sätze über die Funktion $\vartheta(v_1, v_2 \cdots v_n)$, hängen davon ab. Um eine feste Grundlage zu haben, ist es vor allem nötig, diejenigen Eigenschaften der quadratischen Form zusammenzustellen, die man braucht. Die Idee der Thetareihe selbst, wie sie in Riemanns Theorie der Abelschen Funktionen auftritt, kann durch die Arbeiten von Rosenhain und Göpel, aber auch durch die Greenschen Sätze hervorgerufen sein; denn in der Potentialtheorie kommt, wenn mehrfach begrenzte Räume oder ebene Gebiete betrachtet werden, die quadratische Form gleichfalls vor. Vielleicht traf beides zusammen.

I. Wenn man überhaupt mit Funktionen von mehreren Veränderlichen zu rechnen hat, ist es oft zweckmäßig, den ganzen Zug der Veränderlichen — Weiestrass sagt: Komplex — als eine Einheit aufzufassen. Zwei Züge v und v' von je n Größen $v_1, v_2 \cdots v_n$ und $v'_1, v'_2 \cdots v'_n$ lassen sich addieren und subtrahieren, indem man die gleichstelligen Glieder addiert oder subtrahiert; der Zug v läßt sich mit einem numerischen Faktor ρ multiplizieren, indem man jedes Glied mit ρ multipliziert; der Zug 0 ist derjenige, der aus lauter Nullen besteht. Hiernach ist klar, was man unter $f(v+v')$, $f(v-v')$, $f(\rho v)$, $f(0)$ zu verstehen hat, auch wenn $f(v)$ eine Funktion von mehreren Veränderlichen ist.

Das reicht nicht ganz aus; ich führe auch das Produkt vv' zweier Züge ein, verstehe darunter aber nicht wieder einen Zug, sondern die Summe der Produkte aller gleichstelligen Glieder von v und v'.

Es sei $G(m)$ eine homogene quadratische Funktion des $n$gliedrigen Zuges m. Dann ist $G(\rho m) = \rho^2 G(m)$, speziell: $G(2m) = 4G(m)$, $G(-m) = G(m)$, $G(im) = -G(m)$.

Statt m setze ich: $m + m't$. m und m' sollen zwei Züge sein, t eine willkürliche Veränderliche. Es ist dann $G(m + m't)$ eine quadratische Funktion von t:

$$G(m + m't) = A + 2Bt + Ct^2,$$

und hier ist: $A = G(m)$, $C = G(m')$, B die Polare von $G(m)$ in bezug auf m', d. h. diejenige symmetrische bilineare homogene Funktion von m und m', die in die quadratische $G(m)$ übergeht, wenn man m' mit m zusammenfallen läßt. Wir bezeichnen sie mit $G(m, m')$, so daß

$$A = G(m), \quad B = G(m, m'), \quad C = G(m')$$

ist. — Indem man $t = 1$ und $t = -1$ setzt, und addiert oder subtrahiert, bekommt man die beiden Formeln:

$$G(m + m') + G(m - m') = 2G(m) + 2G(m'),$$
$$G(m + m') - G(m - m') = 4G(m, m').$$

Die erste ist die Funktionalgleichung der quadratischen Form. Die zweite gestalten wir um, indem wir

$$m = h + ik, \quad m' = h - ik$$

setzen, so daß h und k reelle Züge bedeuten, wenn m und m' konjugiert-komplexe sind. Sie geht dadurch über in:

$$G(h) + G(k) = G(m, m').$$

Fassen wir $G(m, m')$ als lineare Funktion von m' auf, so sind die n Koeffizienten homogene lineare Funktionen von m. Wenn diese linear-unabhängig sind, so daß es nicht möglich ist, einen Zug c aufzustellen, für den, bei willkürlichem m', $G(c, m') = 0$ ist, so heißt die Form regulär. Andernfalls nennen wir sie singulär.

Es sei $G(m)$ eine singuläre Form, und c der von 0 verschiedene Zug, für den bei willkürlichem m identisch $G(m, c) = 0$ ist. Dann ist auch $G(c, c) = 0$, also $G(c) = 0$, und die Gleichung

$$G(m + ct) = G(m) + 2G(m, c)t + G(c)t^2$$

wird: $G(m + ct) = G(m)$. Eine Form ist demnach dann und nur dann singulär, wenn es möglich ist, einen von 0 verschiedenen Zug c anzugeben, für den, bei willkürlichem m, $G(m + ct)$ von t unabhängig ist.

Wir nehmen jetzt $G(m)$ als reguläre Form an und denken uns $G(m, m')$ dargestellt als lineare homogene Funktion von m'. Die n Koeffizienten M_1, $M_2 \cdots M_n$ bilden einen Zug M. Die Glieder sind von m abhängig; sie sind eine Reihe von n homogenen linearen, aber untereinander linear-unabhängigen Funktionen von $m_1, m_2 \cdots m_n$. M' sei der Zug, in den M übergeht, wenn

man m durch m' ersetzt. Da die Glieder von M linear-unabhängig sind, so kann man, durch Auflösung von n linearen Gleichungen, die Glieder von m linear und homogen durch die von M ausdrücken. Dadurch wird $G(m)$ zu einer homogenen quadratischen Funktion von M; man kommt zu einer völlig bestimmten homogenen quadratischen Funktion $H(v)$ der unabhängigen Veränderlichen $v_1, v_2 \cdots v_n$, die die Eigenschaft hat, in $G(m)$ überzugehen, wenn man für v den von m linear abhängigen Zug M einsetzt:

$$H(M) = G(m).$$

Ebenso ist: $H(M') = G(m')$. Vermehrt man m um m', so geht auch M in $M+M'$ über. Daher ist auch $H(M+M') = G(m+m')$. $G(m, m')$ aber ist die Summe $\sum_{\alpha=1}^{n} M_\alpha m'_\alpha$; sie ist demnach das Produkt der Züge M und m'. Zugleich, da $G(m, m')$ symmetrisch ist, das Produkt der Züge M' und m:

$$G(m, m') = Mm' = M'm.$$

Die Gleichung $G(m+m') - G(m) - G(m') = 2\,G(m, m')$ kann jetzt durch folgende ersetzt werden:

$$H(M+M') - H(M) - H(M') = 2\,M'm.$$

In dieser Identität kommt der Zug M' vor, aber nicht m'. Da der Zug M' willkürlich ist, so ist, für willkürliche Veränderliche $v_1, v_2 \cdots v_n$:

$$H(v+M) - H(v) - H(M) = 2\,mv,$$

wobei mv die Abkürzung ist für $m_1v_1 + \cdots + m_nv_n$.

Wir schreiben die Gleichung noch etwas anders. Es ist $H(M) = G(m)$, aber $G(m) = G(m, m)$, also:

$$G(m) = H(M) = Mm.$$

Die quadratische Form $G(m)$ ist das Produkt der beiden voneinander linear abhängigen Züge m und M. Dadurch kommen wir zu der Formel:

$$H(v+m) - H(v) = m(2v+M).$$

Es ist noch eine Bemerkung zu machen über reelle quadratische Formen, mit reellen Koeffizienten und reellen Veränderlichen. Es sei $G(m)$ irgendeine solche Form, und $s(m)$ die ganz spezielle:

$$s(m) = \sum_{\alpha=1}^{n} (m_\alpha^2).$$

Beschränkt man m durch die Bedingung $s(m) = 1$, so hat $G(m)$ einen Maximalwert; ich nenne ihn $\varkappa$. Ist $\varkappa$ positiv oder 0, so gibt es Züge m, die der Bedingung $s(m) = 1$ genügen — also von 0 verschiedene —, für die $G(m)$ positiv, oder wenigstens solche, für die $G(m) = 0$ wird; die Form $G(m)$ ist dann: nicht wesentlich negativ. Ist aber $\varkappa$ negativ, so ist $G(m)$ negativ für alle Züge m, die der Bedingung $s(m) = 1$ genügen, und somit, da $G(m)$ homogen ist, negativ überhaupt für alle Züge m, abgesehen von $m = 0$; die Form ist wesentlich negativ.

Nimmt man $\varkappa = 0$ an, so wird $G(m)$ nie positiv; aber es gibt reelle Züge c, die der Bedingung $s(c) = 1$ genügen — also von 0 verschiedene —, für die $G(c) = 0$ ist. Der Ausdruck

$$G(c+mt) = G(c) + 2G(c, m)t + G(m)t^2$$

darf für keinen reellen Wert von t positiv sein. Daraus folgt, daß nicht nur $G(c)$, sondern auch $G(c, m)$ gleich 0 sein muß, für willkürliche Züge m. Man hat den Satz:

Wenn $\varkappa = 0$ ist, so ist die Form $G(m)$ singulär.

II. Die Thetareihe ist — ich richte mich hier nach RIEMANNS Theorie der ABELschen Funktionen — die Summe der Werte, die der Ausdruck

$$e^{G(m)+2mv} = e^{m(2v+M)}$$

annimmt, wenn man für m alle Züge ganzer Zahlen einsetzt. Damit die Reihe eine Funktion von v darstellt, $\vartheta(v)$, muß sie unbedingt konvergent sein. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß der reelle Teil von $G(m)$ wesentlich negativ ist. RIEMANN sagt darüber: »Damit diese Reihe konvergiert, muß der reelle Teil von $\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'}$ wesentlich negativ sein.« Daß diese Bedingung auch genügt, hebt RIEMANN nicht besonders hervor, und weder für die Konvergenz in dem einen Falle noch für die Divergenz in dem andern gibt RIEMANNS Abhandlung den Beweis. Damit hat RIEMANN den Mathematikern eine Aufgabe gestellt. Für RIEMANNS Theorie ist nur wichtig, daß die Reihe konvergiert, wenn die von ihm gestellte Bedingung erfüllt ist; denn die von ihm aufgestellte quadratische Form hat grade diese Eigenschaft, und seinen Schülern wenigstens hat RIEMANN in einer Vorlesung 1861/62 (vgl. Abhandlung XXIX der Werke RIEMANNS) das eine genau bewiesen, daß die Thetareihe unter der angegebenen Beschränkung von $G(m)$ konvergiert. Eine vollständige Lösung des Problems ist von WEIERSTRASS gegeben worden (WEIERSTRASS, Werke, Bd. III, S. 115—122). Aber die interessante Aufgabe hat mehrere Lösungen.

Ich betrachte zuerst die reelle Thetareihe, in der die einzelnen v_α und auch alle Koeffizienten von $G(m)$ reell sind. Ich führe den Maximalwert $\varkappa$ ein, den $G(m)$ hat für die reellen Züge m, die der Bedingung $s(m) = 1$ genügen und zerlege $G(m)$ in

$$G(m) = \varkappa s(m) + g(m),$$

so daß $g(m)$ eine quadratische Form ist, die für $s(m) = 1$ den Maximalwert 0 hat. Diese Form ist notwendig singulär; es gibt daher von 0 verschiedene reelle Züge c, für die $g(m+ct)$ und damit auch $g(m-ct)$ von t unabhängig ist:

$$g(m-ct) = g(m).$$

Es läßt sich, wenn das Polynom $g(m)$ gegeben ist, leicht eine positive Größe σ so bestimmen, daß $|g(m')| < \sigma$ ist für alle Züge m', deren Glieder zwischen -1 und $+1$ liegen; man kann z. B. für σ die Summe der absoluten Werte aller Koeffizienten nehmen. Dann ist, für diese Züge m':

$$g(m') > -\sigma.$$

Da die Glieder c_α des Zuges c nicht sämtlich 0 sind, kann ich den Faktor t so wählen, daß für eins der Glieder tc_α gleich einer willkürlich gegebenen ganzen Zahl h wird. Ich zerlege nun den Zug ct in die Differenz zweier:

$$ct = m - m',$$

von denen der eine, m, aus lauter ganzen Zahlen besteht, während die Glieder von m' größer oder gleich 0, und kleiner als 1 sind. Der Zug m enthält dann die willkürliche Zahl h; denn da, für den einen Wert von α, $c_\alpha t = h$ ist, so hat man für diesen: $h = m_\alpha - m'_\alpha$, und daraus folgt: $m_\alpha = h$, $m'_\alpha = 0$.

Zugleich ist $m' = m - ct$, und daher $g(m') = g(m)$. $g(m')$ aber ist größer als $-\sigma$, da die Glieder von m' zwischen -1 und 1 liegen. Folglich ist $g(m) > -\sigma$. Damit ist ein ganzzahliger Zug m bestimmt, für den $g(m) > -\sigma$ ist. Dieser Zug enthält eine willkürlich angenommene Zahl h; folglich gibt es unendlich viele ganzzahlige Züge, für die $g(m) > -\sigma$ ist.

Wäre $\varkappa \geqq 0$, so wäre für alle diese Züge auch $G(m) > -\sigma$. Dann wäre, für jeden, auch einer der beiden Werte: $G(m) + 2mv$ und $G(m) - 2mv$ (die ineinander übergehen, wenn man m mit $-m$ vertauscht), größer als $-\sigma$. Die Thetareihe enthielte dann unendlich viele Glieder, die größer wären als $e^{-\sigma}$; sie müßte daher divergent sein.

Dagegen konvergiert sie, wenn $\varkappa$ negativ ist. Wir wählen hier eine negative Zahl λ zwischen 0 und $\varkappa$: $0 > \lambda > \varkappa$, und bezeichnen die positive Differenz $\lambda - \varkappa$ mit μ. Da $g(m)$ nie positiv ist, so ist für alle reellen Züge m: $G(m) \leqq \varkappa s(m)$.

Es ist aber: $2m_\alpha v_\alpha \leqq \mu m_\alpha^2 + \frac{1}{\mu} v_\alpha^2$. Addiert man diese n Ungleichungen, so folgt:

$$2mv \leqq \mu s(m) + \frac{1}{\mu} s(v), \quad \text{und da } \varkappa + \mu = \lambda \text{ ist:}$$

$$G(m) + 2mv < \lambda s(m) + \frac{1}{\mu} s(v).$$

Wir nehmen jetzt m als Zug ganzer Zahlen an und bezeichnen den echten Bruch e^λ mit q. Dann ist:

$$e^{G(m) + 2mv} < q^{s(m)} \cdot e^{\frac{1}{\mu} s(v)}.$$

Die Summe $\sum q^{s(m)}$, erstreckt über alle ganzzahligen Züge m, ist nichts anderes als die $n$te Potenz der offenbar konvergenten: $1 + 2q + 2q^4 +$ usw., deren Wert kleiner als $\frac{1+q}{1-q}$ ist. Daraus folgt:

Die reelle Thetareihe konvergiert, wenn $\varkappa$ negativ ist, und ihr Wert ist kleiner als

$$\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^n e^{\frac{1}{\mu} s(v)}$$

q ist hierbei irgendeine positive Größe, deren Wert zwischen eins und $r = e^\varkappa$ liegt; μ der Logarithmus des Quotienten $\frac{q}{r}$.

Gehen wir jetzt zur imaginären Thetareihe über. Sie konvergiert dann und nur dann, wenn die absoluten Beträge der einzelnen Glieder eine endliche Summe haben. Es ist aber

$$\left| e^{G(m)+2mv} \right| = e^{X(m)+2mw},$$

wo $X(m)$ den reellen Teil von $G(m)$, w den des Zuges v bedeutet. Für die Konvergenz der imaginären Thetareihe ist demnach notwendig und hinreichend, daß der reelle Teil von $G(m)$ wesentlich negativ ist.

Eine Frage ist noch aufzuwerfen: Kann, wenn die RIEMANNsche Beschränkung angenommen wird, die Form $G(m)$ singulär sein? Wäre sie das, so müßte ein von o verschiedener reeller oder ein imaginärer Zug c existieren, für den, bei willkürlichem m, $G(m, c) = o$ wäre. Also wäre auch $G(c, c') = o$, wenn c' den zu c konjugierten Zug bedeutet. Da nun, wenn man an Stelle von c und c' durch die Gleichungen $c = h + ik$, $c' = h - ik$ die beiden reellen Züge h, k einführt, $G(c, c') = G(h) + G(k)$ ist, so wäre $G(h) + G(k) = o$. Mithin auch $X(h) + X(k) = o$, wenn wir wieder unter $X(m)$ den reellen Teil von $G(m)$ verstehen.

Von den beiden Größen $X(h)$ und $X(k)$ kann keine positiv sein; aber auch keine negativ, weil sonst die andere positiv wäre; sie können auch nicht o sein, ohne daß beide Züge h und k und damit auch der Zug $m = h + ik$ identisch o wäre. Folglich ist die Form $G(m)$ notwendig regulär, und wir können sie in die Form $H(M)$ überführen.

III. Die Konvergenzbedingung, die sich nur auf die Form $G(m)$ bezieht, und zwar nur auf ihren reellen Teil, sei erfüllt. Dann ist durch die Reihe

$$\vartheta(v) = \sum_{(m)} e^{G(m)} \cdot e^{2mv} = \sum_{(m)} e^{m(2v+M)}$$

eine Funktion analytisch gegeben, die erstens regulär ist für alle endlichen Werte von $v_1, v_2 \cdots v_n$ — eine ganze Transzendente, wir sagen kurz: eine ganze Funktion, da das hier nicht mißverstanden werden kann. Zweitens ist $\vartheta(v)$ grade — da man in dem Ausdruck m durch $-m$ ersetzen darf —; es ist $\vartheta(-v) = \vartheta(v)$. Drittens ist $\vartheta(v)$ periodisch; man kann, ohne den Wert der Funktion zu ändern, v um einen Zug $L = l\pi i$ vermehren, in dem $l_1, l_2 \cdots l_n$ ganz willkürliche ganze Zahlen sind, ebenso wie $m_1, m_2 \cdots m_n$ im Zuge M. Andre Perioden als die L hat $\vartheta(v)$ nicht; sollte der Zug C eine Periode von $\vartheta(v)$ sein, so müßte jedes Glied der Reihe diese Periode haben; es müßte daher für jeden beliebigen ganzzahligen Zug m: $e^{2mC} = 1$ sein; das ist offenbar nur möglich, wenn die Glieder von C Vielfache von πi sind.

Mit $\vartheta(v)$ hängt eine andre grade und ganze Funktion zusammen:

$$\eta(v) = E(v)\,\vartheta(v),$$

wo $E(v)$ die Exponentialgröße bedeutet:

$$E(v) = e^{H(v)}.$$

$\eta(v)$ hat nicht die Perioden L. Dafür hat sie die Züge M, die den ganzzahligen m entsprechen, zu Perioden, und sie hat keine andern. Denn aus der Gleichung

$$H(v+M) - H(v) - H(M) = 2mv$$

oder: $H(v+M)-H(v)=m(2v+M)$ folgt:

$$\frac{E(v+M)}{E(v)\,E(M)}=e^{2mv},\qquad \frac{E(v+M)}{E(v)}=e^{m(2v+M)}.$$

Demnach ist

$$\eta(v)=\sum_{(M)}E(v+M).$$

Die Summation erstreckt sich über alle Züge M, bei denen die zugehörigen m aus ganzen Zahlen bestehen.

$\eta(v)$ hat also die Perioden M. Es ist ein starker formaler Unterschied: Bei $\vartheta(v)$ bleibt jedes Glied ungeändert, wenn man v um ein L vermehrt. Bei $\eta(v)$ ändern sich alle Glieder, wenn zu v ein M hinzutritt, aber sie gehen ineinander über; ihre Gesamtheit und damit die Summe aller bleibt ungeändert.

Da für $\eta(v)=E(v)\vartheta(v)$ die Gleichung $\eta(v+M)=\eta(v)$ besteht, so hat man für $\vartheta(v)$ die Gleichungen:

$$\vartheta(v+L)=\vartheta(v),$$
$$E(v+M)\vartheta(v+M)=E(v)\vartheta(v);$$

oder:

$$e^{m(2v+M)}\vartheta(v+M)=\vartheta(v).$$

Beide Eigenschaften lassen sich zusammenfassen. Setzt man $L+M=p$, so ist

$$e^{m(2v+M)}\vartheta(v+p)=\vartheta(v).$$

Durch diese Funktionalgleichungen ist die ganze Funktion $\vartheta(v)$ bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Denn wenn sie die Perioden L haben soll, so muß sie sich nach einem allgemeinen Satze als lineares Aggregat der unendlich vielen Größen e^{2mv} darstellen lassen. Dadurch wird $\eta(v)=E(v)\vartheta(v)$ ein lineares Aggregat der Größen $E(v+M)$; soll $\eta(v)$ die Perioden M haben, so müssen alle Koeffizienten einander gleich sein. — Riemann bemerkt hierzu: Man kann daher diese Eigenschaften der Funktion zu ihrer Definition verwenden. Es erscheint mir richtig, dieser Anregung zu folgen, wenn es sich um die Aufstellung des vollen Systems der graden und ungraden Theta handelt.

Daß $\eta(v)$ keine anderen Perioden hat als die M, läßt sich so erkennen. Angenommen, es sei C irgendeine Periode von $\eta(v)$: $\eta(v+C)=\eta(v)$. Wir denken uns für den Augenblick unter $m_1, m_2\cdots m_n$ willkürliche Größen und bestimmen einen Zug c so, daß der Zug M gleich C wird für $m=c$. Dann ist $E(v+C)=E(v)\,e^{c(2v+C)}$. Aus den Gleichungen $\eta(v+C)=\eta(v)$, $\eta(v)=E(v)\vartheta(v)$ folgt:

$$E(v+C)\vartheta(v+C)=E(v)\vartheta(v),$$

und hieraus:

$$e^{c(2v+C)}\vartheta(v+C)=\vartheta(v).$$

$\vartheta(v)$ und $\vartheta(v+C)$ haben die Perioden L. Der Exponentialfaktor muß sie daher ebenfalls haben. Dies gibt: $e^{2cL}=1$, d. h.: $e^{2\pi ilc}=1$. Die Gleichung

gilt für alle ganzzahligen Züge l. Folglich muß auch c ein Zug ganzer Zahlen sein, es muß C zu den Zügen M gehören.

Wir können daher, indem wir von jetzt ab unter $l_1, l_2 \cdots l_n$ und $m_1, m_2 \cdots m_n$ nur ganze Zahlen verstehen, die Züge L schlechthin als die Perioden von $\vartheta(v)$, die M als die von $\eta(v)$ bezeichnen.

Daß die Perioden von $\vartheta(v)$ und die von $\eta(v)$ ganz verschieden sind, läßt sich leicht erkennen. Wäre $L = M$, so hätte man auch: $mL = mM$. Es ist aber $mL = ml\pi i$ rein imaginär, während der reelle Teil von $mM = G(m)$ von 0 verschieden ist, außer für $m = 0$. Es müßten daher die Zahlen m_α sämtlich 0 sein, und, wegen der Gleichung $L = M$, auch die l_α. Auch kann, wenn L, L' Perioden von $\vartheta(v)$, M, M' solche von $\eta(v)$ sein sollen, nicht $L + M = L' + M'$ sein, ohne daß $L = L'$, $M = M'$ ist. Es kann auch keine ganze Funktion vorhanden sein, die zugleich die Perioden von $\vartheta(v)$ und $\eta(v)$ hat; denn sie müßte sich aus Exponentialfunktionen zusammensetzen, die diese Eigenschaft besitzen, und solche Exponentialgrößen existieren nicht.

Dagegen ist es möglich, in gebrochener Form aus der Funktion $\vartheta(v)$, ihren Ableitungen und denjenigen Funktionen, die aus $\vartheta(v)$ entstehen, indem man v um konstante Züge vermehrt, Funktionen zu bilden, die die größere Periodengruppe

$$p = L + M$$

haben. Ein solcher Quotient ist z. B.:

$$\frac{\vartheta(v - v')\,\vartheta(v + v')}{\vartheta^2(v)} = F(v).$$

Aus der Funktionalgleichung der quadratischen Formen folgt die für $E(v)$:

$$\frac{E(v - v')\,E(v + v')}{E^2(v)\,E^2(v')} = 1.$$

Es ist daher dieselbe Funktion $F(v)$ auch darstellbar durch

$$\frac{\eta(v - v')\,\eta(v + v')}{\eta^2(v)\,E^2(v')} = F(v).$$

Der eine Ausdruck zeigt, daß $F(v + L) = F(v)$, der andere, daß $F(v + M) = F(v)$ ist; es ist daher allgemein, für $p = L + M$: $F(v + p) = F(v)$.

Wir nennen solche mit Hilfe von $\vartheta(v)$ gebildete Funktionen: Klassenfunktionen.

Zwei Züge heißen kongruent, wenn ihre Differenz eine Periode p, und zwei eindeutige Funktionen gleichändrig, wenn ihr Quotient eine Klassenfunktion ist. Demnach ist das Produkt $\vartheta(v - v')\,\vartheta(v + v')$ gleichändrig mit $\vartheta^2(v)$.

Alle ganzen Funktionen $\Phi(v)$, die mit $\vartheta^2(v)$ gleichändrig sind, die demnach die Perioden L haben, während ihre Produkte $E^2(v)\,\Phi(v)$, die mit $\eta^2(v)$ gleichändrig sind, die Perioden M besitzen, wollen wir Φ-Funktionen nennen. Die Frage ist: wieweit ist die allgemeine Φ-Funktion durch diese Eigenschaften bestimmt?

Jedenfalls läßt sie sich in ein lineares Aggregat der Größen e^{2mv} entwickeln. Es ist aber

$$\frac{E(v+\frac{1}{2}M)}{E(v)\,E(\frac{1}{2}M)} = e^{mv}.$$

Demnach wird $E^2(v)\,\Phi(v)$ ein lineares Aggregat der Größen $E^2(v+\frac{1}{2}M)$. $E^2(v)\,\Phi(v)$ soll die Perioden M haben. Daraus folgt, daß in dem Aggregat alle Größen $E^2(v+\frac{1}{2}M)$ denselben Koeffizienten haben, bei denen die Züge $\frac{1}{2}M$ sich voneinander nur um ganze Perioden von $\eta(v)$ unterscheiden. Fassen wir sie zusammen, so bekommen wir $E^2(v)\,\Phi(v)$ dargestellt als lineares Aggregat von 2^n speziellen Funktionen, die linear-unabhängig sind. Eine davon ist:

$$S(v) = \sum_{(M)} E^2(v+M);$$

sie entspricht denjenigen Gliedern $E^2(v+\frac{1}{2}M)$, bei denen nicht nur M, sondern auch $\frac{1}{2}M$ eine ganze Periode von $\eta(v)$ ist. Die übrigen sind enthalten in der Form $S(v+\frac{1}{2}M)$. Um alle zu erhalten, $S(v)$ selbst eingeschlossen, hat man in dem ganzzahligen Zuge m, von dem M abhängt, für jedes m_α sowohl eine grade Zahl zu setzen wie eine ungrade, z. B. 0 und 1.

Dividiert man die 2^n Ausdrücke $S(v+\frac{1}{2}M)$ durch $E^2(v)$, so bekommt man spezielle Φ-Funktionen, und die allgemeine ist durch diese 2^n speziellen homogen und linear ausgedrückt; diese speziellen sind dagegen linear-unabhängig.

$S(v)$ ist offenbar eine grade Funktion und hat die Perioden M. Von $S(v+\frac{1}{2}M)$ gilt dasselbe; denn eine grade periodische Funktion von v geht durch Vermehrung von v um eine halbe Periode wieder in eine grade über, eine ungrade in eine ungrade. Da der Ausdruck von $E^2(v)\,\Phi(v)$ aus lauter graden Funktionen besteht und $E^2(v)$ selbst grade ist, so können wir die beiden Sätze aufstellen:

Alle Φ-Funktionen lassen sich linear und homogen durch 2^n unter ihnen ausdrücken, aber nicht durch weniger.

Alle Φ-Funktionen sind grade.

IV. Jetzt definieren wir das volle System der ϑ, möglichst funktionentheoretisch: es umfaßt alle diejenigen eindeutigen Funktionen, deren Quadrate Φ-Funktionen sind.

Die einzelnen ϑ können auf diese Weise nur bestimmt sein bis auf konstante Faktoren. Diese Faktoren lassen wir zunächst ganz willkürlich, weil es bei der nächsten Untersuchung auf sie gar nicht ankommt. Wir betrachten zwei ϑ nicht als wesentlich verschieden, wenn das eine sich von dem andern nur um einen konstanten Faktor unterscheidet.

Zu den Größen des Systems gehört das bisherige $\vartheta(v)$, doch tritt es zurück in die Menge der übrigen. Auch die Zerlegung der Periodengruppe p in die beiden Untergruppen verliert an Wichtigkeit.

Aus der Definition folgt unmittelbar:

1. Jedes ϑ ist entweder grade oder ungrade.

Denn sein Quadrat ist eine Φ-Funktion, und diese ist grade. Wenn aber eine eindeutige Funktion der Gleichung genügt: $F^2(-v) = F^2(v)$, so muß $F(-v)$ gleich $+F(v)$ oder gleich $-F(v)$ sein.

2. Der Quotient zweier ϑ kann nur sein Vorzeichen ändern, wenn man v um eine Periode p vermehrt.

Nennen wir ihn $f(v)$; $f^2(v)$ ist der Quotient zweier Φ-Funktionen, also eine Klassenfunktion; aus der Gleichung $f^2(v+p) = f^2(v)$ folgt aber: $f(v+p) = \pm f(v)$.

3. Ist $f(v)$ einer dieser Quotienten, und c ein Zug konstanter Werte, so sind

$$f(v), \quad \frac{1}{f(v)}, \quad f(v+c)$$

untereinander gleichändrige Funktionen.

4. Ist $\vartheta(v)$ irgendeins der ϑ, so ist das Produkt $\vartheta(v-v')\vartheta(v+v')$ immer eine Φ-Funktion.

Denn bilden wir den Quotienten zweier $\vartheta : f(v)$, so folgt aus dem vorigen Satz, daß $f(v+v')f(v-v')$ eine Klassenfunktion ist. Daraus folgt: Wenn der ausgesprochene Satz richtig ist für eins der ϑ, so gilt er für alle.

5. Es kann nicht mehr als 2^{2n} untereinander ungleichändrige ϑ geben.

Dies läßt sich so beweisen. $\vartheta^2(v)$ ist eine Φ-Funktion und hat als solche die Perioden L. $E^2(v)\Phi(v)$ hat die Perioden M; folglich hat, wenn wir

$$E(v)\vartheta(v) = \eta(v)$$

setzen, auch $\eta^2(v)$ die Perioden M. Daraus folgt:

$$\vartheta(v+L) = \pm\vartheta(v), \quad \eta(v+M) = \pm\eta(v).$$

Die Gleichung $\vartheta(v+L) = \pm\vartheta(v)$, oder: $\vartheta(v+l\pi i) = \pm\vartheta(v)$, entspringt aus n speziellen Gleichungen, in denen je ein Glied des Zuges l gleich 1 ist, die übrigen gleich 0. Infolgedessen sind hier in bezug auf die Vorzeichen 2^n Möglichkeiten vorhanden. Genau dasselbe gilt von der Gleichung $\eta(v+M) = \pm\eta(v)$; auch hier sind die Vorzeichen allgemein bestimmt, für jedes M, wenn sie für diejenigen n Züge gegeben sind, in denen je ein m_α gleich 1, die übrigen gleich 0 sind. Danach sind $2^n \cdot 2^n = 2^{2n}$ untereinander inkongruente ϑ denkbar, jedenfalls nicht mehr als 2^{2n}.

6. Ist $\vartheta(v)$ irgendeine der Thetafunktionen, p' eine ganze Periode, so ist

$$e^{m'v}\vartheta(v+\tfrac{1}{2}p') = \Theta(v)$$

wieder eine Thetafunktion.

Wenn $p = L+M$ eine ganze Periode ist, so gehören dazu zwei ganzzahlige Züge l, m; wir nennen e^{2mv} den zu p, e^{mv} den zu $\frac{1}{2}p$ gehörigen Exponentialfaktor. Für $p' = L'+M'$ gilt dasselbe; $e^{m'v}$ ist der zu $\frac{1}{2}p'$ gehörige Exponentialfaktor, den man zu $\vartheta(v+\frac{1}{2}p')$ hinzufügen muß, damit eine grade oder ungrade Funktion entsteht.

Aus den beiden Gleichungen $\vartheta(v+L') = \pm\vartheta(v)$, $\eta(v+M') = \pm\eta(v)$ folgt, da $\eta(v) = E(v)\vartheta(v)$ ist:

$$e^{m'(2v+M')}\vartheta(v+p') = \pm\vartheta(v),$$

und hieraus:

$$e^{2m'v}\vartheta(v+\tfrac{1}{2}p') = \text{Const. } \vartheta(v-\tfrac{1}{2}p').$$

Folglich ist, bis auf einen konstanten Faktor, das Produkt $\vartheta(v-\frac{1}{2}p')\vartheta(v+\frac{1}{2}p')$, das eine Φ-Funktion ist, mit dem Quadrat von $e^{m'v}\vartheta(v+\frac{1}{2}p')$ identisch. Demnach stellt der Ausdruck $\Theta(v)$ ein ϑ dar.

7. Der Ausdruck $\Theta(v)$ ändert sich nur um einen konstanten Faktor, wenn man $\frac{1}{2}p'$ durch einen kongruenten Zug $\frac{1}{2}p''$ ersetzt.

Denn ist $\frac{1}{2}p'' = \frac{1}{2}p'+p$, und damit $\frac{1}{2}m'' = \frac{1}{2}m'+m$, so hat man:

$$e^{m''v}\vartheta(v+\tfrac{1}{2}p'') = e^{(m'+2m)v}\vartheta(v+\tfrac{1}{2}p'+p).$$

Da nun $e^{2mv}\vartheta(v+p) = \text{Const. } \vartheta(v)$ ist, so ist:

$$e^{m''v}\vartheta(v+\tfrac{1}{2}p'') = \text{Const. } e^{m'v}\vartheta(v+\tfrac{1}{2}p').$$

Daraus folgt, daß der Ausdruck $\Theta(v)$ höchstens 2^{2n} wesentlich verschiedne Funktionen darstellen kann, wenn man $\vartheta(v)$ beibehält, für p' aber verschiedne ganze Perioden einsetzt; denn es lassen sich nur 2^{2n} untereinander inkongruente Züge $\frac{1}{2}p'$ aufstellen. Speziell ist $\Theta(v)$ bis auf einen konstanten Faktor mit $\vartheta(v)$ identisch, wenn nicht nur p', sondern auch $\frac{1}{2}p'$ eine ganze Periode ist.

8. Wenn man den Quotienten bildet

$$\frac{\Theta(v)}{\vartheta(v)} = f(v),$$

so kann $f(v)$, als Thetaquotient, nur sein Vorzeichen ändern, wenn man v um eine Periode p vermehrt. Das Vorzeichen δ hängt nur ab von den ganzen Zahlen der Züge l, m und l', m', die zu p und p' gehören; es wird gegeben durch die Formel:

$$\delta = (-1)^{lm'-l'm} \quad (f(v+p) = \delta f(v)).$$

Denn $f(v)$ läßt sich zerlegen in die beiden Faktoren $e^{m'v}$ und

$$\frac{\vartheta(v+\frac{1}{2}p')}{\vartheta(v)} = q(v).$$

Vermehrt man v um p, so ändert sich $e^{m'v}$ um den Faktor $e^{m'p}$, $q(v)$ aber offenbar um denselben Faktor, um den sich

$$\frac{\vartheta(v+p)}{\vartheta(v)}$$

ändert, wenn man v durch $v+\frac{1}{2}p'$ ersetzt; also, da dieser Quotient sich von e^{-2mv} nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet, um $e^{-mp'}$. Folglich ist $\delta = e^{m'p-mp'}$.

Nun ist $p = L+M$, $p' = L'+M'$, $m'M$ aber $= mM'$; demnach: $\delta = e^{m'L-mL'}$, und da $L = l\pi i$, $L' = l'\pi i$ ist: $\delta = (-1)^{m'l-ml'}$.

9. Ersetzt man in dem Ausdruck $\Theta(v)$ den Zug $\frac{1}{2}p'$ durch einen andern $\frac{1}{2}p''$, der ebenfalls die Hälfte einer ganzen Periode ist, aber nicht kongruent $\frac{1}{2}p'$ ($e^{m'v}$ ist dabei durch $e^{m''v}$ zu ersetzen), so bekommt man eine andre Funktion $\bar{\Theta}(v)$, die von $\Theta(v)$ wesentlich verschieden und nicht mit $\Theta(v)$ gleichändrig ist.

Denn bildet man den Quotienten

$$f(v) = \frac{\bar{\Theta}(v)}{\vartheta(v)},$$

und auch den folgenden:

$$\frac{\bar{f}(v)}{f(v)} = \frac{\bar{\Theta}(v)}{\Theta(v)} = \phi(v),$$

so hat man:

$$\phi(v+p) = (-1)^{l(m''-m')-m(l''-l')}\phi(v),$$

da $f(v+p) = (-1)^{lm'-ml'}f(v)$, $\bar{f}(v+p) = (-1)^{lm''-ml''}$ ist.

Die Züge $\frac{1}{2}p'$, $\frac{1}{2}p''$ sind nicht kongruent; daher bestehen die Züge $m''-m'$, $l''-l'$ nicht aus lauter graden Zahlen. Dann ist es jedenfalls möglich, die Zahlen der Züge l, m so zu wählen, daß $\phi(v+p) = -\phi(v)$ ist. Demnach ist $\phi(v)$ keine Klassenfunktion und $\bar{\Theta}(v)$ nicht gleichändrig mit $\Theta(v)$.

10. Gleichändrige ϑ unterscheiden sich voneinander nur durch konstante Faktoren.

Es ist also, wenn $\vartheta(v)$ und $\bar{\vartheta}(v)$ zwei miteinander gleichändrige ϑ bedeuten: $\bar{\vartheta}(v) = \text{Const. } \vartheta(v)$. — Denn $\Theta(v)$ stellt nach dem vorigen Satz, wenn man $\frac{1}{2}p'$ variiert, im ganzen 2^{2n} untereinander ungleichändrige ϑ dar. Mehr als 2^{2n} können nicht vorhanden sein, nach Satz 5. Folglich ist jedes ϑ mit einer der 2^{2n} Funktionen $\Theta(v)$ gleichändrig, und nur mit einer. Dies gilt auch für die ursprüngliche Funktion $\vartheta(v)$, die durch die Thetareihe gegeben ist und die wir zum Unterschiede von den andern mit $\vartheta(v; R)$ bezeichnen wollen. Ganze Funktionen, die mit $\vartheta(v; R)$ gleichändrig sind, können sich aber von $\vartheta(v; R)$ nach dem Satze in RIEMANNS Theorie nur um konstante Faktoren unterscheiden. Es gibt daher eine bestimmte Schar untereinander kongruenter Züge $\frac{1}{2}p'$, Hälften ganzer Perioden, für die

$$e^{m'v}\vartheta\left(v+\tfrac{1}{2}p'\right) = \text{Const. } \vartheta(v; R)$$

ist. Nehmen wir jetzt an, es sei $\bar{\vartheta}(v)$ ein anderes Theta und gleichändrig mit $\vartheta(v)$. Dann ist auch $\bar{\vartheta}\left(v+\frac{1}{2}p'\right)$ gleichändrig mit $\vartheta\left(v+\frac{1}{2}p'\right)$ und $e^{m'v}\bar{\vartheta}\left(v+\frac{1}{2}p'\right)$ mit $e^{m'v}\vartheta\left(v+\frac{1}{2}p'\right)$. Dann sind beide Produkte gleichändrig mit $\vartheta(v; R)$; sie können sich daher nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Daraus folgt:

$$\bar{\vartheta}(v) = \text{Const. } \vartheta(v).$$

11. Die Anzahl der wesentlich verschiedenen ϑ beträgt 2^{2n}; die Anzahl der graden überwiegt die der ungraden um 2^n.

Diesen Hauptsatz wollen wir nicht durch Formeln beweisen, sondern durch eine Überlegung. Es sei A die Anzahl der graden, B die der ungraden ϑ von n Veränderlichen. Wir lassen alle Koeffizienten von $G(m)$

gleich 0 werden, die mit den $n-1$ von v_n^2 verschiedenen Produkten $v_\alpha v_n$ multipliziert sind. Dabei ändern sich die Zahlen A, B nicht, aber jedes ϑ zerfällt in ein Produkt $\vartheta = \vartheta' \vartheta''$, in dem ϑ' eine der Thetafunktionen von $v_1, v_2 \cdots v_{n-1}$ ist, ϑ'' eins der vier elliptischen von v_n. Es sei A' die Anzahl der graden ϑ', B' die der ungraden. Wir bekommen alle graden ϑ, indem wir jedes grade ϑ' mit einem der drei graden ϑ'', jedes ungrade ϑ' mit dem einen ungraden ϑ'' multiplizieren. Dies gibt: $A = 3A' + B'$. Ebenso ist: $B = 3B' + A'$. Es ist daher $A + B = 4(A' + B')$, $A - B = 2(A' - B')$. Hieraus folgt, da bei den vier elliptischen ϑ die Anzahl der graden um 2 größer ist als die der ungraden: $A - B = 2^n$.

Adresse an Hrn. Joseph Partsch zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 7. März 1924.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Die Dissertation über die Straßen des antiken Afrika, mit der Sie heute vor 50 Jahren die Doktorwürde erwarben, nannten Sie eine philologische; aber historisch-geographisch ist der Inhalt. Acht Jahre später offenbarten Sie sich durch Ihr Werk über die Eiszeit in den Karpathen und auf den deutschen Mittelgebirgen als physischer Geograph, dem alle Methoden glazialgeologischer und morphologischer Untersuchung, selbst der Kartenaufnahme geläufig waren. Weit gingen die Arbeitsrichtungen beim Beginn Ihrer wissenschaftlichen Laufbahn auseinander, und Sie haben sich in beiden durch ein halbes Jahrhundert als Forscher erfolgreich betätigt.

Bald schöpften Sie aus antiken Quellen zur Aufhellung physikalisch-geographischer Fragen, wie kürzlich noch in einer Arbeit über Palmyra, bald gingen Sie in den Bahnen des von Ihnen in seiner Bedeutung voll erkannten Philipp Clüver und zogen die Gegenwart zur Erklärung des Vergangenen heran. Als schönste Frucht dieser doppelten Betrachtungsweise reifte Ihr Nachweis der Echtheit von Aristoteles' Buch über das Steigen des Nils, nach deren philologischer und geographischer Bedeutung nur gesagt werden kann: ΟΥΚΕΤΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΣΤΙΝ.

Ihren immer aufs neue betriebenen Eiszeitforschungen aber, die durch Ihr Vorgehen, aus der eiszeitlichen Vergletscherung auf die eiszeitliche Schneegrenze zu schließen, bahnbrechend wirkten, gaben Sie durch Ihr eben erschienenes Werk über die Eiszeit in der Hohen Tatra eine abschließende Krönung.

Wie weit Ihre Forschungsrichtungen auseinandergehen, so verwirklichen sie dennoch nur eine Grundidee: das Gegenwärtige durch das Studium des Vergangenen besser zu verstehen. Aber wenn Sie auch die Geographie als Wissenschaft vom Gegenwärtigen fest verankern in den Wissenschaften vom Vergangenen, so waren Sie doch auch unter den ersten, die die Beobachtung zur Grundlage der neueren Geographie machten. Nicht bloß auf Ihrer großen Kunst, die Länder in ihrer Eigenart, sowohl nach der landschaftlichen als auch nach der kulturellen Seite zu schildern, beruht der Reiz Ihrer länderkundlichen Schriften, sondern vor allem auf der kritischen Vereinigung des geistig Erschauten mit objektiv Gesehenem. War Ihnen zwar, wie Sie bei der pietätvollen Herausgabe der Vorlesungen Ihres Meisters Carl Neumann über die physikalische Geographie Griechenlands klagten, die Ergänzung fremder Beobach-

tungen durch eigene Anschauung damals versagt, so konnten Sie sich doch bald auf den Ionischen Inseln als beobachtender Geograph und selbst als geologischer Entdecker betätigen; mit großer Genugtuung empfindet die Preußische Akademie der Wissenschaften, daß sie Ihre dortigen Forschungen fördern konnte. Das Herz unseres Erdteils ist Ihr zweites länderkundliches Arbeitsfeld, in dem Sie als erster ein größeres Mitteleuropa erkannten. Von Ihrer schlesischen Heimat aber schufen Sie nach mannigfaltigen Vorarbeiten die beste Landeskunde, die wir von einem deutschen Großgau besitzen.

Das Feld Ihres fruchtbaren Wirkens erstreckt sich über die Grenzen der beiden Wissenschaftsgruppen hinweg, die von den beiden Klassen der Akademie gepflegt werden. Sie hätten ebensogut als Philolog und Historiker ihrer einen Klasse zugesellt werden können, wie Sie der anderen als physischer Geograph angehören. Im freudigen Gefühle, daß es im Zeitalter notwendiger Zersplitterung der Wissenschaften noch möglich bleibt, deren mehrere zu meistern, bringt die Akademie Ihnen zu Ihrem 50jährigen Doktorjubiläum ihre herzlichsten Glückwünsche dar.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 28. April.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1924

XI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 27. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1: Hr. Hellmann legte vor »Untersuchungen über die jährliche Periode der Niederschläge in Europa«.

Es wird gezeigt, daß die dem kontinentalen Typus der jährlichen Periode angehörigen Niederschläge in Breitenzonen angeordnet sind, die vom Mai zum August von Süden nach Norden vorrücken. Im Mai fällt die größte Monatsmenge im Innern von Nordostspanien und von Südfrankreich, in Italien am Südfuß der Alpen, in Gebirgslandschaften Mazedoniens und Bulgariens sowie auf der Südseite des Kaukasus. An diese Zone der Mairegen schließt sich nach Norden eine solche der Juniregen an, weiter nördlich eine solche der Juli- und der Augustregen, die in Skandinavien und Finnland vorherrschen. Auf den September fällt nur in drei kleinen Randgebieten von Europa die größte Monatsmenge. Der ozeanische Typus äußert seinen Einfluß vom Atlantischen Ozean, Mittelmeer und Schwarzen Meer aus und dringt verhältnismäßig tief in den Kontinent ein. Aus der gleichzeitigen Einwirkung beider Typen entsteht die große Mannigfaltigkeit in der jährlichen Periode der Niederschläge in Europa.

2. Hr. Zimmermann legte eine Arbeit vor: über die Knickfestigkeit offener und geschlossener Stabzüge.

Sie enthält ein neues Verfahren, das es ermöglicht, auch verwickelte Anordnungen nach einfachen, von der Zahl der Felder nicht abhängenden Regeln zu berechnen. Als Beispiel wird ein aus drei gleichen Feldern gebildeter Stabring behandelt. Es zeigt sich, daß die Tragfähigkeit des Ringes um mehr als die Hälfte größer ist als die der einzelnen Felder. Es bestehen unendlich viele verschiedene Gleichgewichtslagen, die sämtlich sicher (stabil) sind: darunter sechs ausgezeichnete.

Untersuchungen über die jährliche Periode der Niederschläge in Europa.

Von G. Hellmann.

1.

Die Erforschung der Niederschlagsverhältnisse von Europa erfolgte naturgemäß zunächst staatenweise. Daher ist eine den ganzen Erdteil umfassende Untersuchung über die Verteilung der Niederschläge auf die einzelnen Monate nur selten unternommen worden. Zuerst hat 1828 der Agronom und Agrikulturmeteorologe Graf de Gasparin in der Arbeit »Des climats européens par rapport aux pluies« (Biblioth. universelle 1828, Sonderdruck: Genève 1828. 8°. 77 S., 2 Tab.) diese Frage behandelt. Gestützt auf das damals noch spärliche Beobachtungsmaterial, von dem das den Ephemerides Societatis Meteorologicae Palatinae entnommene an erster Stelle genannt wird[1], kommt er zu dem Ergebnis, daß Europa bezüglich der Regenverteilung in zwei Zonen oder Streifen (»bandes«) geteilt ist: im Nordosten dieses Kontinents fällt das Maximum des Regens im Sommer, im Südwesten im Herbst[2]. Sodann hat 1859 H. W. Dove dieses Thema mit einbezogen in die groß angelegte Untersuchung »Über die Verteilung des Regens auf der Oberfläche der Erde« (Zeitschr. f. allg. Erdk. N. F. II und Klimatologische Beiträge I, 77—183), während 39 Jahre später der Bearbeiter des gleichen Themas, A. Supan, das Zahlenmaterial gerade für Europa ganz weggelassen und diesen Erdteil kurz behandelt hat (Die Verteilung des Niederschlags auf der festen Erdoberfläche. Erg.-Heft 124 zu Petermanns Mitt.). Dove kam zu dem Ergebnis: »Die Winterregenzeit an den Grenzen der Tropen tritt, je weiter wir uns von diesen entfernen, immer mehr in zwei durch schwächere Niederschläge verbundene

[1] Es ist bemerkenswert, daß erst mehrere Jahrzehnte nach dem 1792 erfolgten Eingehen der Mannheimer Meteorologischen Gesellschaft die von ihr veröffentlichten meteorologischen Beobachtungen Anerkennung und Verwertung fanden. Zuerst benutzte sie 1818 der Würzburger Professor J. Schön in seiner »Witterungskunde« zur Aufstellung von Klimatafeln; 1827 dienten sie als Ausgangspunkt einer Untersuchung über die Schwankungen des Luftdrucks durch den Engländer J. F. Daniell (Meteorol. Essays and Observations II 541—565), der das Unternehmen der Mannheimer Gesellschaft sehr bewundert und in kräftigen Worten sein Bedauern darüber ausspricht, daß sich seiner Zeit die Royal Society in London an dem »great and truly scientific work« nicht beteiligt hat; 1828 verwendete die Beobachtungen der Franzose Gasparin, der der Gesellschaft gleichfalls viel Lob spendet, und noch 1831 machte Kämtz in seinem Lehrbuch der Meteorologie reichlichen Gebrauch von ihnen.

[2] Gasparin hat später (1842—47) unter Hinzunahme neuer Beobachtungen in seinem an meteorologischen Kapiteln reichen Cours d'agriculture die Untersuchung weitergeführt; vgl. meine Beiträge z. Geschichte d. Meteorologie III 40.

Maxima auseinander, welche in Deutschland in einem Sommermaximum wieder zusammenfallen, wo also temporäre Regenlosigkeit vollkommen aufhört.« In zwei Kartons zu Blatt Nr. 38 von Hanns Atlas der Meteorologie (Gotha 1887) hatte W. Köppen eine kartographische Darstellung für die Eintrittszeiten des Maximums der Niederschläge in Europa gegeben. Die räumliche und zeitliche Verteilung des Regens in Westeuropa hat sodann 1895 A. Angot behandelt, hauptsächlich wohl, um die Brauchbarkeit der von ihm empfohlenen Methode der Darstellung der Jahresperiode durch den pluviometrischen Koeffizienten, den er aber nur für die Jahreszeiten mitteilt, an einem größeren Beispiel zu erweisen (Régime des pluies de l'Europe occidentale. Annal. d. Bur. C. Mét. d. France 1895 I)[1]. Ich selbst habe in meinen »Untersuchungen über die Schwankungen der Niederschläge« (Berlin 1909. 4°. — Abhandl. d. Preuß. Met. Inst. III 1) die Frage gestreift (S. 14ff.) und damals schon in Aussicht genommen, sie später auf Grund umfassenderen Materials eingehender zu behandeln.

Es liegen jetzt von mehreren europäischen Beobachtungsnetzen neue Bearbeitungen ihrer langjährigen Niederschlagsmessungen vor, so daß man den Versuch machen kann, die gemeinsamen großen Züge in der jahreszeitlichen Verteilung der Niederschläge in Europa herauszuarbeiten. Allerdings ist das Material noch sehr ungleichartig. Gut bekannt sind die Niederschlagsverhältnisse von Nord-, Mittel- und Westeuropa, weniger gut die von Süd- und Osteuropa, und am meisten lassen zu wünschen übrig unsere Kenntnisse von den einschlägigen Verhältnissen in Südosteuropa. Da zur Untersuchung der jährlichen Periode genaue Monatsmittel erforderlich sind, darf die zugrundeliegende Beobachtungsperiode nicht zu kurz sein. Das trifft auch wirklich zu bei den zuerst genannten Teilen von Europa, wo meist 30—50jährige Reihen verwertet werden konnten; auf der Balkanhalbinsel mußte ich mich aber manchmal mit Reihen von kaum 15 Jahren begnügen. Daß die abgeleiteten Mittelwerte nicht aus Messungen in demselben Zeitraum stammen, was jeweils bei den einzelnen Ländern zumeist der Fall ist, kann nicht sehr stören; denn auf dem ganzen Erdteil Europa herrschen gleichzeitig nur selten dieselben Abweichungen von den normalen. Meine oben genannte Arbeit über die Schwankungen der Niederschläge, in der ich die Jahressummen der einzelnen Jahre von 1851 bis 1905 auch in Prozenten des langjährigen Mittels mitgeteilt habe, liefern zahlreiche Beispiele dafür. So hatte z. B. Rothesay an der Mündung des Clyde in Schottland im Jahre 1872 46 Prozent zu viel, dagegen Tiflis 13 Prozent zu wenig Regen; umgekehrt verhielt es sich im Jahre 1878, in dem Rothesay 11 Prozent weniger und Tiflis 46 Prozent mehr als im Mittel erhielt. Ähnliche Gegensätze zeigen sich auch in nordsüdlicher Richtung. z. B.

	San Fernando bei Cádiz	St. Petersburg		Triest	Uppsala
1855	178 Prozent	81 Prozent	1880	114 Prozent	62 Prozent
1896	56 »	99 »	1890	74 »	140 »

[1] Es sei ausdrücklich bemerkt, daß das kleine Buch mit dem Titel »De la pluie en Europe, par le commandant Rozet« (Paris 1855, kl. 8°. V, 151 S.) das hier vorliegende Thema nicht behandelt; es ist vielmehr eine gemeinverständliche Darstellung der Niederschlagsverhältnisse im allgemeinen mit einigen Nutzanwendungen auf Europa.

Für die Darstellung der jährlichen Periode der Niederschläge bietet die ungleiche Länge der Monate eine Unbequemlichkeit, die man auf verschiedene Weise zu beseitigen sucht (vgl. mein Regenwerk I 72 ff.). Da eine allgemeine Einigung über die dabei anzuwendende Methode noch nicht erzielt ist, und da die wirklichen Monatsmittel für viele praktische Zwecke sowie für den Vergleich der Einzeljahre mit dem Normalwert erforderlich sind, habe ich in der am Schluß folgenden Tabelle, um Raum zu sparen, nur die sich unmittelbar aus den Messungen ergebenden Monatsmittel aufgenommen. Es kann dann ein jeder, je nach Wunsch, die Reduktion auf gleiche Monatslänge von 30 Tagen vornehmen oder den Niederschlagskoeffizienten nach Angot berechnen. Bei der Aufnahme der Mittelwerte in die Tabelle war natürlich eine ziemlich große Beschränkung geboten; doch sind die Haupttypen der jährlichen Periode durch Beispiele genügend vertreten. Für die textliche Darstellung kam aber alles verfügbare Material zur Verwendung. Da ich mit Rücksicht auf den praktischen Gebrauch der Tabelle, die für rund 500 Orte von Europa die mittleren monatlichen und jährlichen Niederschlagshöhen enthält, vorzugsweise größere Städte in möglichst gleichmäßiger räumlicher Verteilung ausgewählt habe, glaubte ich von der Angabe näherer geographischer Bestimmungen, außer der Höhe über dem Meeresspiegel, absehen zu dürfen. In den einzelnen Ländern, die in der Reihenfolge von Norden (Schweden und Norwegen) über Mitte, Westen und Süden nach Osten und von da wieder nach Norden (Finnland) aufgeführt sind, schreitet die Anordnung der Stationen gewöhnlich von Norden nach Süden und, wenn es die Breite des Landes erfordert, wieder zurück nach Norden und abermals nach Süden usw. fort. Eine alphabetische Reihenfolge der Orte würde für manche Zwecke wohl bequemer sein, doch mußte der geographischen Anordnung, welche die räumliche Ausdehnung eines Typus der jährlichen Periode besser erkennen läßt, der Vorzug gegeben werden. Der Tabelle geht voraus ein Quellennachweis, der über die Herkunft des Materials und über die ausgeführten Neuberechnungen Auskunft gibt.

2.

Ganz Europa, mit Ausnahme seines Südrandes, hat Niederschläge zu allen Jahreszeiten. Diese sind aber nicht gleichmäßig über das Jahr verteilt, sondern überall gibt es Monate mit größerer und mit kleinerer Niederschlagsmenge, d. h. eine jährliche Periode. Auf dem Festland hat der kontinentale Typus der Jahresperiode mit vorwiegenden Sommerregen die Vorherrschaft, auf dem Meere und den am Meere gelegenen Randgebieten der ozeanische Typus mit Niederschlägen in der kalten Jahreshälfte. Ganz rein treten beide Typen nur selten auf, vielmehr wirken sie derartig zusammen, daß häufig neben einem Hauptmaximum und einem Hauptminimum noch sekundäre Extreme vorkommen. Es ist eine Aufgabe der vorliegenden Untersuchung, die Gebiete verschiedener jährlicher Periode der Niederschläge in Europa in ihrer Ausdehnung festzustellen. Dabei habe ich mich der kartographischen und der graphischen Methode mit Vorliebe bedient. Daneben leistete auch die

Häufigkeitsmethode gute Dienste. Wenn der Scheitel einer Jahreskurve der Niederschlagsmenge spitz zuläuft, so ist das ein Zeichen dafür, daß auf das Eintreten des Maximums in dem Scheitelmonat mit großer Wahrscheinlichkeit gerechnet werden kann; wenn er aber flach und abgeplattet erscheint, ist anzunehmen, daß das Maximum sehr häufig auch in einem Nachbarmonat eintritt. Die Häufigkeits- bzw. Wahrscheinlichkeitswerte für das Eintreten eines Extrems sind natürlich nur aus langen Reihen mit einiger Sicherheit abzuleiten. Neben den Eintrittszeiten der Extreme ist das Ausmaß der Schwankungen, d. h. die Jahresamplitude, ausgedrückt in Prozenten der Jahresmenge, eine charakteristische Größe, die zu berücksichtigen sein wird.

Die Untersuchung muß sich auf die jährliche Periode der Niederschlagsmenge beschränken, da für die Niederschlagshäufigkeit nur von wenigen Teilen Europas ausreichendes Material vorliegt. Dieses zeigt aber zur Genüge, daß beide Perioden nicht identisch sind, wenn sie auch häufig große Ähnlichkeit miteinander haben. Letzteres ist um so mehr der Fall, je weniger die Tage mit kleinen Niederschlagsmengen berücksichtigt werden; vgl. mein Regenwerk I 212 und diese Sitzungsberichte 1922, 13—15, wo ich die Verhältnisse in Deutschland erörtert habe.

Die südlichsten Teile von Europa bilden den Nordrand der sogenannten subtropischen Regenzone, die durch Winterregen und regenarme oder ganz regenlose Sommer charakterisiert ist. Aber nur die allersüdlichsten Landstriche und Inseln gehören ihr an. Sowie man nordwärts oder von der Küste aus landeinwärts fortschreitet, tritt die sommerliche Dürre mehr und mehr zurück. Man ersieht das aus den folgenden Zahlen, welche die Wahrscheinlichkeit der Regenlosigkeit eines bzw. zweier der drei Monate Juni, Juli, August im westlichen, mittleren und östlichen Mittelmeergebiet angeben.

	Wahrscheinlichkeit eines regenloser Sommermonate	zweier
San Fernando bei Cádiz	0.97	0.71
Gibraltar	0.87	0.37
Valencia	0.59	0.09
Lissabon	0.44	0.08
Catania	0.78	0.45
Palermo	0.44	0.14
Cagliari auf Sardinien	0.55	0.24
Gallipoli bei Otranto	0.65	0.23
Locorotondo nördl. von Taranto	0.30	0.00
Neapel	0.20	0.00
Rom	0.13	0.01
Livorno	0.12	0.00
Genua	0.00	0.00
Athen	0.60	0.15

Es fällt auf, wieviel häufiger das an der Ostseite des Golfes von Taranto auf einem kleinen Landvorsprung sehr frei gelegene Gallipoli trockene Sommer hat als das mehr landeinwärts befindliche Locorotondo nördlich von Taranto. Die Jahresmenge des Regens beträgt in Gallipoli nur 528 mm, in Locorotondo dagegen 908 mm.

Auf eine regelmäßig eintretende regenlose Zeit im Sommer ist also nur an der Südspitze von Spanien, im südlichen Sizilien, auf Malta, in Südgriechen-

land und wahrscheinlich auch auf Kandia zu rechnen, also in Gegenden, die unter etwa 36° n. Br. oder südlich davon liegen. Der regenreichste Monat ist der November oder Dezember[1], der trockenste der Juli oder August. Dieses Regime mit dem winterlichen Maximum und trockenen Sommer reicht auf den drei Halbinseln des Mittelmeeres zumeist bis zum 42. Breitengrade, jedoch macht sich die sommerliche Trockenheit in Mitteleuropa bis etwa 45° n. Br., an der atlantischen Westküste sogar bis 48°, bemerkbar.

Nördlich von dem Winterregengebiet kommt auf dem Festland der kontinentale Typus zur Geltung, dessen Auftreten wir nun verfolgen wollen. Wir beachten dabei vorzugsweise die Eintrittszeit der größten Monatsmenge. Zunächst finden wir im Norden und Nordosten von Spanien, nämlich im östlichen Alt-Kastilien, in Navarra und in Hoch-Aragonien, ein gut ausgeprägtes Mai-Maximum, das über die Pyrenäen hinweg nach dem mittleren Teil von Südfrankreich bis etwa zur Garonne reicht[2]. Daß die Pyrenäen in ihren niederen und mittleren Regionen an diesem Regime beteiligt sind, zeigen die Messungen in Montlouis (1586 m), nahe am Col de la Perche in den Ostpyrenäen, solche am Col de Puymorens (1928 m), der etwas westlich davon nach Andorra führt, und solche in dem 1417 m hoch gelegenen Peyranère im westlichen Teil des Gebirges. Daß dagegen die Hochregionen kein Mai-Maximum haben, werde ich später zeigen. Die Küstenstreifen längs des Atlantischen Ozeans und des Mittelmeers gehören auch nicht mehr in dieses Gebiet, das im Osten an den Cevennen seine Grenze hat; doch macht sich jenseits von ihnen bis zu den Alpen ein sekundäres Mai-Maximum sehr deutlich bemerkbar.

Nahezu in derselben geographischen Breite besteht in Oberitalien ein anderes Gebiet mit einem Mai-Maximum. Am ausgeprägtesten zeigt es sich auf der von den Ligurischen Alpen, den Seealpen und den Cottischen Alpen eingerahmten, also im Lee gelegenen Hochebene zwischen Turin und Cuneo. Hier reicht es nach Osten bis an den Tanaro bei Asti, während Alessandria schon außerhalb liegt. Nördlich von Turin erstreckt es sich am Südfuß der Alpen entlang über Monza, Bergamo, Brescia in das Tal der Etsch und deren Seitentäler, reicht aber nicht bis Bozen (vgl. von Ficker, Klimatographie von Tirol S. 62), und ebenso in den Venetianischen Alpen im Tal des Piave aufwärts bis über Belluno hinaus. Das östliche Venetien und Friaul haben dagegen ein Oktober-Maximum.

Auf der Balkanhalbinsel treffen wir in der Breite von 42° bis 43° ein Gebiet mit der größten Monatsmenge im Mai. Es hat gleichfalls eine geschützte Lage, südlich vom Balkan bei Sofia und Küstendil, und hängt wahr-

---

[1] Es beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der größten Regenmenge im

	November	Dezember
San Fernando	0.24	0.20
Palermo	0.16	0.17
Athen	0.27	0.20.

[2] Die Wahrscheinlichkeit des Eintritts des Maximums ist in Toulouse im Mai 0.23, Juni 0.14. Nach den von Angot publizierten Mittelwerten ist aber der Juni etwas regenreicher als der Mai (s. Tabelle).

scheinlich mit dem Mairegengebiet bei Üsküb in Mazedonien zusammen. Möglicherweise hat es eine noch größere Ausdehnung; doch ist das vorliegende Beobachtungsmaterial zu dürftig, um darüber mehr sagen zu können.

Schreiten wir in derselben Breite weiter nach Osten fort, so finden wir im mittleren Transkaukasien (Georgien) in der Gegend von Tiflis, Elisabetpol, Alexandropol ein weiteres Gebiet mit Mairegen, das sich, nach den Beobachtungen von Wladikawkas zu schließen, nicht auf die Nordseite des Gebirges erstreckt, wenn es auch auf der Südseite hoch hinauf reicht; denn das auf der grusinischen Heerstraße etwas unterhalb der Paßhöhe 2210 m hoch gelegene Gudaur hat nach allerdings nur 14jährigen Beobachtungen ein scharf markiertes Mai-Maximum (vgl. RAULIN im Annuaire d. l. Soc. Météorol. d. France 1902 S. 132). Die Uferlandschaften am Schwarzen Meer und am Kaspisee gehören diesem Regime nicht an; also ein ähnliches Verhalten wie in Südfrankreich.

Die eben geschilderten vier Gebiete mit der größten Regenmenge im Mai liegen zwar ungefähr in derselben Breite, jedoch haben die im kontinentalen Osten, wo die Erwärmung im Frühling besonders rasch vor sich geht, eine etwas südlichere Lage als die westlichen. Eingebettet zwischen hohen Gebirgen, also windgeschützt, erfreuen sich diese Gebiete im Mai schon einer ziemlich hohen Temperatur, die das Auftreten von ergiebigen Gewitterregen begünstigt.

Die im Frühjahr erwachende Gewittertätigkeit nimmt in diesen Breiten mit fortschreitender Jahreszeit so rasch zu, daß z. B. an der Westküste der Iberischen Halbinsel und landeinwärts östlich von Lissabon das Maximum der Gewittertage bereits auf den Mai fällt. Auch im Osten von Europa erfolgt die Zunahme der Gewitter vom April zum Mai ungewöhnlich schnell, in Tiflis von 1.5 auf 7.4 Tage, so daß auf den Mai fast der vierte Teil aller Gewitter im Jahre entfällt. An der Nordgrenze der Mairegen in Südfrankreich, in Toulouse (vgl. oben), hat erst der Juni die meisten Gewitter, was auch für Zentralfrankreich und das Becken von Paris gilt.

Eine umfassende Untersuchung über die jährliche Periode der Gewitter in Europa, die noch aussteht, wäre für meine Arbeit von großem Nutzen gewesen. Ich kann leider nur aus Beobachtungsreihen von rund 30 Jahren, die ich vor längerer Zeit aus den Veröffentlichungen der meteorologischen Institute habe ausziehen lassen, einige für den vorliegenden Zweck nützliche Angaben machen. Bei näherer Prüfung erwiesen sich nämlich sehr viele Reihen der Gewitteraufzeichnungen als ganz unhomogen oder direkt als unbrauchbar. Es folgt nun für die eben genannten Orte die

	Mittlere Zahl der Gewittertage					Mittlere Zahl der Gewittertage			
	Mai	Juni	Juli	August		Mai	Juni	Juli	August
Porto	**4.6**	3.0	2.2	1.3	Jaen	**4.1**	3.1	1.6	2.1
Coimbra	**4.4**	3.0	1.8	1.4	Albacete	**3.4**	3.4	1.6	2.8
Lissabon	**2.0**	1.2	0.5	0.2	Toulouse	2.8	**3.8**	3.0	3.6
Faro[1]	**1.9**	0.1	0.0	0.0	Clermont-Ferrand	3.4	**6.4**	6.0	4.9
Badajoz	**2.0**	1.5	0.6	0.6	Parc St. Maur	4.9	**5.9**	5.6	5.0

An diese Breitenzone mit Mai-Maxima des Regens und zwischenliegenden Gebieten mit kräftigen Mairegen schließt sich nach Norden eine solche mit einem Juni-Maximum an. In Spanien fehlt sie natürlich, da schon die Mai-

[1] An der Südküste von Portugal.

regen bis an die Nordgrenze des Landes reichen, aber im Innern von Frankreich erstreckt sie sich über den 48. Breitengrad bis in die Gegend von Chartres und Paris. Letzteres hat allerdings schon häufiger Juli- als Junimaxima; die Wahrscheinlichkeit des Maximums im Juni beträgt 0.17, Juli 0.19, August 0.15, aber der Juni hat etwas mehr Gewitterregen als der Juli. Der entsprechende Küstenstreifen am Atlantischen Ozean und die Landschaft östlich der Loire gehören nicht mehr in diese Zone. Paris bzw. die Ile de France ist bezüglich der jährlichen Periode des Regenfalls offenbar ein Übergangsgebiet, in dem bald kontinentale, bald ozeanische Einflüsse das Übergewicht haben; denn die eben angegebenen Wahrscheinlichkeitswerte, abgeleitet aus den von Raulin (III 353) mitgeteilten 147jährigen Beobachtungen, weichen stark ab von denen, die ich aus neueren Messungen (1851—1900) in meiner Arbeit »Schwankungen der Niederschläge« S. 27 berechnet habe. Diesen zufolge ist der Oktober mit 0.22 Wahrscheinlichkeit der regenreichste Monat. Selbst in einer Reihe aufeinanderfolgender zehnjähriger Mittelwerte für die einzelnen Monate (Raulin II 444) schwankt die Eintrittszeit des Maximums noch stark hin und her; in diesen 16 Jahrzehntmitteln fiel die größte Monatsmenge auf den Mai 1-, Juni 3-, Juli 5-, August 5-, September 2mal. Daher ist die Amplitude der jährlichen Periode sehr klein; sie beträgt nur 5 v. H. der Jahressumme.

Im Norden des italienischen Gebiets mit Mairegen folgt nicht unmittelbar ein solches mit Juniregen. Das Dazwischentreten der hohen Alpenkämme verzögert die Erwärmung und die Bildung kräftiger Konvektionsströme. Erst nördlich vom Hauptkamm, in der ebenen Schweiz und in Oberdeutschland, finden wir ein solches Juni-Maximum. Es tritt zwar in den 35jährigen Mittelwerten (1881—1915) der süddeutschen Stationen nur vereinzelt hervor (vgl. die Tabelle), aber nach den Häufigkeitswerten beurteilt besteht es dennoch. Ich habe diese Frage bereits in diesen Sitzungsberichten, 1922 S. 12, eingehend behandelt. Daß in den innersten Alpentälern die größte Monatsmenge des Regenfalls erst dem Juli bzw. August angehört, bedeutet also ein zeitliches Zurückbleiben im Eintritt des Extrems; denn wenn die Alpen nicht existierten, würde in diesen Breiten der Juni am regenreichsten sein. Das müssen wir nach Analogie der Verhältnisse beim Mai-Maximum und der gleich zu erörternden beim Juli- und August-Maximum als sehr wahrscheinlich annehmen.

Da die Ausdehnung der Gebiete mit Juni- und mit Juli-Maximum nicht jedes Jahr dieselbe ist, vielmehr ein Übergreifen des einen in das andere häufig stattfindet, bleibt aus diesem und einem anderen, gleich zu erwähnenden Grunde, in diesem alpinen Störungsgebiet das Eintreten des monatlichen Maximums der Regenmenge etwas unbestimmt. Es fällt bald auf den Juni, bald auf den Juli oder gar August, und die Scheitel der entsprechenden Jahreskurven haben infolgedessen ein sehr flaches Aussehen. Als Beleg für dieses Verhalten lasse ich die mittleren Monatsmengen für Juni, Juli, August von einer Reihe von Stationen, die dem alpinen Typus angehören, hier folgen. Die Reihe beginnt im Osten mit Wien, geht über Norden, Westen, Süden wieder nach dem Osten und endigt mit Graz:

	Juni	Juli	Aug.
Wien (203 m)[1]	71	70	70
Linz (380 m)	101	112	101
Salzburg (428 m)	170	189	171
Kempten (720 m)	138	132	129
Bludenz (590 m)	153	169	154
Zürich (480 m)	134	132	133
Luzern (453 m)	149	157	150
St. Beatenberg (1140 m)	177	172	170
Lausanne (553 m)	95	94	105
Bonneville (449 m)	108	105	105
Chambéry (288 m)	108	105	113
Pralognan[2] (1425 m)	106	104	101
Stilfser Joch (2543 m)	125	130	130
Zoppé del Cadore[3] (1478 m)	130	130	122
Saifnitz (806 m)	131	135	139
Krainburg (385 m)	144	144	143
Laibach (386 m)	138	133	136
Marburg a. d. Drau (297 m)	121	129	119
Graz (365 m)	116	120	118

Auch im Bereich der ungarischen Gebirge (Karpathen) scheint eine solche Verzögerung bzw. Unbestimmtheit im Eintritt der größten Regenmenge zu bestehen; vgl. in der Tabelle Preßburg, Neutra, Schemnitz.

Bei der Erklärung dieser Eigentümlichkeit muß noch eine andere Tatsache in Betracht gezogen werden, nämlich der Anteil der Gewitterregen an den Sommerregen. Ich führte oben schon aus, daß die Regen des kontinentalen Typus sehr häufig Gewitterregen sind, deren Bildung kräftige konvektive Ströme erfordert. Nun hat HÉJAS speziell für die ungarischen Juniregen nachgewiesen (Meteorol. Zeitschr. 1899 S. 220), daß 61 v. H. von Gewittertagen stammen (Mai 43, Juli 51, August 49 v. H.), was wahrscheinlich in ähnlichem Ausmaße auch für benachbarte alpine Orte gelten wird. Es ist aber bei diesen ein mehrfaches Maximum der Gewitterhäufigkeit während der Sommermonate nachgewiesen, und gerade einige der oben angeführten Stationen haben im Juni und im Juli die gleiche oder fast gleiche Zahl von Gewittertagen, so daß für die drei Sommermonate gleich große Regenmengen leicht zustande kommen können. (Vgl. A. v. OBERMAYER, Gewitterbeobachtungen und Gewitterhäufigkeit an einigen meteorologischen Beobachtungsstationen der Alpen. Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Kl. CXVI, Abt. II[a] S. 739. — C. JELINEK, Über die jährliche Verteilung der Gewittertage in Österreich und Ungarn. Ebenda LXI, Abt. II.)

Nördlich vom Gebiet des Mai-Maximums in Mazedonien und Bulgarien beginnt das große Gebiet der Juniregen, das sich nordwärts über das nördliche Serbien, über Ungarn, Mähren und Böhmen[4] bis an die Sudeten, ja in manchen Jahren bis nach dem südlichen Oberschlesien, andererseits über Rumänien und die Bukowina nach dem östlichen Galizien erstreckt. In dem bergumschlossenen Siebenbürgen sind diese Juniregen besonders kräftig entwickelt.

Ebenso folgt in Transkaukasien nördlich vom Mai-Maximum ein ausgedehntes Gebiet mit Juniregen, die in Ciskaukasien, am Nordufer des Schwarzen

---

[1] In Wien beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Maximum des Regens im Mai 0.20, Juni 0.16, Juli 0.20, August 0.13. Westlicher, in Kremsmünster, fällt das Maximum schon entschieden auf den Juli: Juni 0.19, Juli 0.34, August 0.27.

[2] Pralognan liegt am Nordfuß des Massivs de la Vanoise, über das ein aussichtsreicher Weg aus der Tarentaise in die Maurienne führt.

[3] Zoppé del Cadore liegt in den Dolomiten, im oberen Einzugsgebiet des Piave, 17 km westsüdwestlich von Pieve di Cadore.

[4] Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Maximums ist in

	Juni	Juli	Aug.
Brünn	0.27	0.22	0.18
Prag	0.33	0.22	0.18

und des Asowschen Meeres sowie in den Don-Wolga-Landschaften bis etwa 52° n. Br. vorherrschen. Das Gebiet der Juniregen nimmt also in Europa von Westen nach Osten an Ausdehnung erheblich zu.

Dasselbe gilt von den Juliregen, die sich an die Juniregen nach Norden hin anschließen und die für ganz Mittel- und Osteuropa charakteristisch sind.

In Frankreich gibt es Juliregen nur im nördlichsten Teil (Picardie, Artois), mit Ausnahme der Küste, wo Oktoberregen herrschen. Gute Repräsentanten dieses Gebiets der Juliregen sind Soissons, Laon, St. Quentin, Cambrai; auch das südwestlich von St. Quentin gelegene Montdidier, das eine 86jährige Beobachtungsreihe aufweisen kann (H. Duchaussoy, Observ. météorol. de Victor et Camille Chandon de Montdidier. Amiens 1902—04. 2 Bde. 8°. Die Beobachtungen reichen von 1784 bis 1869), hat die größte Regenmenge im Juli, aber die Wahrscheinlichkeit für ihren Eintritt beträgt im Mai 0.14, Juni 0.10, Juli 0.11, August 0.10, September 0.14, Oktober 0.16. Der ozeanische Einfluß macht sich also, ähnlich wie im Becken von Paris, schon sehr häufig geltend; die starken Gewitterregen des Juli geben aber diesem Monat in den Mittelwerten das Übergewicht. Das Gebiet der Juliregen zieht sich, an Breite erheblich zunehmend, durch das südliche Belgien und südöstliche Holland nach Deutschland, wo es ganz Mittel- und Norddeutschland bis nahe an die Küste einnimmt. Die graphische Darstellung auf Blatt 63 des Klima-Atlas von Deutschland zeigt das am besten.

Die Juliregen beherrschen auch Polen und Mittelrußland bis an den Ural und nordwärts bis etwa 58° n. Br. In Dorpat fällt zwar der größte Mittelwert auf den Juli, doch ist die Wahrscheinlichkeit eines August-Maximums schon etwas größer (Juli 0.28, August 0.30), was auch bei Petersburg der Fall ist (Juli 0.23, August 0.25).

Nördlich vom Gebiet der Juliregen liegt das kaum minder ausgedehnte der Augustregen. In Frankreich kommt es nicht mehr zur Ausbildung eines solchen (Troyes steht wohl nur vereinzelt da). Durch Belgien und Holland zieht es sich als ein schmaler Streifen hinter der Küste bis nach Ostfriesland und den nordfriesischen Inseln. Dann breitet es sich aus in Schleswig-Holstein, Jütland, auf den dänischen Inseln und erfüllt ganz Schweden und Finnland bis etwa zum nördlichen Polarkreis. Auch an der Bucht von Christiania und nordwärts im Innern bis zur Hochebene von Dovre–Rörös herrschen Augustregen. Im südlichen Schweden, ungefähr bis zum 59. Breitengrade, entfällt allerdings die größte Monatsmenge auf den Juli ebenso häufig wie auf den August. So ist z. B. in Växjö die Wahrscheinlichkeit eines Maximums im Juli und im August gleich groß, nämlich 0.27, in Lund nach 119jährigen Messungen im Juli 0.21, August 0.23, in Uppsala im Juli 0.31, August 0.37, dagegen in Piteå unter 65° n. Br. im Juli 0.14, August 0.35, September 0.20. In Rußland nördlich von Kostroma fällt das Maximum auch auf den August, doch läßt sich die Ausdehnung dieses Gebiets nicht genau angeben, weil die Zahl der langjährigen Beobachtungsreihen zu spärlich ist.

Nachdem ich im vorhergehenden Abschnitt nachgewiesen habe, wie regelmäßig der zeitliche Eintritt der größten Monatsregenmenge vom Mai bis

zum August von Süden nach Norden fortschreitet, wirkt es im ersten Augenblick überraschend zu sehen, daß im höchsten Norden von Fennoscandia, nämlich in Finnmarken, im norwegischen, schwedischen und finnischen Lappland wieder der Juli mit großer Bestimmtheit als Monat der größten Regenmenge auftritt (arktischer Typus). Die norwegischen Stationen Alten, Sydvaranger und Karasjok, die schwedischen Karesuando und Jokmock, die finnische Enare zeigen dies. Aber auch noch weiter östlich am Rande des Eismeeres, nämlich in Kem und Archangelsk, verhält es sich so. Mit welcher Häufigkeit der Juli in diesem nördlichsten Teil von Europa die größte Regenmenge hat, zeigt schon das nahe dem Polarkreis liegende schwedische Jokmock: Juli 0.43, August 0.24, und noch entschiedener das etwas nördlicher, an der Landesgrenze gelegene Karesuando: Juli 0.65, August 0.28[1]. Hier nimmt die Regenmenge vom Juni zum Juli um volle 13 v. H. der Jahresmenge zu. In dem etwas nördlicher gelegenen norwegischen Kautokeino (69° n. Br., 264 m) beträgt diese Zunahme vom Juni zum Juli sogar 15.5 v. H. In den drei Monaten Juni, Juli, August fallen hier 8.9 bzw. 24.4, 20.5 v. H., zusammen also 53.8 v. H., d. h. mehr als die Hälfte der ganzen Jahressumme, die freilich nur 318 mm beträgt.

Dieses Juli-Maximum im höchsten Norden Europas steht im größten Gegensatz zum Juli-Minimum im äußersten Süden des Erdteils.

Im August ist in diesen nordischen Gebieten die Temperatur schon so niedrig, daß kräftige Konvektionsströme nicht mehr so häufig wie im Juli zustande kommen. Damit entfällt auch die Möglichkeit der Entstehung ergiebiger Niederschläge.

August-Maxima des Regens gibt es auch auf den Britischen Inseln, und zwar immer nur in geringer Ausdehnung im Innern und im Osten, also in Leegebieten, in denen die Einwirkung der Landmasse besser zur Geltung kommen kann. So in Schottland bei Edinburg und nordwärts bis zur Linie Dundee—Perth[2] — am Nordausgang des Kaledonischen Kanals liegt bei Inverness und Nairn sogar ein kleines Gebiet mit einem Juli-Maximum —, in Mittelengland bei Stonyhurst—Manchester sowie im östlichen Teil von Irland bei Kilkenny, Dublin und Belfast. Diese Gebiete gehören derselben Breitenzone an wie die der Augustregen auf dem Kontinent in Nordfriesland, Jütland, Südschweden.

Die Anordnung der kontinentalen Sommerregen-Maxima nach Breitenzonen und ihr Vorrücken von Süden nach Norden erfolgt

[1] Bei der Berechnung dieser Wahrscheinlichkeitswerte fiel mir auf, daß in der ersten Hälfte der 32 Jahre umfassenden Beobachtungsreihe der Juli selten, in der zweiten aber sehr häufig die größte Monatsmenge hatte. In den ersten 16 Jahren fiel nämlich das Maximum auf den Juli 6-, August 8mal, in den zweiten 16 Jahren aber 14- bzw. 1 mal. Man ersieht daraus, daß auch hierzu längere Reihen erforderlich sind. Übrigens habe ich bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeitswerte öfter festgestellt, daß viele Jahre hintereinander das Maximum des Regenfalls auf einen und denselben Monat fällt, dann aber mehrere Jahre hindurch die Zeit des Eintretens schwankt und schließlich wieder zum ersten Monat zurückkehrt. Offenbar ist die zeitweilige Einbeziehung in ein anderes, benachbartes Regenregime die Ursache dieses Verhaltens.

[2] Zwischen Perth und dem 25 km westlich davon gelegenen Crieff verläuft die Grenze zwischen den Augustregen im Osten und den Oktoberregen im Westen. Der September wird als Maximalmonat übersprungen, wie auch sonst meistenteils in Europa; vgl. weiter unten.

also bis zum nördlichen Polarkreis ziemlich regelmäßig. Es sind großenteils Regenfälle endogenen Ursprungs, an denen der von lokaler Verdunstung herrührende Wasserdampf einen sehr erheblichen Anteil hat; sie nehmen mit dem Ansteigen der Temperatur zu, weil die Möglichkeit zur Bildung aufsteigender Luftströme damit wächst. Der ganze Vorgang der Verschiebung der Maximalzonen des Regenfalls nach Norden in den Monaten Mai bis August erinnert an die Verhältnisse in der Äquatorialzone, in der die größten Regenmengen nach den Zenitständen der Sonne eintreten und mit diesen wandern.

Diese räumliche und zeitliche Aufeinanderfolge der Zonen größten Regenfalls würde in Europa wahrscheinlich noch regelmäßiger vor sich gehen, wenn dieses nicht durch die Binnenmeere so stark gegliedert, sondern wenn es eine große geschlossene Festlandmasse wäre. Ich folgere das aus dem Verhalten in Westasien zwischen den Meridianen von etwa 60 und 70° östlicher Länge. In diesem Streifen des asiatischen Festlandes, der im Süden erst bei 25° n. Br. an das Meer reicht, liegt nach der Karte Nr. 62 des Atlas Climatologique de l'Empire de Russie in der Gegend von Merw, Buchara und Taschkent ein Gebiet mit einem März-Maximum des Regenfalls, daran schließt sich nach Norden ein solches mit Aprilregen, das die Kisil-Kum, den Aralsee und das Ostufer des Kaspisees umfaßt, und daran wieder nach Norden ein Gebiet mit Mairegen, und so fort, wie in Europa. Dieses asiatische März-Maximum liegt zwischen etwa 37° und 41° n. Br., könnte also auch in Europa existieren, wenn das Mittelmeer nicht da wäre, das in diesen Breiten Winterregen bedingt. Es macht sich auch wirklich in einem sekundären März-Maximum an einigen südlichen europäischen Stationen bemerkbar, nämlich in San Fernando, Sevilla, Coimbra, Serra da Estrella, Porto, Oviedo (wo es sogar das Hauptmaximum ist); Palermo, Messina, Neapel usw. Ebenso zeigen einige etwas nördlicher gelegene Orte Europas ein sekundäres April-Maximum, das dem asiatischen Hauptmaximum dieses Monats entsprechen würde (s. Tabelle).

3.

Der ozeanische Typus der jährlichen Periode der Niederschläge hat außer im Mittelmeergebiet naturgemäß in den an den Atlantischen Ozean angrenzenden Ländern die Vorherrschaft. Wegen der vorwiegenden westlichen Luftströmungen und den vom Ozean kommenden Depressionen dringt er verhältnismäßig tief in den Kontinent ein, ist jedoch weiter östlich, wo die Landmasse kompakter wird, auf einen schmalen Küstenstreifen eingeschränkt, hinter dem der kontinentale Typus bald das Übergewicht erhält.

Während bei diesem eine geschützte Lage für die Bildung von Niederschlägen günstig ist, weil sich konvektive Strömungen in ihr gut entwickeln können, werden beim ozeanischen Typus die ganz frei im Luv gelegenen Orte bevorzugt. Welch großen Einfluß in dieser Beziehung schon eine kleine Verschiedenheit in der Lage ausmacht, lehren z. B. die beiden Stationen Westerland und Keitum auf der nordfriesischen Insel Sylt, deren ozeanische Westküste einen nordsüdlichen Verlauf hat, also den Westwinden senkrecht ent-

gegensteht. Westerland liegt ganz nahe der Westküste der Insel, also im Luv; speziell der Regenmesser befindet sich etwa einen halben Kilometer vom Strande entfernt. Dagegen liegt Keitum 4.5 km ostsüdöstlich von Westerland am Rande des Wattenmeeres, d. h. im Verhältnis zu Westerland etwas im Lee. Höhenunterschiede sind nicht vorhanden. Westerland erhält im Jahre 80 mm oder nahezu 12 Prozent mehr Niederschläge als Keitum, und zwar in den sechs Monaten Oktober bis März, in denen der ozeanische Typus am meisten zur Geltung kommt, 67 mm und in den sechs Monaten April bis September 13 mm. Beim Auftreffen auf die Küste, die hier mäßig hohe Dünen trägt, erleidet die westliche Luftströmung eine Stauung, die sich in eine Aufwärtsbewegung umsetzt, durch welche die Konvektion und damit die Regenbildung gefördert wird.

Die Monate größter Niederschläge sind beim ozeanischen Typus Oktober, November, Dezember, selten der Januar. Auf den Februar fällt nirgends das Maximum, er ist im Gegenteil vielfach der trockenste Monat, woran aber nicht die kleine Zahl seiner Tage Schuld hat. Der März und der April würden als Monate maximalen Regenfalls nach dem oben Gesagten bereits dem kontinentalen Typus angehören; sie sind als solche aber nur im westlichen Asien vertreten.

Ein Oktober-Maximum finden wir an der Küste von Norwegen, etwa vom Polarkreis bis zur Südspitze bei Mandal. Im hohen Norden sind auch die Nachbarmonate November und September vereinzelt als Monate der größten Niederschlagsmenge vertreten, während das östlich von Bergen[1] im Innern des Hardangerfjordes gelegene Ullensvang die meisten Niederschläge im Januar erhält. Das Oktober-Maximum besteht ferner an der ganzen Ostküste von England, von der Mündung des Tweed ab südwärts, sowie an der Südküste, nach Westen bis zur Portland-Spitze. Es dringt bis etwa zur Mitte der Insel ins Land ein, umschließt die obengenannten kleinen Gebiete mit Augustregen und macht sich sogar noch an der Irischen See, in der Bucht von Liverpool und westwärts bis Llandudno geltend. Auch ganz Frankreich, mit Ausnahme der oben geschilderten inneren Gebiete mit Mai-, Juni-, Juliregen, wird vom Oktober-Maximum beherrscht, das namentlich auch im gebirgigen südöstlichen Teil zwischen der Rhone und den Alpen kräftig entwickelt ist. Das hohe Gebirge bildet hier eine scharfe Grenzscheide[2] zwischen dem Oktober-Maximum in Frankreich und dem Mai-Maximum in Italien nördlich vom Po. Erst längs

[1] Wahrscheinlichkeit des Oktober-Maximums in Bergen 0.32.

[2] Auf dem Kamm der Cottischen Alpen findet der Übergang vom Oktober- zum Mai-Regime bzw. ein Ausgleich zwischen beiden statt. Wenigstens sprechen die von ANGOT a. a. O. für den Mont-Cenis-Paß (Refuge 18; 2082 m) nach 22jährigen Beobachtungen berechneten Monatsmittel des Regenfalls dafür: 54, 67, 106, 94, 114, 109, 76, 80, 90, 114, 77, 64, Jahressumme 1045 mm. Auch das nahe vom Paß im oberen Arctale gelegene Bessans (1742 m) hat im Mai und Oktober nahezu gleiche Regenmengen (82 bzw. 88 mm). Dagegen weist der südlich davon befindliche Paß des Mont Genèvre (1856 m) bei nur 808 mm (!) Jahresmenge wieder ein Oktober-Maximum auf (112, Mai 91 mm). Das gilt in noch stärkerem Maße für weiter westlich gelegene Hochstationen, wie z. B. den Col du Lautaret (2058 m) auf der Nordseite des Pelvoux-Massivs, wo der Mai 101, der Oktober 152 mm Regen erhält.

Leider stehen von der italienischen Ostabdachung der Westalpen keine hochgelegenen Stationen mit langjährigen Mittelwerten zur Verfügung.

dieses Flusses und südlich von ihm kommt auch in Italien das Oktober-Maximum überall zur Geltung, sowohl an der Küste wie im Innern der doch nur schmalen Halbinsel. Es reicht hier bis ungefähr $41\,^1/_2\,^\circ$ n. Br. Auch an der Nord- und Ostküste des Adriatischen Meeres, südwärts nicht ganz bis zur Insel Lesina, und selbst ziemlich tief im Innern der östlichen Küstenländer hat das Oktober-Maximum die Herrschaft. Hier aber nicht ganz uneingeschränkt; denn die 31jährige Beobachtungsreihe von Sarajewo (Meteorol. Zeitschr. 1912 S. 140) zeigt, daß der nasseste Monat am häufigsten der November (6mal), demnächst der Juni, September, Oktober (je 4mal) war. Sarajewo liegt also in einem Übergangsgebiet, das bisweilen von den Oktoberregen im Nordwesten, von den Juniregen im Osten, den Novemberregen im Süden und Südwesten beherrscht wird. Interessant ist der Übergang des Regenregimes in der Nordostecke der Adria zu dem in den Tälern der Ostalpen, welche die meisten Niederschläge im Sommer erhalten. Triest, Görz, Udine, Raibl, Saifnitz usw. haben noch ausgesprochene Oktoberregen, Klagenfurt dagegen Juli- und Augustregen, so daß die Karawanken und die Gailtaler Alpen als Grenzscheide anzusehen sind[1].

Von der französischen Kanalküste[2] reicht das Oktober-Maximum als schmaler Streifen ostwärts längs der belgischen und holländischen Küste bis Helder, d. h. bis zu dem Punkte, wo der Verlauf der Küste eine mehr westöstliche als nordsüdliche Richtung annimmt, wo sie also mehr im Lee zu liegen kommt. Sowie aber die Küste und die Inseln wieder eine nordsüdliche Erstreckung haben, wie bei den nordfriesischen Inseln Sylt, Fanö und in Nordjütland (Thisted), werden Oktoberregen angetroffen. Daß solche auch das freiliegende Helgoland hat, ist leicht verständlich. In der Ostsee scheinen nur einige besonders exponierte Küsten ein Oktober-Maximum zu haben, nämlich Hammerhus auf der Nordwestspitze der Insel Bornholm und die Gegend von Libau–Memel, d. h. wieder eine nordsüdlich verlaufende Küste, die von westlichen Winden senkrecht getroffen wird. Das Oktober-Maximum hat also eine sehr große Ausdehnung.

Als sekundäres Maximum machen sich die Oktoberregen ostwärts noch bemerkbar im südlichen Schweden und in Deutschland längs der Küste bis zum 14. Längengrad. Von da verläuft die Ostgrenze dieses sekundären Maximumgebiets nach SSW über den Harz, Thüringer Wald, unteren Main, Vogesen nach Bern, während in Lausanne und Genf der Oktober wieder das Hauptmaximum aufweist. Die in meinem Regenwerk I 86 Fig. 11 gegebene Darstellung der Verbreitung des sekundären Oktober-Maximums in Norddeutschland stimmt damit überein.

[1] Nach Conrad, Klimatographie von Kärnten S. 17, hätte Kappel a. d. Drau, also nördlich von den Karawanken, noch Oktoberregen. Die zugrunde liegende Beobachtungsreihe von 15 Jahren ist aber sehr kurz und kann noch keine Entscheidung bringen. Das Klagenfurter Becken hat sicherlich zumeist Sommerregen. Auch F. Seidl, Das Klima von Krain S. 274, kommt zu dem Ergebnis, daß die Karawanken eine ausgeprägte Wetterscheide bilden.

[2] Nach den Mittelwerten beurteilt, hat auch die Bretagne Oktoberregen, aber die langjährige Reihe von Brest lehrt, daß das Maximum in der Nordwestecke am häufigsten im Dezember eintritt (Oktober 0.18, November 0.20, Dezember 0.22), wie im gegenüberliegenden Cornwall und auf den Scilly-Inseln.

Eigentliche Wintermaxima des Niederschlags (November, Dezember) haben außer dem am Anfang von Abschnitt 2 charakterisierten Gebiet am Südrand von Europa die Westhälften von Irland, Schottland und England sowie ein schmaler Küstenstreifen der Krim und die Nordostküste des Schwarzen Meeres zwischen Noworossijsk und Sotschi. Zwischen beiden Gebieten besteht aber der tiefgehende Unterschied, daß letzteres auch im Sommer reichliche Regen empfängt, während jenes Mittelmeergebiet alsdann sehr trocken oder ganz regenlos ist. Auf der Appenninenhalbinsel schließt sich an das Gebiet mit einem Oktober-Maximum südlich von etwa $41\,^1/_2{}^\circ$ n. Br. ein solches mit vorherrschenden Novemberregen an, während im äußersten Süden (Sizilien und Malta) das Maximum dem Dezember zukommt[1]. Es besteht also ein interessanter Gegensatz in der Wanderung des größten Regenfalls nördlich und südlich von Norditalien: während sich nördlich vom Potale das Maximum in der Richtung nach Norden vom Mai auf den Juni, weiter auf den Juli und August verschiebt, geht es in der Richtung nach Süden vom Oktober auf den November und weiter auf den Dezember über. Ähnlich verhält es sich auf der Balkanhalbinsel. Daß auf der Iberischen Halbinsel der Dezember selten der Monat des größten Regenfalls ist, hängt offenbar damit zusammen, daß sich im Winter über ihr ein selbständiges Luftdruckmaximum ausbildet, das natürlich die Entstehung von Niederschlägen nicht begünstigt. Von den Wegen, welche die barometrischen Depressionen in Südspanien und durch die Straße von Gibraltar im Mittelmeer nehmen, wissen wir leider so gut wie gar nichts. Die zahlreichen Minima, die in der kalten Jahreszeit auf der Zugstraße Va (der VAN BEBBERschen Nomenklatur) ins westliche Mittelmeer eindringen, bringen wohl Frankreich, Nordspanien und Italien reichliche Niederschläge, können aber nur zum Teil die im äußersten Süden veranlassen. Die Mittelmeer-Meteorologie weist in dieser Beziehung noch große Lücken auf.

Der Monat September, von dem oben schon einmal kurz die Rede war, nimmt bezüglich der jährlichen Periode des Regenfalls in Europa eine gewisse Ausnahmestellung ein. Nur in drei kleinen Randgebieten fällt auf ihn die größte Monatsmenge, nämlich an der Nordwestküste von Norwegen (Florö, Brönnö), an der Ostküste von Spanien (Barcelona, Valencia) und am Westufer des südlichen Kaspisees (Lenkoran)[2]. Man kann diese Regen in Norwegen als frühe Herbstregen auffassen und dem ozeanischen Typus zurechnen; die Zunahme vom August zum September beträgt nur 4 Prozent der Jahresmenge. Dagegen erfolgt in Lenkoran der Übergang vom August zum September sprungartig, nämlich um 13.5 Prozent, und ebenso in Valencia um 13.4 Prozent. Da auch Aschur-Ade in der Südostecke des Kaspisees das Maximum des Regenfalls im September hat, liegt offenbar keine lokale, sondern eine

[1] Auch die zwischen Irland und England liegende Insel Man erhält die meisten Niederschläge im Dezember.

[2] In Lenkoran, wo die September- und Oktobermengen gleich groß sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der größten Monatsmenge des Regens im September 0.43, Oktober 0.30, November 0.23, Januar 0.03; in den übrigen acht Monaten ist das Maximum nie vorgekommen.

regionale Eigentümlichkeit vor, für die vielleicht bestimmte barometrische Depressionen, deren Bahnen uns noch unbekannt sind, die Erklärung abgeben. Gewittererscheinungen sind es jedenfalls nicht; denn langjährige Aufzeichnungen in Lenkoran zeigen, daß daselbst die Frühjahrs- und Frühsommer-, nicht die Herbstmonate gewitterreich sind. Dagegen ist an der spanischen Ostküste die vermehrte Gewitterhäufigkeit im September offenbar der Grund für das Regenmaximum dieses Monats. Die mittlere Zahl der Tage mit Gewitter beträgt nämlich in:

	Barcelona	Valencia	Murcia	Palma de Mallorca	Mahon (Menorca)
Januar	0.1	0.2	0.3	0.3	0.5
Februar	0.4	0.1	0.5	0.4	0.7
März	0.5	0.2	0.8	0.5	0.4
April	1.2	0.7	2.0	0.5	0.6
Mai	0.8	1.5	2.8	0.6	1.1
Juni	1.8	1.6	3.1	1.4	0.9
Juli	1.6	1.5	2.1	1.0	0.9
August	1.5	1.2	2.1	1.2	1.1
September	**2.8**	**3.2**	**4.1**	**2.2**	**1.6**
Oktober	1.5	1.1	1.7	1.3	1.5
November	0.3	0.5	0.6	1.0	0.9
Dezember	0.1	0.2	0.5	0.5	0.4
Jahr	12.6	12.0	20.6[1]	10.9	10.6

Die größte Zahl von Gewittertagen hat also an der Ostküste von Spanien und auf den Balearen der Monat September.

Daß im übrigen Europa, außer den genannten drei kleinen Gebieten, der September als Regenmonat keine Rolle spielt, rührt daher, daß er als ein Übergangsmonat angesehen werden muß. Die fünftägigen Luftdruckkarten von Europa und dem Nordatlantischen Ozean, deren Herstellung ich durch Professor von Elsner veranlaßt habe (vgl. Meteorol. Zeitschr. 1923 S. 368), zeigen nämlich deutlich, daß im Laufe des September der Übergang der sommerlichen Luftdruckverteilung in die winterliche allmählich vor sich geht. Eine schmale Zunge hohen Luftdrucks schiebt sich von Pentade zu Pentade in der Richtung von Westen nach Osten durch die Mitte des Kontinents hindurch und breitet sich am Ende des Monats im Osten von Europa weiter aus. Der Monat September hat deshalb in einem großen Teil von Mitteleuropa ein sekundäres, stellenweise auch das Hauptminimum der Regenmenge aufzuweisen, und er ist zugleich durch heiteres, ruhiges Wetter besonders ausgezeichnet.

4.

Da die beiden Typen der jährlichen Regenverteilung in Europa gleichzeitig zur Geltung kommen, wird die jährliche Periode der Niederschläge ziemlich kompliziert und mannigfaltig; denn es gibt nur wenige Gegenden, in denen der ozeanische und der kontinentale Typus rein auftreten.

[1] Das binnenländische Murcia hat fast doppelt soviel Gewittertage als die Küstenorte. Das noch weiter landeinwärts gelegene Albacete hat im September noch ebensoviel Gewittertage (3) wie im August.

Außer der Eintrittszeit der größten Monatsmenge spielt die der kleinsten, von der noch nicht die Rede war, eine entscheidende Rolle. Die Hauptminima des Regenfalls fallen beim kontinentalen Typus auf den Winter (Januar, Februar, bisweilen auch März und April), beim ozeanischen auf den Hochsommer (Juli[1], August) oder auf das Frühjahr (namentlich April), das an allen Küsten Nord- und Mitteleuropas, mit wenigen Ausnahmen, trocken ist. Die in West- und Südeuropa weitverbreiteten Oktoberregen, deren Auftreten als Hauptmaximum oben geschildert wurde, die aber auch als Nebenmaximum tief in den Kontinent eindringen, bedingen es hauptsächlich, daß große Teile von West- und Südeuropa zwei Maxima des Regenfalls im Frühjahr oder Frühsommer (April, Mai, Juni, Juli) und im Herbst (Oktober) haben und dementsprechend auch zwei Minima. Beide Maxima sind gewöhnlich ungleich groß, doch fehlt es auch nicht an Orten, an denen sie gleichwertig auftreten; z. B. Chartres, Paris.

Der zeitliche Abstand der beiden entgegengesetzten Extreme voneinander wechselt außerordentlich von Region zu Region und kann alle möglichen Werte von 0 bis 6 Monaten annehmen. Beim reinen ozeanischen und beim kontinentalen Typus tritt das Minimum gewöhnlich ein halbes Jahr nach dem Maximum ein, es kommt aber auch vor, daß beide Extreme unmittelbar aufeinanderfolgen. So reiht sich im mittleren Südfrankreich (Tarbes, Toulouse) an das Maximum im Juni unmittelbar im Juli das Minimum an, umgekehrt wird in Valencia an der Ostküste Spaniens das August-Minimum vom September-Maximum abgelöst, und in Monastir (Bitolia) folgt auf das Minimum im September das Oktober-Maximum.

Der trockenste Monat, dessen Eintrittszeit an manchen Orten ebenso unbestimmt ist wie die des nassesten, fällt in Europa auf einen der neun Monate Januar bis September, während die drei übrigen Monate des Jahres, Oktober, November, Dezember, nirgends die kleinste Niederschlagsmenge haben. Darin zeigt sich der starke und weitreichende Einfluß des Meeres.

Das Minimum im Januar, bzw. häufiger im Februar, herrscht auf dem eigentlichen Rumpf des Kontinents. Es reicht vom Innern Frankreichs bis an den Ural und besitzt die größte Ausdehnung aller Minimumgebiete. Zwischen Rhein und Weser wird es durch eine Ausbuchtung des Gebietes des April-Minimums etwas eingeschnürt, wie die Karte Nr. 63 des Klima-Atlas von Deutschland gut erkennen läßt. Der März ist in Baltland, Finnland, Finnmarken, stellenweise in Schweden und auch im Innern der Balkanhalbinsel der trockenste Monat. Dagegen hat das Minimum im April eine große Verbreitung an den Küsten der Nordsee, der Irischen See, des Nordmeeres und der nördlichen Ostsee. Der Mai ist am trockensten im südwestlichen England, in der gegenüberliegenden Bretagne sowie an einigen Küstenstrichen des Schwarzen Meeres, der Juni im nördlichen Schottland und an der Südwestküste von Norwegen. Auf den Juli bzw. Juli/August fällt das Minimum des Regenfalls im südlichen und westlichen Teil der Balkanhalbinsel, in Italien

[1] Das Juli-Minimum reicht in Mitteleuropa bis 45° n. Br., an der Westküste Frankreichs sogar bis 48° (Lorient) hinauf.

nordwärts bis zum Po, in Südfrankreich bis etwa 44—45° n. Br. (je weiter westlich, um so höher hinauf) sowie auf der ganzen Iberischen Halbinsel. Der September scheint nur an einigen Orten im Innern der Balkanhalbinsel der trockenste Monat zu sein, während er an sehr vielen anderen Orten ein sekundäres Minimum aufweist.

Die jährliche Periode der in Europa fallenden Niederschläge läßt sich in eine der folgenden fünfzehn Kombinationen einordnen: 1. Wintermaximum, Sommerminimum; 2. Wintermaximum, Frühjahrsminimum; 3. Frühjahrsmaximum, Winterminimum; 4. Frühjahrsmaximum, Sommerminimum; 5. Sommermaximum, Winterminimum; 6. Sommermaximum, Frühjahrsminimum; 7. Herbstmaximum, Frühjahrsminimum; 8. Herbstmaximum, Sommerminimum; 9. Hauptmaximum im Frühjahr, Nebenmaximum im Herbst, Hauptminimum im Winter, Nebenminimum im Sommer; 10. Hauptmaximum im Frühjahr, Nebenmaximum im Herbst, Hauptminimum im Sommer, Nebenminimum im Winter; 11. Hauptmaximum im Herbst, Nebenmaximum im Frühjahr, Hauptminimum im Winter, Nebenminimum im Sommer; 12. Hauptmaximum im Herbst, Nebenmaximum im Frühjahr, Hauptminimum im Sommer, Nebenminimum im Winter; 13. Hauptmaximum im Sommer, Nebenmaximum im Herbst, Hauptminimum im Frühjahr, Nebenminimum im September; 14. Hauptmaximum im Herbst, Nebenmaximum im Sommer, Hauptminimum im Frühjahr, Nebenminimum im September; 15. Hauptmaximum im Winter, Nebenmaximum im Sommer, Hauptminimum im Frühjahr, Nebenminimum im Herbst.

Wenn von einem Herbstmaximum (Haupt- oder Nebenmaximum) gesprochen wird, so ist darunter fast immer ein solches im Oktober zu verstehen. Desgleichen ist ein Herbstminimum meistenteils identisch mit einem September-Minimum.

Beim Einordnen der in der Schlußtabelle vertretenen Stationen in diese Kombinationen wird man die Wahrnehmung machen, daß die mit 1, 5, 7, 8, 10, 11 und 12 bezeichneten am häufigsten vorkommen.

Die Amplitude der jährlichen Periode, ausgedrückt in Prozenten der Jahresmenge, schwankt in Europa zwischen den Werten 4 und 22. Sie ist am größten in den Gebieten mit rein ozeanischem oder rein kontinentalem Typus, also am Südrande von Europa (ozeanischer Typus) sowie am Nord- und am Ostrande (kontinentaler Typus). In Malta beträgt die Amplitude 20 Prozent, in San Fernando bei Cádiz 15; im nördlichen Norwegen (Alten, Karasjok) gleichfalls 15 und ebensoviel im geschützt liegenden Schäßburg in Siebenbürgen. In Katharinenburg am Ostrande von Europa hat sie den Wert 17. Noch größer ist die Amplitude im Innern von Finnmarken bei dem bereits genannten Ort Kautokeino, der am Oberlauf des Altenelv, rund 100 km von dessen Mündung entfernt liegt und der durch Küstengebirge dem Einfluß des Ozeans ziemlich entzogen ist. Hier beträgt die Schwankung zwischen größter und kleinster Monatsmenge 22.3 Prozent, berechnet nach allerdings nur 15jährigen Mittelwerten, die im Jahrgang 1908 der »Nedbøriagttagelser i Norge« veröffentlicht sind. So streng periodische Sommerregen kommen sonst nirgends in Europa vor; sie sind eine sehr bemerkenswerte Eigentümlichkeit dieses hochnordischen Gebiets, die sich in pflanzengeographischer

Beziehung bemerkbar machen muß. Die niedrigsten Werte der Amplitude kommen am Niederrhein, in Holland, Belgien, Mittelfrankreich und Großbritannien vor. Im übrigen gelten bezüglich der Amplitude für ganz Europa dieselben Gesetzmäßigkeiten, die ich auf Grund eines besonders reichen Materials für Norddeutschland nachweisen konnte und auf die ich hier der Kürze halber verweise: diese Sitzungsberichte 1914 S. 988, mit einer Karte der Linien gleicher mittlerer Amplitude.

5.

Alle bisherigen Darlegungen gelten im wesentlichen für Orte der Niederung. Mit größerer Erhebung über dem Meeresspiegel ändert sich aber die jährliche Periode der Niederschläge gewöhnlich in der Weise, daß die der kalten Jahreshälfte relativ mehr zunehmen als die der warmen, so daß sich in großen Höhen die Jahresperiode in das Gegenteil von derjenigen umkehren kann, die in tieferen Lagen herrscht.

Das diesbezügliche Verhalten in den deutschen Mittelgebirgen habe ich bereits zweimal eingehender behandelt, so daß ich auf diese Arbeiten nur hinzuweisen habe: Regenwerk I 98—105 und diese Sitzungsberichte 1919 428—432. Die Umkehr zeigt sich in den Berglandschaften Westdeutschlands bis etwa 11° östl. Länge. Ich habe daselbst auch schon hervorgehoben, daß in den Alpen eine solche Umkehr nicht eintreten kann, weil sie im Winter einem Gebiet hohen Luftdrucks angehören, das durch geringe Bewölkung ausgezeichnet ist. Die neuen Isonephenkarten von Europa, die K. Knoch kürzlich veröffentlicht hat, zeigen sehr schön das alpine Gebiet geringster Bewölkung in den Monaten Dezember bis Februar. Das gilt namentlich für die Zentral- und Westalpen. In den Ostalpen ist die winterliche Zunahme der Niederschläge mit der Höhe zwar viel größer als im Sommer (vgl. Hann, Klimatographie von Niederösterreich S. 73), aber zu einer Umkehr kann es nicht kommen, weil die Sommerregen am Fuß der Berge zu stark ausgeprägt sind. Das gleiche gilt für das unter demselben Längengrade liegende Riesengebirge, dessen höchste Erhebung, die Schneekoppe (1603 m), gleichfalls geringe Winterniederschläge hat, ja sich im Winter wahrscheinlich schon über der Maximalzone der Niederschläge befindet.

Dagegen erhalten die Mittel- und Hochgebirge Westeuropas in ihren oberen Regionen überwiegend Winterniederschläge. In den Berglandschaften von Großbritannien, soweit sie selbst schon in einem Gebiet mit Dezember-Maximum liegen, ist das nicht verwunderlich[1]; auch in der portugiesischen Serra da Estrella darf man ein Wintermaximum ohne weiteres erwarten (vgl. die Tabelle). In den Pyrenäen, deren Täler bis etwa 1900 m Höhe ausgesprochene Mairegen haben, fällt in noch größeren Höhen der meiste Niederschlag im Winter. Das Verhältnis der gleichzeitigen Niederschlagmengen auf

[1] Während, wie oben hervorgehoben wurde, die Küstenlandschaft bei Liverpool den meisten Regen im Oktober erhält, hat das östlich davon gelegene Bergland von Derbyshire (»The Peak«) ein ausgesprochenes Dezember-Maximum (Buxton in 300 m Höhe), das ostwärts sogar bis Sheffield reicht, aber weiter östlich bald verschwindet; denn das 45 km entfernte Bawtry hat Oktoberregen.

dem Gipfel des Pic du Midi de Bigorre (2859 m) und in Tarbes (310 m) ist nämlich folgendes:

Januar	2.6	April	1.7	Juli	1.2	Oktober	1.3
Februar	2.4	Mai	1.1	August	1.2	November ...	1.7
März	2.0	Juni	1.1	September ...	1.4	Dezember	2.3

Noch viel ausgeprägter zeigt sich die winterliche Zunahme der Niederschläge mit der Höhe in den Bergen Zentralfrankreichs, wo in der Niederung der Juni die größte Regenmenge aufweist. Gute Beispiele dafür bieten der Gipfel des Puy-de-Dôme in der Auvergne und das Plateau des Morvan, von dem die Seine einen Hauptzufluß, die Yonne, erhält. Die Verhältniszahlen sind für a) $\frac{\text{Puy-de-Dôme (1407 m)}}{\text{Clermont-Ferrand (360 m)}}$, bzw. b) $\frac{\text{Les Settons (595 m)}}{\text{Nevers (186 m)}}$:

	a	b		a	b		a	b		a	b
Januar	4.8	3.1	April	2.8	2.3	Juli	1.9	1.9	Oktober	2.4	2.4
Februar ...	4.4	2.8	Mai	1.7	1.7	August	2.2	2.1	November ..	3.0	2.7
März	3.8	2.7	Juni	1.7	1.7	September .	1.9	1.9	Dezember ..	4.4	3.2

Weniger ausgesprochen verläuft der jährliche Gang der Verhältniszahlen bei dem im Bereich der Oktoberregen liegenden Aigoual in den Cevennen und bei dem schon mehr zum Mittelmeertypus gehörigen Mont Ventoux im untern Rhonetal: a) $\frac{\text{Aigoual (1559 m)}}{\text{Montpellier (29 m)}}$, b) $\frac{\text{Mont Ventoux (1900 m)}}{\text{Orange (39 m)}}$

	a	b		a	b		a	b		a	b
Januar	2.5	2.1	April	3.1	1.7	Juli	2.8	1.3	Oktober	3.0	1.2
Februar	2.2	2.1	Mai	2.7	1.9	August	2.2	1.1	November ..	2.8	1.9
März	3.2	1.7	Juni	3.1	1.8	September .	2.6	1.2	Dezember ..	3.0	1.8

Von Gipfelstationen im Apennin liegen langjährige Niederschlagsmessungen meines Wissens nicht vor (Monte Cimone?), aber auf der Balkanhalbinsel war das meteorologische Observatorium auf dem Gipfel der Bjelašnika (2067 m) in Bosnien lange genug tätig, um das Überwiegen der Winterniederschläge auf dieser Höhe als gesichert annehmen zu können. Hann hat in der Meteorol. Zeitschr. 1903 S. 11 die Zahlenbelege dafür gegeben; im Gegensatz dazu zeigt er ebendaselbst, daß der Hochobir (2141 m) in den Karawanken und der Sonnblick (3100 m) in den Hohen Tauern die meisten Niederschläge im Sommer bzw. im Frühjahr erhalten, also dem oben erwähnten Verhalten der Westalpen sich anschließen.

Quellennachweis für die folgende Tabelle.

Albanien. Zwei ehemalige österreichische Stationen, Durazzo (1868—1878) und Valona (1858—1873), entnommen aus der Met. Z. 1914, 191. Da dieselben Mittelwerte in die neue Arbeit von V. Conrad, Beiträge zur Klimatographie der Balkanländer, Wien 1921, 8°, übergegangen sind, nehme ich an, daß weitere Beobachtungen zur Bildung neuer Mittel nicht hinzugenommen werden konnten.

Belgien. Es mußten die älteren Mittelwerte aus A. Lancasters Werk »La pluie en Belgique« (Bruxelles 1894, 8°) benutzt werden, da in den nachfolgenden Jahren die Ergebnisse der Niederschlagsmessungen für die Stationen des belgischen Netzes nicht mehr veröffentlicht

worden sind. Immerhin beruhen die Mittelwerte der in der folgenden Tabelle erscheinenden Stationen auf Beobachtungen von 30 bis 58 Jahren. Daher dürfte die jährliche Periode genügend sicher sein. Dagegen sind die absoluten Mengen des Niederschlags für viele Stationen zweifelhaft, wie J. Vincent in scharfer Kritik gezeigt hat (Annuaire Météorologique pour 1910 S. 7—46).

Bulgarien und Rumänien. Nach Hanns Klimatologie III 157 und Hepites, Régime pluviométrique de Roumanie (Bucarest 1900, 4°). Die neue Darstellung der Regenverhältnisse von Rumänien durch G. D. Elefteriŭ (Repartitiŭnea normala a precipitatiŭnilor atmosferice in România, Bucuresti 1913, 8°) gibt neu berechnete Monatsmittelwerte aus der Periode 1896—1910 nur für die Distrikte, nicht für die einzelnen Stationen. Wegen der früheren österreichischen und ungarischen Stationen (Czernowitz, Schäßburg) vgl. Österreich. Die Werte für Hermannstadt entnahm ich meiner Abhandlung über die Schwankungen der Niederschläge.

Dänemark. Fast ausschließlich 40jährige Mittel aus dem Zeitraum 1876—1915, entnommen der Abhandlung (Berliner Dissertation) von K. Lehmann-Tegel, Regenkarten des Königreichs Dänemark, Berlin 1919. Fol.

Deutschland. Ausschließlich 35jährige Mittel aus dem Zeitraum 1881—1915, die für den »Klima-Atlas von Deutschland« (Berlin 1921, Quer-Fol.) berechnet worden waren; vgl. Tab. 14 des genannten Atlas. Da diese Monatsmittel bisher nicht veröffentlicht wurden, habe ich sie für relativ mehr Orte als in anderen Ländern gegeben.

England, Schottland, Irland. Mittel aus den 35 Jahren 1881—1915, entnommen der vom Meteorological Office in London herausgegebenen Veröffentlichung »The Book of Normals, Section I« (London 1919, 8°).

Estland und Lettland. Ehemalige russische Stationen; neu berechnete Mittelwerte aus langen Reihen, wie bei Rußland. Für Dorpat wurden die Werte der Publikation des Dorpater Meteorologischen Observatoriums entnommen: »Fünfzigjährige Mittelwerte aus den meteorologischen Beobachtungen 1866—1915 für Dorpat« (Tartus 1919, 8°).

Finnland. 30jährige Mittel, 1886—1915, aus der Abhandlung von W. W. Korhonen, Untersuchungen über die Niederschlagshöhe in Finnland (Helsinki 1921, 8° = Mitteil. d. Meteorol. Zentral-Anstalt des Finnischen Staates Nr. 9).

Frankreich. Nach der von A. Angot gegebenen Darstellung: Études sur le climat de la France. Régime des pluies (Annal. d. Bur. C. Mét. d. France I, années 1911—1914, erschienen 1916—1921). Alle Mittelwerte wurden von Angot auf die 50jährige Periode 1851—1900 reduziert. Wegen zu hoher Aufstellung der Regenmesser, namentlich in Südfrankreich, dürften die Mengen öfter zu klein sein; auch wird die Schneemessung in den gebirgigen Teilen des Landes häufig als mangelhaft bezeichnet. Das ältere dreibändige Werk von V. Raulin, Observations pluviométriques dans la France, das langjährige Reihen in extenso enthält, wurde zur Ableitung von Wahrscheinlichkeitswerten benutzt.

Griechenland und Türkei. Die griechischen Stationen nach der Dissertation von O. Schellenberg, Studien zur Klimatologie Griechenlands. Leipzig 1908, 8° und dem zweibändigen Werke von Δ. Αιγινήτης, Το κλίμα της Ἑλλάδος. Ἐν Ἀθήναις 1908, 8° (I 402 und II 339) und unter Hinzunahme der späteren Beobachtungen bis 1914 von mir neu berechnet. Konstantinopel nach Hanns Klimatologie III 157.

Italien. Im Anschluß an die Arbeit von E. Millosevich, Sulla distribuzione della pioggia in Italia (Annali dell'Ufficio Centr. d. Meteorologia, vol. III, parte I, 1881), der die Beobachtungen bis zum Jahre 1879 benutzt, und an die neue Bearbeitung von F. Eredia, Le precipitazioni atmosferiche in Italia (ebenda vol. XXV, 1905), der die Untersuchung bis 1905 fortführt, wurden neue Mittelwerte berechnet, die aus Reihen von wechselnder Länge (26 bis 181 Jahre) gewonnen sind. Wegen mangelhafter Schneemessung in früheren Jahren fallen die Mittelwerte der Wintermonate an vielen Stationen Nord- und Mittelitaliens zu klein aus, aber auch aus einem anderen Grunde können die absoluten Werte der Niederschlagsmenge bei den meisten Stationen nicht ganz zuverlässig sein, weil nämlich die Regenmesser auf Türmen und Gebäuden ungewöhnlich hoch über dem Erdboden aufgestellt sind, also wahrscheinlich zu wenig messen. Die Höhe h_r beträgt nur bei zwei in unserer Tabelle erscheinenden Stationen (Messina und Palermo) 1 bis 2 m, bei den übrigen schwankt sie zwischen 6 und 60 m. Wegen der jährlichen Periode der Windgeschwindigkeit, die auf die in hoch aufgestellten Regenmessern aufgefangene Menge von größtem Einfluß ist, dürfte auch die jährliche Periode der Regenmenge dadurch etwas beeinflußt sein. — Die Werte von Rom stammen aus der Monographie von F. Eredia, Il clima di Roma. Esame delle osservazioni meteorologiche eseguite dal 1782 al 1910. Roma 1911. Fol. S. 65. — Die früher zu Österreich gehörigen Stationen Raibl, Görz,

Triest sind neu berechnet worden; vgl. Österreich. Die Werte für Pola entnahm ich der Abhandlung von W. v. Kesslitz, Die Meteorologie von Pola. Wien 1917. 4°. (Denkschr. d. Wiener Akad. d. Wiss.)

Jugoslawien. Für die früheren österreichischen Stationen wurden neue Mittel berechnet; vgl. Österreich und Meteorol. Zeit. 1912, 140. Die Werte für Belgrad, Cetinje und Skutari stammen aus den beiden Schriften von V. Conrad, Beiträge zu einer Klimatographie der Balkanländer. Wien 1921, 8° und Beiträge zu einer Klimatographie von Serbien. Wien 1916, 8° (beide S.-A. Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wiss.).

Niederlande. Mittelwerte aus längeren Reihen von 30 bis 62 Jahren (Utrecht—Bilt), entnommen der Schrift von Ch. M. A. Hartman, Het Klimaat van Nederland. A. Neerslag. Utrecht 1913, 8°. (Nederl. Meteorol. Instituut No. 102, Mededeelingen en Verhandelingen 15). Bei einigen Stationen konnte keine Angabe über die Seehöhe gemacht werden, weil die genannte Arbeit sie überhaupt nicht mitteilt und ich sie anderweitig nicht beschaffen konnte. Es kann sich nur um geringe Höhen, bis zu höchstens 50 m, handeln.

Norwegen. 40jährige Mittel aus dem Zeitraum 1876—1915, entnommen aus der Abhandlung von B. J. Birkeland, Niederschlags-Schwankungen in Norwegen. Erste Mitteilung. Kristiania 1920. 4°. S. 13 (Geofysiske Publikationer I 3).

Österreich. Ausgehend von J. Hanns Untersuchungen über die Regenverhältnisse von Österreich-Ungarn I. II (Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wiss., II. Abt. 1879, 1880), wurden die Jahrgänge 1879 bis 1906 hinzugenommen und neue Mittel aus nunmehr 40- bis 80jährigen Reihen gebildet. Die Wiener Werte stammen aus der Jubiläumsarbeit von J. Hann; Die Meteorologie von Wien (Wien 1901. 4°), im Jubelbande der Zentralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus daselbst. Auch die im X. Heft der »Beiträge zur Hydrographie Österreichs« veröffentlichten Zusammenstellungen von Regenhöhen wurden benutzt.

Polen. Wegen der früheren preußischen Stationen (1881—1915) vgl. Deutschland, wegen der früheren österreichischen Österreich. Die übrigen Werte entnahm ich dem Buch von R. Merecki, Klimatologia ziem Polskich. Warszawa 1914. 8°.

Rußland. Die von H. Wild in den Werken »Die Regen-Verhältnisse des Russischen Reiches« (St. Petersburg 1887. 4°, V. Suppl.-Bd. zum Repertorium f. Meteorologie) und »Neue vieljährige und fünfjährige Mittel der Niederschlagsmengen . . .« (Mém. d. l'Ac. d. Sciences d. St. Pétersbourg, VIII^e série, T. VII, N° 1, 1895) bekanntgegebenen Mittel wurden durch Hinzunahme späterer Beobachtungen in den damals mir bis zum Jahr 1906 zur Verfügung stehenden russischen Annalen neu berechnet. Es handelt sich nur um lange Reihen von meist 40 bis 50 Jahrgängen. Die Werte für Katharinenburg sind meiner Abhandlung über die Schwankungen der Niederschläge entnommen.

Schweden. Fast ausschließlich 50—51jährige Mittel aus der Periode 1860—1910, veröffentlicht von H. E. Hamberg in der Abhandlung »Nederbörden i Sverige« (Uppsala 1911. 4°. Bihang till Meteorol. Iakttagelser i Sverige, vol. 58).

Schweiz. 37jährige Mittelwerte, entlehnt aus dem Werk »Das Klima der Schweiz« von J. Maurer, R. Billwiller jr. und C. Hess (S. 79). Die Baseler 52jährigen Werte stammen aus der Schrift von W. Mörikofer, Klimatische Normalwerte für Basel (Verh. d. Naturf.-Ges. in Basel XXVII S. 154). Für Genf benutzte ich die 90jährigen (1826—1915) Mittelwerte, die R. Gautier in den Archives d. scienc. phys. et natur., vol. 46, p. 224 veröffentlicht hat.

Spanien und Portugal. Im Anschluß an meine Arbeit »Die Regenverhältnisse der Iberischen Halbinsel« (Berlin 1888. 8°. S.-A. Zeitschr. d. Ges. f. Erdk. zu Berlin XXIII) wurden unter Hinzunahme der Beobachtungen bis 1905 neue Mittel gebildet. Die Werte für Madrid entnahm ich der Veröffentlichung: Treinta y cinco años de observaciones meteorologicas. Exposición y Resumen de las efectuadas en el Observatorio de Madrid desde el 1° de Enero de 1860 al 31 de Diciembre de 1894. Madrid 1897. Fol. Die Angaben für Lissabon stammen aus einem Resumé in der Met. Zeitschr. 1913, 450.

Tschechoslowakei. Die früheren österreichischen und ungarischen Stationen wurden neu berechnet; vgl. Österreich. Die Prager Werte (1841—1910) brachte die Meteorol. Zeitschr. 1912, 179.

Ungarn, vgl. Österreich.

Mittlere monatliche und jährliche Niederschlagshöhe in Millimetern

Ort (Höhe in m)	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Schweden													
Karesuando (333)	12	9	7	8	20	32	74	62	33	23	17	11	308
Jockmock (255)	23	16	15	16	27	36	75	66	46	42	26	22	410
Piteå (9)	28	21	23	22	32	33	48	58	54	48	40	29	436
Umeå (12)	43	33	33	27	38	43	49	76	69	62	52	44	569
Östersund (308)	23	23	22	22	38	50	57	75	50	38	24	31	453
Härnösand (15)	37	29	37	25	43	43	61	80	68	69	54	44	590
Gäfle (10)	25	25	26	27	41	44	60	72	49	47	37	35	488
Falun (116)	30	26	27	28	48	54	71	81	54	46	33	32	530
Uppsala (24)	32	30	31	28	44	48	70	75	49	53	42	38	540
Örebro (32)	34	30	33	35	47	56	74	82	54	54	40	39	578
Askersund (96)	43	40	40	36	50	60	77	84	58	60	48	48	644
Nyköping (17)	40	33	39	32	43	45	64	70	50	55	46	46	563
Linköping (60)	31	26	28	30	40	51	74	70	50	46	38	33	517
Vänersborg (54)	53	44	45	44	54	57	74	89	69	78	60	56	723
Skara (115)	30	25	25	28	46	58	73	82	59	54	38	34	552
Jönköping (94)	27	24	25	26	40	51	67	69	52	46	36	30	493
Växjö (165)	37	33	33	31	44	54	70	77	56	56	49	42	582
Gothenburg (9)	66	51	53	41	50	55	72	95	80	81	66	69	779
Halmstad (8)	49	41	42	36	48	58	88	104	72	68	56	56	718
Lund (35)	41	35	37	36	40	54	71	72	57	60	52	46	601
Karlshamn (13)	36	33	33	33	33	43	55	64	47	48	47	41	513
Westervik (10)	31	27	33	32	39	46	64	65	47	48	48	38	516
Visby (11)	38	32	31	24	27	31	50	62	44	53	52	47	491
Norwegen													
Sydvaranger (20)	18	19	16	15	20	36	63	50	46	38	30	22	373
Karasjok (129)	19	18	14	15	23	37	66	55	45	32	27	17	368
Alten (10)	23	19	14	12	16	23	51	45	32	28	26	15	304
Tromsö (28)	117	105	82	62	50	54	63	72	116	117	111	101	1050
Bodö (16)	90	74	59	51	53	53	67	81	114	106	114	80	942
Brönnö (11)	88	62	58	52	58	55	70	79	118	107	109	80	936
Kristiansund (18)	129	92	81	62	63	54	78	107	136	145	121	112	1180
Florö (7)	233	168	155	109	115	88	135	188	239	238	226	221	2115
Bergen (18)	217	163	151	105	114	96	147	191	220	227	210	217	2058
Ullensvang (15)	178	131	111	59	60	54	73	106	132	141	163	168	1376
Skudesnes (8)	109	94	90	62	58	54	84	125	114	146	126	127	1189
Mandal (11)	110	95	104	71	74	60	99	145	112	167	155	165	1357
Oksö (13)	65	55	64	48	57	47	80	112	80	126	104	106	944
Tvedestrand (31)	65	69	90	64	70	61	103	140	95	132	122	121	1132
Aas (86)	42	38	49	44	52	50	83	102	72	88	67	69	756
Kristiania (25)	27	27	34	34	43	47	73	90	59	65	47	44	590
Eidsvold (190)	36	35	44	40	50	56	83	98	71	70	56	53	692
Granheim (490)	27	24	29	26	43	54	80	88	51	53	38	41	554
Dovre (644)	33	26	23	14	26	33	54	58	30	29	26	30	382
Rörös (640)	27	22	20	12	26	46	68	70	45	32	25	26	419
Dänemark													
Skagen (3)	36	30	35	36	40	41	58	81	52	68	56	53	586
Aalborg (5)	41	35	38	41	47	47	66	79	53	69	56	53	625
Thisted (12)	52	46	46	38	44	37	69	85	70	87	70	68	712
Randers (5)	39	35	39	33	41	49	67	82	51	66	51	51	604
Viborg (24)	39	37	40	35	40	49	68	83	58	73	56	56	634
Fanö (5)	42	36	45	35	36	47	58	86	68	86	64	61	664
Vamdrup (40)	54	45	52	42	44	60	71	98	66	82	65	69	748
Vejle (1)	51	45	55	42	44	50	72	91	65	79	66	69	729
Assens (10)	45	41	48	39	44	51	63	80	54	71	58	60	654

Ort (Höhe in m)	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Odense (15)	44	42	48	37	39	49	62	75	53	70	57	58	634
Kopenhagen (5)	33	33	37	33	37	45	59	65	45	53	42	45	527
Nykjöping p. F. (3)	43	32	43	34	40	49	71	67	54	70	50	52	605
Bogö (29)	36	33	40	32	40	47	68	65	49	62	46	46	564
Hammerhus (15)	38	33	37	34	35	38	50	60	49	62	54	51	541
Deutschland													
Tilsit (14)	44	36	42	42	49	61	83	92	64	57	55	56	681
Königsberg i. Pr. (8)	43	36	38	38	50	62	86	88	76	62	58	58	695
Angerburg (128)	35	34	34	40	51	63	97	82	50	46	41	43	616
Klaussen bei Lyck (140)	30	28	32	39	51	71	96	78	49	45	39	37	595
Altstadt (190)	34	30	32	38	52	65	85	76	54	46	42	43	597
Lauenburg i. Pom. (20)	40	30	39	32	54	57	91	82	71	57	53	51	657
Köslin (46)	49	40	48	39	54	64	93	92	76	63	59	55	732
Kolberg (2)	38	32	39	33	46	50	73	73	61	57	45	47	594
Landsberg a. W. (70)	35	30	40	34	49	51	83	58	45	40	40	42	547
Frankfurt a. O. (59)	34	30	40	32	47	51	73	55	45	41	37	41	526
Grünberg i. Schl. (150)	40	34	48	43	60	60	80	69	57	45	44	45	625
Fraustadt (102)	33	28	39	39	58	62	77	61	53	38	36	38	562
Breslau (147)	32	26	40	39	61	61	87	70	52	39	38	37	582
Oppeln (175)	34	32	41	48	64	71	101	73	61	46	42	38	651
Ratibor (195)	30	24	35	46	71	85	104	92	65	53	40	34	679
Leobschütz (275)	25	20	34	48	74	76	108	77	66	52	36	32	648
Landeck (450)	39	33	48	59	96	105	141	93	89	64	46	43	856
Friedland (Kr. Waldenburg) (506)	45	35	52	54	77	85	110	81	73	58	52	50	772
Schreiberhau (635)	67	63	85	78	106	112	129	108	105	92	83	85	1113
Schneekoppe (1603)	76	64	74	77	104	138	163	122	120	96	82	86	1202
Görlitz (213)	40	37	49	49	70	74	94	73	61	46	43	46	682
Zittau (263)	39	34	50	50	75	76	99	76	65	49	43	46	702
Bautzen (210)	39	37	52	48	67	79	99	74	70	52	45	49	711
Dresden (128)	36	34	49	44	68	79	94	68	66	47	40	45	670
Döbeln (179)	43	41	55	43	70	73	98	68	64	50	50	50	705
Torgau (99)	32	32	40	32	52	56	77	57	47	44	37	38	544
Leipzig (120)	36	34	50	40	63	67	93	65	58	51	43	43	643
Freiberg (402)	54	52	65	55	77	87	106	82	71	59	57	59	824
Altenberg (754)	109	100	127	89	102	99	115	85	84	76	83	103	1172
Oberwiesenthal (927)	93	92	110	81	93	107	123	103	94	82	85	94	1157
Bad Elster (500)	54	46	66	56	80	94	93	88	69	63	56	59	824
Stettin (26)	37	30	40	32	46	49	77	62	46	46	38	44	547
Prenzlau (39)	31	24	36	26	45	47	68	60	42	41	30	36	486
Neustrelitz (76)	43	34	45	36	49	54	82	67	48	48	41	49	594
Berlin (49)	38	33	44	35	51	52	78	56	46	45	41	44	563
Potsdam (82)	38	33	44	33	58	57	84	56	48	46	39	43	579
Zerbst (66)	33	31	41	33	50	58	85	57	50	48	37	41	564
Bernburg (85)	27	25	35	31	47	52	73	53	46	39	31	31	490
Magdeburg (58)	30	29	39	31	46	51	69	50	43	43	33	35	499
Gardelegen (52)	38	33	47	35	47	52	70	57	47	45	40	40	551
Plau (63)	34	29	41	35	49	58	77	66	43	48	37	41	558
Putbus (50)	44	32	45	34	46	49	76	74	54	58	46	51	609
Rostock (27)	36	30	38	31	48	52	73	70	47	57	42	45	569
Schwerin (50)	45	38	51	36	50	48	75	66	45	56	43	50	603
Lübeck (20)	42	35	49	38	53	54	77	73	50	64	43	51	626
Lüneburg (20)	40	37	50	38	47	54	80	64	47	55	41	44	597
Hannover (57)	44	39	54	40	54	69	85	70	47	50	42	46	640
Braunschweig (83)	48	42	54	42	54	62	84	68	53	51	46	50	654
Harzburg (244)	58	49	66	51	70	79	106	75	64	71	60	66	815
Seesen (220)	56	50	65	48	69	76	110	85	64	66	60	59	808
Klausthal (590)	115	105	119	76	88	107	150	122	98	113	106	130	1329
Osterode a. H. (220)	62	56	66	46	66	79	112	85	61	66	61	68	828
Göttingen (151)	37	34	41	34	49	64	80	58	46	46	40	44	573
Kassel (200)	41	36	44	37	53	61	80	68	51	51	44	49	615

Ort (Höhe in m)	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Nordhausen (219)	38	36	39	32	48	60	72	60	45	45	38	44	557
Sondershausen (200)	32	32	41	32	53	58	75	54	46	46	39	43	551
Erfurt (219)	27	25	36	33	55	64	75	57	48	44	33	31	528
Weimar (227)	31	29	39	33	57	66	77	54	56	46	35	35	558
Jena (157)	33	29	43	36	58	66	86	56	56	46	36	35	580
Saalfeld (240)	26	25	36	34	63	73	76	63	51	41	33	30	551
Meiningen (316)	43	41	44	37	54	68	78	67	50	54	45	53	634
Hildburghausen (380)	55	50	52	43	56	70	83	71	55	63	59	68	725
Fulda (272)	39	35	45	40	65	67	87	67	53	58	46	53	655
Frankfurt a. M. (104)	38	34	44	31	50	55	68	59	47	54	44	52	576
Gießen (165)	40	33	41	32	49	63	73	58	46	54	44	51	584
Marburg (239)	45	38	47	34	53	57	71	61	46	55	48	58	613
Lahnhof (611)	87	76	89	60	79	97	115	98	84	90	94	112	1081
Arnsberg (212)	77	72	83	59	71	80	106	89	70	74	71	85	937
Gütersloh (81)	56	50	58	42	58	62	89	74	55	58	55	67	724
Löningen (28)	52	42	55	43	52	71	88	81	55	63	55	57	714
Bremen (10)	50	41	51	41	59	65	91	74	53	62	51	55	693
Hamburg (26)	50	44	53	46	52	62	89	79	55	65	51	55	701
Eutin (35)	50	42	54	42	51	54	81	75	49	70	53	59	680
Kiel (47)	54	42	53	42	46	57	81	79	57	72	58	62	703
Schleswig (35)	55	46	55	43	50	64	84	100	71	89	65	72	794
Husum (12)	51	44	51	43	50	57	81	94	74	90	68	70	773
Flensburg (10)	54	47	54	44	51	65	85	92	69	83	66	72	782
Keitum (Sylt) (9)	42	39	43	35	40	41	60	84	73	89	68	60	674
Westerland (Sylt) (3)	56	49	55	39	42	43	60	89	73	99	76	73	754
Meldorf (10)	56	45	52	42	54	64	94	100	76	90	66	70	809
Helgoland (41)	53	44	48	37	43	41	67	89	70	91	74	71	728
Norderney (4)	43	36	42	36	44	51	75	89	66	74	59	58	673
Borkum (10)	45	36	42	36	44	56	72	81	63	74	65	57	671
Emden (8)	54	41	52	40	51	60	81	87	62	73	61	63	725
Jever (12)	55	44	52	42	55	58	86	88	67	79	59	64	749
Oldenburg (9)	50	43	54	43	53	60	87	74	54	64	54	58	694
Münster i. W. (60)	59	46	62	43	55	70	92	80	59	65	59	70	760
Kleve (48)	58	48	58	42	54	60	78	78	59	68	63	77	743
Krefeld (44)	41	37	46	36	48	62	72	64	51	55	47	53	612
Köln (56)	46	43	51	42	54	71	85	68	54	61	51	59	685
Bonn (60)	35	34	41	34	50	68	83	60	53	54	42	47	601
Aachen (204)	66	59	69	54	59	76	93	80	70	72	64	80	842
Hollerath (614)	91	81	91	70	70	86	90	81	76	86	82	103	1007
Trier (148)	46	42	52	40	55	71	69	65	58	65	54	64	681
Birkenfeld (390)	77	64	76	51	54	68	76	64	66	79	76	107	858
Wiesbaden (113)	41	35	43	34	49	63	63	58	48	58	48	56	596
Langenschwalbach (335)	49	47	57	42	56	75	76	62	57	66	55	65	707
Hof (476)	43	39	54	44	63	76	88	70	54	49	49	54	683
Bayreuth (360)	38	31	40	32	56	63	69	66	48	43	42	47	575
Bamberg (288)	42	34	46	36	58	70	79	65	50	50	46	52	628
Nürnberg (309)	36	29	40	35	58	66	79	60	51	44	39	44	581
Regensburg (343)	33	28	33	33	56	71	79	65	51	38	34	40	561
Metten (320)	65	53	61	52	71	96	105	88	76	59	59	76	861
Passau (309)	57	50	56	53	79	98	106	89	77	54	51	67	837
Rabenstein (676)	102	86	101	70	93	114	127	108	92	86	92	122	1193
Landshut (396)	35	31	37	43	67	89	86	74	62	44	38	45	651
München (530)	40	32	48	71	94	121	119	102	94	59	44	46	870
Traunstein (597)	87	73	100	114	148	181	194	172	150	99	85	99	1502
Reichenhall (470)	67	70	87	85	124	169	198	177	122	79	68	81	1327
Rosenheim (446)	49	38	56	79	119	145	160	134	117	68	53	57	1075
Hohenpeißenberg (994)	52	40	59	79	112	145	151	129	110	64	52	51	1044
Kempten (720)	66	58	76	82	110	138	132	129	110	84	66	89	1140
Isny (721)	81	73	94	101	125	171	181	160	136	98	84	103	1407
Lindau (405)	50	56	61	82	102	139	149	134	124	85	54	64	1100
Friedrichshafen (408)	52	45	60	75	103	126	137	133	111	77	55	61	1035
Augsburg (500)	44	35	51	56	84	101	112	87	77	52	46	56	801
Weißenburg a. S. (427)	39	32	44	41	68	82	91	73	59	49	41	47	666

Ort (Höhe in m)	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Ansbach (425)	42	34	45	43	66	71	78	62	57	51	46	55	650
Erlangen (284)	42	34	45	42	64	68	79	63	49	50	45	53	634
Würzburg (179)	37	32	42	34	55	61	70	54	45	45	42	48	565
Kissingen (209)	52	44	53	36	54	63	75	64	50	58	56	68	673
Darmstadt (150)	41	37	50	36	61	76	86	67	61	64	47	55	681
Mainz (95)	31	27	34	31	44	56	60	52	44	49	37	42	507
Kaiserslautern (242)	44	42	52	40	52	59	68	59	55	58	51	57	637
Zweibrücken (227)	63	54	69	48	62	71	79	70	66	70	71	84	807
Landau (150)	44	39	46	38	45	54	64	57	52	58	51	62	610
Heilbronn (170)	44	37	51	44	65	82	80	72	70	61	54	64	724
Öhringen (230)	44	36	48	43	64	81	75	69	67	57	50	59	693
Stuttgart (265)	36	33	46	50	70	82	87	67	61	51	44	45	672
Freudenstadt (730)	129	119	144	99	109	123	130	114	102	116	127	162	1474
Hechingen (530)	44	35	53	54	85	104	98	84	73	59	47	45	781
Schopfloch (765)	67	60	82	83	100	122	126	107	94	76	66	78	1061
Niederlande													
Groningen (2)	48	40	46	38	48	60	74	90	68	70	61	53	696
Leeuwarden	52	46	51	41	45	53	75	92	70	88	69	65	747
Assen (14)	49	41	47	37	52	65	73	87	69	70	58	56	704
Enschede	52	40	53	41	57	63	78	76	61	74	57	59	711
Winterswijk (37)	53	46	52	44	62	62	84	75	63	73	63	67	744
Apeldoorn	51	43	55	46	58	69	85	82	62	75	61	65	752
Utrecht (37)	53	44	50	44	52	58	78	86	68	77	61	67	738
Helder (4)	51	41	44	34	39	43	57	78	74	89	68	62	680
Alkmaar	55	42	46	34	45	52	61	88	89	98	71	70	751
Zaandam	59	44	50	39	47	53	65	91	76	96	69	71	760
Leeghwater	55	45	51	47	51	64	74	98	83	108	75	77	828
Scheveningen	42	36	41	36	44	45	61	80	67	81	57	58	648
Vlissingen (6)	48	39	45	39	50	54	65	76	72	74	61	58	681
Breda	47	42	45	41	42	54	73	76	59	65	54	59	657
Roermond	44	38	39	38	50	57	67	67	53	57	54	57	621
Maastricht (49)	48	41	47	41	52	61	80	71	58	60	56	60	675
Belgien													
Lüttich (55—85)	53	49	50	52	60	71	74	81	63	69	63	64	749
Les Waleffes (160)	49	41	49	41	56	74	87	83	58	66	60	59	723
Namur (85—152)	44	36	41	45	52	66	75	72	54	59	50	58	652
Brüssel (57)	56	47	50	47	58	64	73	77	65	71	64	61	733
Gent (8)	58	48	51	49	61	69	79	81	72	86	75	70	799
Ostende (4)	52	40	48	39	49	49	57	74	71	65	79	58	681
Schottland													
Lerwick (34)	108	80	80	58	53	45	58	76	76	100	108	122	964
Stornoway (16)	131	113	104	77	65	59	77	101	100	132	148	159	1266
Wick (25)	62	58	58	51	53	46	67	70	64	75	80	78	762
Dunrobin (4)	70	65	67	54	58	49	73	69	61	73	84	82	805
Fort William (52)	243	189	168	113	98	89	123	136	160	179	205	256	1979
Glenquoich[1] (173)	349	263	247	165	139	125	163	209	219	254	308	372	2813
Inverness (30)	63	55	54	40	46	47	65	63	58	60	64	60	681
Nairn (25)	51	46	48	38	46	45	68	61	56	60	60	56	635
Aberdeen (14)	55	52	61	48	59	43	71	70	56	76	75	82	748
Balmoral (284)	68	68	75	57	61	50	67	80	60	91	93	84	854
Dundee (49)	50	48	52	43	53	46	70	86	53	68	62	68	699
Perth (23)	64	58	63	45	56	50	73	86	57	75	73	82	782
Edinburg (68)	43	40	47	36	50	48	68	78	50	66	54	55	635
Rothesay (27)	114	102	91	76	77	78	101	124	103	42	129	138	1245

[1] Glenquoich 57° 4′ N, 5° 15′ W.

Ort (Höhe in m)	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Glasgow (55)	83	73	68	53	66	64	79	99	76	86	93	105	945
Greenock (60)	174	143	125	92	88	84	100	138	121	137	163	200	1565
Dumfries (49)	77	78	72	56	66	61	78	97	65	95	88	102	935
Douglas (84)	86	83	75	63	64	63	78	99	84	117	121	127	1060
England													
Durham (102)	42	34	47	40	49	48	68	63	44	80	58	52	625
Whitby (38)	47	41	47	38	48	48	61	62	43	74	61	59	639
York (17)	45	38	43	41	51	53	64	64	41	68	53	57	618
Hull (3)	46	42	46	40	49	52	59	74	44	76	56	61	645
Lincoln (18)	43	37	39	35	48	52	56	63	39	65	48	56	581
Cromer (60)	40	32	37	31	39	46	63	53	42	69	53	50	555
Norwich (25)	50	42	49	43	49	49	66	60	54	79	65	66	672
Yarmouth (5)	44	38	44	38	44	45	59	63	50	74	61	62	622
Cambridge (12)	38	33	37	35	45	54	55	60	41	60	49	49	556
Shoeburyness (4)	33	30	33	29	32	43	44	43	40	57	52	44	480
Sheffield (130)	71	61	63	52	59	58	64	68	49	84	74	88	791
Buxton (300)	114	95	105	75	79	82	100	111	82	125	119	144	1231
Nottingham (25)	46	39	42	36	48	49	61	63	42	63	48	61	598
Birmingham (163)	51	43	49	44	54	59	59	69	46	71	61	68	674
Hereford (88)	53	50	47	44	53	52	55	63	44	74	61	72	668
Cheltenham (65)	53	49	49	43	47	57	60	67	47	70	62	69	673
Oxford (63)	46	42	42	41	48	57	60	58	43	73	58	63	631
London (34)	47	42	47	39	45	51	61	56	46	67	60	61	622
Margate (15)	42	35	40	34	40	45	50	49	50	74	61	58	578
Brighton (9)	60	50	51	40	42	45	53	56	52	96	81	79	705
Ventnor (18)	65	53	52	43	43	47	51	51	63	100	82	84	734
Southampton (19)	68	58	58	47	51	51	58	67	55	100	80	93	786
Reading (80)	48	42	43	37	42	50	52	53	43	76	58	66	610
Seathwaite (129)	337	301	283	189	187	166	215	294	252	305	345	415	3289
Stonyhurst (114)	109	85	94	69	72	78	98	129	97	114	115	123	1183
Blackpool (20)	69	57	60	48	55	55	74	91	72	95	88	83	847
Manchester (58)	73	56	66	50	62	68	82	94	67	89	75	90	872
Liverpool (57)	54	43	48	41	48	56	66	78	61	83	64	67	709
Holyhead (5)	74	62	67	53	50	55	66	81	68	101	105	106	888
Aberystwyth (28)	104	81	88	66	67	79	98	124	92	134	120	128	1181
Cardiff (67)	94	75	80	64	62	64	78	107	78	121	103	127	1053
Bath (20)	61	53	56	51	48	58	63	72	52	83	72	88	757
Ilfracombe (7)	81	67	70	51	50	53	62	88	66	112	96	118	914
Torquay (3)	78	70	70	51	48	48	55	63	52	103	88	114	840
Plymouth (35)	84	74	73	56	52	54	71	76	62	100	92	126	920
Falmouth (51)	107	94	88	67	56	59	72	83	74	126	122	159	1107
Irland													
Crossmolina (20)	133	113	115	80	82	76	92	115	100	132	149	166	1353
Belfast (18)	73	63	65	57	59	63	75	94	65	84	86	94	878
Armagh (73)	64	56	60	53	61	64	73	92	63	69	72	80	807
Dublin (47)	58	46	50	46	53	50	68	81	49	67	72	65	705
Kilkenny (64)	81	65	58	55	56	62	72	88	59	80	78	88	842
Waterford (6)	93	82	69	64	58	67	81	96	69	100	94	116	989
Foynes (75)	96	81	75	62	59	66	78	98	71	94	101	120	1001
Killarney (53)	150	133	120	84	78	74	84	112	91	136	143	185	1390
Valentia (9)	139	132	115	93	81	81	96	122	105	142	139	169	1414
Cork (9)	105	94	76	68	62	68	73	96	75	104	107	135	1063
Brooklyn auf Guernsey (20)	84	70	69	56	47	53	56	66	71	121	116	117	926
St. Mary's auf den Scilly-Inseln (40)	76	65	62	49	42	43	56	67	62	93	83	111	809
Malta (25)	84	51	40	22	12	2	2	4	37	86	83	110	533

Ort (Höhe in m)	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Frankreich													
Boulogne (8)	60	48	46	42	46	50	50	64	71	105	77	76	735
Lille (20)	50	43	47	41	56	56	66	60	63	75	62	61	680
St. Quentin (70)	62	47	57	50	64	70	79	66	73	74	66	67	775
Reims (79)	42	34	42	41	47	65	61	61	58	64	51	48	614
Verdun (210)	64	51	57	48	62	74	70	68	65	80	71	75	785
Metz (177)	48	38	46	43	50	68	68	62	56	66	55	55	655
Lunéville (225)	49	41	51	52	61	76	84	68	66	78	64	59	749
Straßburg (145)	35	32	42	42	65	75	88	70	64	56	47	47	663
Mülhausen (242)	41	38	48	47	58	67	70	62	63	65	58	56	673
Seewen (500)	157	139	176	116	116	118	132	116	115	167	176	224	1752
Besançon (253)	79	64	83	85	105	115	99	99	103	121	103	92	1148
Pontarlier (824)	79	73	95	105	132	131	110	130	108	135	104	96	1298
Bourg (250)	54	57	72	79	93	93	85	96	75	121	84	65	974
Annecy (448)	67	65	92	98	127	131	116	126	119	149	108	86	1284
Grenoble (217)	65	60	59	64	94	89	72	87	85	123	85	69	952
Gap (739)	49	47	63	59	93	72	49	55	81	121	92	57	838
Sisteron (490)	58	44	62	61	98	77	38	49	81	146	108	50	872
Nizza (18)	64	57	68	57	62	41	15	24	60	148	111	78	785
Ajaccio (4)	83	55	69	53	47	31	7	18	57	92	127	81	720
Marseille (75)	49	36	41	43	48	26	14	24	60	102	79	52	574
Avignon (25)	40	37	41	51	64	52	29	54	73	91	66	47	645
Valence (113)	47	40	62	71	89	79	54	73	86	140	93	59	893
Lyon (175)	37	37	49	61	84	84	75	82	76	100	61	43	794
Dijon (237)	45	36	44	48	57	74	60	63	56	80	62	51	676
Langres (460)	69	60	69	62	73	82	85	76	68	98	81	82	905
Troyes (45)	40	34	41	38	59	60	62	65	53	63	49	46	610
Paris (52)	38	29	39	40	49	59	54	51	53	59	47	44	562
Rouen (22)	53	41	48	47	57	60	66	67	62	70	60	64	698
Fécamp (20)	74	51	57	50	56	58	58	72	91	113	89	84	853
Chartres (159)	40	32	42	43	51	61	54	50	53	61	51	46	584
Orléans (104)	46	37	48	47	57	61	55	53	56	69	53	50	632
Auxerre (99)	43	41	50	47	62	68	60	63	52	70	56	57	669
Nevers (186)	50	45	52	51	66	76	63	62	64	74	61	57	721
Les Settons (595)	153	126	142	120	113	128	123	132	126	179	164	180	1686
Roanne (267)	29	33	45	56	75	81	75	74	61	75	50	37	691
Clermont-Ferrand (366)	35	32	44	50	71	81	63	63	70	58	42	33	646
Puy-de-Dôme (1407)	167	140	167	138	124	138	123	138	134	141	128	145	1683
Le Puy (630)	28	33	37	37	78	88	75	66	71	72	48	32	685
Mt. Aigoual (1559)	195	150	192	179	190	143	68	110	198	312	246	192	2175
Montpellier (29)	79	69	60	58	70	46	24	51	76	104	87	62	786
Perpignan (31)	60	44	51	47	59	40	21	28	44	61	57	42	554
Montlouis (1586)	81	63	79	61	86	82	59	62	64	69	56	65	827
Pic du Midi (2859)	188	153	163	171	117	127	73	75	109	119	137	167	1631
Tarbes (310)	73	65	80	98	108	112	59	59	79	91	79	72	975
Toulouse (194)	47	41	48	67	80	81	39	49	54	60	50	44	660
Bayonne (30)	99	83	99	95	84	92	63	74	109	139	137	104	1178
Bordeaux (5)	70	53	61	66	72	74	49	53	69	93	83	74	817
Angoulème (29)	67	51	56	56	74	70	48	53	64	87	70	69	765
Limoges (245)	74	61	71	74	90	85	68	73	73	94	82	74	919
Poitiers (112)	51	39	50	49	59	66	44	46	53	75	61	52	645
Tours (54)	50	41	47	43	57	59	49	44	48	66	53	51	608
Le Mans (87)	54	39	45	47	57	61	55	54	54	68	58	58	650
Caen (24)	53	38	43	43	53	60	51	52	56	74	62	58	643
Cherbourg (18)	83	61	58	45	52	49	52	60	82	123	104	94	863
Sainte Brieuc (100)	60	53	51	47	50	47	43	44	61	84	75	71	686
Brest (66)	83	67	52	53	46	50	50	55	71	98	92	86	803
Lorient (24)	87	60	60	58	54	55	51	55	66	91	87	91	815
Rennes (28)	64	50	52	48	58	63	56	55	61	83	72	66	728
Saint Nazaire (18)	64	45	45	43	44	44	40	41	56	82	73	72	649
Nantes (7)	59	42	45	44	48	48	40	44	55	79	69	66	639
Niort (35)	70	54	57	60	65	65	53	53	67	98	84	75	801
La Rochelle (5)	57	41	44	44	45	44	34	37	60	92	75	67	650

Ort (Höhe in m)	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Spanien													
Barcelona (21)	36	33	43	50	37	34	27	35	77	75	45	43	535
Huesca (487)	29	37	48	55	64	44	31	34	62	64	50	31	549
Zaragoza (200)	19	19	24	30	41	30	19	17	27	35	32	24	317
Soria (1068)	40	41	48	58	70	53	25	26	47	57	51	42	558
Búrgos (860)	42	42	51	54	68	52	21	20	43	51	49	42	535
Bilbao (16)	107	97	116	102	89	82	55	55	94	125	127	140	1189
Oviedo (225)	70	66	96	81	75	58	41	38	59	76	90	87	837
Santiago (263)	178	163	153	128	126	71	48	56	118	169	179	186	1575
Valladolid (715)	25	23	28	27	41	28	9	9	33	34	35	25	317
Salamanca (814)	17	21	22	25	31	24	9	7	29	31	36	22	274
Madrid (655)	34	27	44	47	44	30	12	10	33	45	49	41	416
Valencia (18)	36	35	41	33	42	20	12	11	75	71	64	44	484
Palma (20)	41	34	38	36	32	19	12	16	45	82	58	59	472
Mahon (10?)	60	41	52	47	34	24	16	14	56	107	104	81	636
Murcia (42)	31	28	35	35	33	18	6	6	46	49	42	39	368
Granada (670)	48	42	59	57	58	27	6	4	42	59	68	52	522
Sevilla (30)	67	52	66	46	42	16	1	3	21	60	78	63	515
San Fernando (29)	90	78	89	60	44	10	1	4	29	89	109	106	709
Badajoz (171)	45	53	53	49	50	19	5	4	29	53	66	54	480
Portugal													
Porto (100)	138	101	115	103	85	43	21	22	74	136	147	126	1111
Guarda (1039)	105	85	93	78	88	47	14	15	62	112	111	94	904
Coimbra (141)	93	91	98	96	81	46	19	14	59	106	120	100	923
Serra da Estrella (1450)	317	237	381	253	241	123	57	35	156	380	404	290	2874
Lissabon (95)	90	87	88	74	51	20	4	5	37	80	115	104	755
Italien													
Turin (276)	50	37	61	109	114	101	61	71	67	90	66	42	869
Alessandria (98)	43	41	58	64	68	49	33	43	50	88	70	55	662
Mailand (147)	62	59	68	87	104	83	72	81	89	120	110	75	1010
Verona (66)	46	40	53	66	89	87	83	69	86	94	74	53	840
Vicenza (54)	76	67	99	116	131	122	72	88	108	138	116	92	1225
Treviso (26)	60	51	92	98	115	117	90	90	108	112	102	76	1111
Udine (116)	85	72	97	126	148	167	145	133	160	178	139	105	1555
Raibl (892)	104	104	169	176	200	189	192	201	205	313	223	162	2238
Görz (94)	76	77	112	112	150	174	130	142	165	211	152	121	1622
Triest (30)	60	59	73	77	94	102	80	91	123	155	103	75	1092
Pola (30)	56	51	67	71	65	71	56	63	94	121	96	94	905
Padua[1] (31)	53	48	62	76	86	87	64	66	75	97	84	64	862
Venedig[2] (21)	41	40	52	59	79	76	61	64	78	90	70	47	757
Ferrara (40)	42	38	57	66	75	65	55	57	59	92	73	51	730
Parma (89)	43	45	54	70	75	52	38	39	64	93	79	57	709
Modena (64)	48	44	51	61	72	60	43	46	65	88	75	60	713
Bologna (85)	40	43	51	57	64	56	35	43	62	87	74	51	663
Genua (54)	107	107	105	104	88	70	42	62	127	197	190	121	1320
Livorno (24)	68	62	76	62	58	44	26	40	83	147	120	99	885
Florenz (73)	68	63	75	78	78	55	35	52	85	110	103	82	884
Siena (349)	50	46	62	64	78	61	32	41	78	102	96	67	777
Pesaro (14)	55	33	44	47	52	52	29	47	65	103	76	47	650
Ancona (92)	64	46	52	52	51	49	28	41	62	101	76	60	682
Lesina (20)	77	66	70	56	39	40	20	39	67	102	117	100	793
Perugia (520)	64	54	86	93	81	87	41	58	78	127	110	79	958
Rom (50)	79	64	69	68	58	41	19	27	71	118	116	90	820
Velletri (401)	116	94	113	122	92	73	29	34	91	193	153	146	1256
Benevento (170)	83	58	62	74	59	41	31	34	55	99	102	103	801

[1] Die 26jährige Reihe 1880—1905 gibt für Oktober nur 90, für Mai 98 mm (Eredia).
[2] Die neue Reihe gibt für Mai und Juni je 74, für Oktober nur 70 mm.

Ort (Höhe in m)	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Neapel (149)	88	71	73	66	50	34	15	28	71	114	116	111	837
Potenza (826)	73	51	55	63	52	39	24	30	48	75	76	73	659
Locorotondo (420)	115	89	81	66	48	37	17	38	76	109	116	116	908
Lecce (72)	64	54	53	54	41	24	12	15	53	86	80	83	619
Messina (36)	114	78	94	77	41	21	17	25	61	131	138	132	929
Palermo (71)	82	68	71	49	29	16	6	10	45	82	83	95	636
Catania (31)	86	58	50	33	19	7	3	8	39	77	90	85	555
Schweiz													
Basel (277)	39	42	51	64	80	102	86	86	77	75	61	53	816
Zürich (480)	49	57	74	96	114	134	132	133	110	103	71	74	1147
St. Gallen (680)	57	66	89	108	133	179	167	155	136	113	75	72	1350
Chur (600)	39	41	46	52	66	79	104	105	88	78	53	52	803
Bernhardin (2073)	94	72	155	207	233	183	198	220	256	320	202	114	2254
Engelberg (1018)	68	75	97	121	153	216	245	240	164	154	92	89	1714
Luzern (453)	43	46	68	91	117	149	157	153	113	95	62	55	1149
St. Beatenberg (1148)	75	81	109	119	129	177	172	170	117	120	90	94	1453
Bern (572)	44	49	60	70	84	104	102	105	83	95	67	59	922
Lausanne (553)	52	52	68	72	93	95	94	105	98	116	80	68	993
Genf (405)	46	44	54	62	78	78	74	89	88	102	78	58	851
Lugano (276)	67	55	101	159	179	185	159	183	194	209	138	72	1701
Österreich													
Klagenfurt (440)	37	33	59	67	97	107	122	118	105	106	78	55	984
Graz (365)	25	31	45	59	83	116	120	118	89	76	52	44	858
Wien (203)	37	33	46	50	70	71	70	70	44	49	41	42	623
Linz (380)	43	45	55	56	85	101	112	108	72	51	53	57	838
Kremsmünster (388)	52	50	64	78	102	120	140	131	87	68	60	62	1014
Salzburg (428)	51	52	69	93	131	170	189	171	121	80	63	67	1257
Ischl (467)	92	89	118	112	147	188	221	217	142	103	96	120	1645
Alt Aussee (945)	125	139	167	142	159	225	262	250	168	137	135	149	2058
Bad Gastein (1023)	46	47	62	72	95	118	146	154	108	88	77	69	1082
Innsbruck (570)	41	35	50	59	73	101	122	107	84	57	49	54	832
Marienberg (1335)	35	32	39	45	61	65	88	88	83	71	57	42	706
Bludenz (590)	53	54	83	91	99	153	169	154	123	99	67	71	1216
Tschechoslowakei													
Budweis (380)	26	23	36	49	84	82	97	77	78	41	30	37	660
Pilsen (305)	23	18	33	39	62	75	79	63	53	39	24	26	534
Prag (197)	22	21	28	39	60	70	65	57	52	31	31	24	500
Brünn (205)	26	23	33	34	60	72	64	68	39	42	37	31	529
Preßburg (152)	40	37	51	54	68	67	63	61	47	57	53	54	652
Neutra (180)	29	27	40	41	64	65	58	54	38	59	39	46	560
Schemnitz (390)	57	56	62	66	89	91	82	76	65	90	74	77	885
Kesmark (622)	24	23	32	45	71	88	93	73	55	50	28	32	614
Ungarn													
Budapest (112)	36	29	42	51	70	64	52	49	45	56	47	45	586
Debreczin (129)	37	27	41	43	64	80	78	58	39	62	49	44	622
Szegedin (95)	34	29	35	48	62	66	53	48	41	49	43	39	547
Jugoslavien													
Laibach (290)	77	79	97	97	119	138	133	136	139	178	124	103	1420
Agram (145)	46	43	59	70	88	100	78	84	78	106	79	57	888
Ragusa (15)	172	126	138	123	89	71	34	65	110	195	197	184	1504
Mostar (60)	97	87	127	149	88	75	49	42	100	170	129	122	1235
Sarajewo (540)	66	54	85	75	76	89	61	63	76	101	79	68	893

Ort (Höhe in m)	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Cetinje (665)	438	240	357	349	198	138	64	138	233	413	501	462	3530
Skutari (22)	141	132	162	131	92	49	40	29	100	204	209	101	1456
Belgrad (140)	30	32	41	58	70	81	68	48	44	56	44	44	620
Üsküb (245)	28	39	21	52	57	57	33	40	34	52	48	44	510
Monastir (620)	49	67	50	63	76	70	46	45	35	86	76	66	726
Albanien													
Durazzo (7)	75	84	100	57	41	49	12	48	44	181	215	186	1092
Valona (10)	101	89	107	59	36	48	13	48	101	137	195	146	1080
Griechenland und Türkei													
Korfu (30)	162	141	106	74	53	25	6	24	89	153	206	240	1279
Patras (5)	89	64	56	47	40	17	2	15	28	85	120	128	691
Athen (107)	52	38	33	21	19	16	7	10	15	43	75	62	391
Larissa (75)	53	28	24	22	42	49	47	27	37	47	81	45	502
Saloniki (39)	37	36	41	48	60	44	25	31	40	53	69	61	545
Konstantinopel (70)	87	69	62	42	30	34	27	42	52	64	102	122	733
Bulgarien und Rumänien													
Sofia (553)	38	36	37	52	86	82	69	54	49	62	49	36	657
Küstendil (525)	47	38	28	49	71	63	69	44	35	59	54	52	610
Bukarest (90)	31	27	42	51	63	84	72	48	37	38	47	44	584
Braila (30)	38	21	31	34	46	67	46	26	27	32	29	28	425
Jassy (100)	24	24	34	44	56	69	61	42	34	34	34	21	477
Czernowitz (250)	22	24	40	47	77	99	88	69	52	43	31	24	616
Schäßburg (336)	25	29	46	54	88	117	97	74	47	40	36	33	686
Hermannstadt (410)	23	26	40	50	87	114	107	80	49	39	35	29	679
Polen													
Tarnopol (318)	25	24	32	38	59	84	90	67	46	54	33	27	579
Lemberg (320)	38	40	52	50	69	93	93	79	57	47	47	42	707
Krakau (320)	26	27	35	42	65	89	91	84	58	49	37	37	640
Warschau (119)	33	32	38	38	52	72	77	74	49	45	37	38	585
Pinsk (140)	22	21	29	35	55	72	110	80	47	59	40	30	600
Bromberg (44)	30	26	37	32	50	55	70	56	44	39	33	35	507
Posen (66)	29	23	34	36	57	49	76	54	45	35	34	36	508
Rußland													
Kem (6)	18	13	15	18	34	44	61	59	57	38	26	22	405
Archangelsk (12)	21	18	21	18	29	41	62	57	49	42	30	23	411
Kostroma (105)	25	22	25	31	47	59	61	66	60	44	34	30	504
Kasan (74)	16	14	16	23	38	59	64	55	43	34	29	18	409
Nishne Tagilsk (224)	16	17	15	21	45	80	77	65	44	28	27	21	456
Katharinenburg (284)	9	8	10	14	40	72	69	61	40	24	19	11	377
Orenburg (108)	27	21	24	23	35	50	43	31	30	30	32	33	379
Astrachan (– 14)	13	8	11	12	17	19	14	12	14	12	11	13	156
Lenkoran (– 22)	122	78	97	64	40	24	27	47	216	216	192	126	1249
Tiflis (409)	15	21	31	51	79	68	49	42	51	34	30	21	492
Wladikawkas (17)	24	25	38	79	141	163	112	75	76	51	34	26	844
Pjatigorsk (519)	18	19	29	54	88	94	72	52	55	36	27	22	566
Stawropol (569)	36	29	37	63	76	104	76	51	65	60	43	44	684
Poti (8)	127	99	83	81	57	137	150	235	215	154	148	136	1622
Sewastopol (25)	28	26	27	27	20	27	29	26	35	37	40	44	366
Simpheropol (269)	29	28	33	33	35	59	52	31	34	29	32	40	435
Nikolajew (19)	18	19	24	25	38	57	44	29	26	32	26	27	365
Odessa (65)	23	21	28	26	32	57	48	28	31	30	35	32	391
Kischinew (110)	21	24	35	32	53	68	63	41	33	29	30	28	457

Ort (Höhe in m)	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Jahr
Kiew (183)	29	25	40	42	47	65	75	57	47	50	36	38	551
Gorki (207)	23	23	24	31	49	69	80	58	42	42	31	26	498
Woronesch (149)	37	33	36	39	50	66	56	51	39	42	43	45	537
Moskau (143)	29	23	30	37	48	53	66	84	62	50	37	41	560
St. Petersburg (6)	22	21	23	24	43	46	68	69	51	44	36	30	477
Estland, Lettland, Memel													
Reval (13)	27	24	24	26	41	46	51	70	56	55	46	37	503
Dorpat (64)	36	30	27	30	47	61	84	78	56	49	46	44	588
Riga (13)	33	26	27	31	44	60	75	72	54	53	48	36	558
Mitau (6)	30	25	30	29	47	62	71	65	55	41	44	33	532
Libau (6)	43	30	31	31	40	42	52	82	72	83	64	52	622
Memel (12)	48	40	37	34	41	46	65	82	68	75	67	67	670
Finnland													
Helsingfors (10)	55	48	48	39	47	48	63	83	71	69	70	65	706
Tammerfors	39	35	36	32	43	62	74	76	60	57	50	44	608
Åbo (14)	42	37	31	33	34	43	64	76	66	69	67	43	605
Mariehamn	33	31	33	29	37	35	58	74	51	60	56	49	546
Wasa (8)	43	35	35	35	44	49	63	73	65	60	53	43	598
Kuopio (100)	46	36	36	31	42	55	69	74	61	51	47	46	594
Kajana (125)	42	33	29	31	38	57	86	87	65	52	43	40	603
Uleåborg	40	29	27	30	36	44	64	75	57	53	42	40	537
Enare (125)	25	24	20	24	38	50	79	69	49	41	35	26	480

Die Knickfestigkeit offener und geschlossener Stabzüge (Stabringe).

Von H. ZIMMERMANN.

In den Jahrgängen 1907 und 1909 der Sitzungsberichte habe ich ein ganz allgemeines Verfahren zur Berechnung der Knickfestigkeit von Stäben mit mehreren Feldern angegeben, das bei unveränderlichen Kräften nicht an die Bedingung der Geradlinigkeit gebunden ist, also — wenn es auch dort nicht besonders hervorgehoben wurde — unmittelbar auch für Stabzüge gilt. Ebenso liegt es mit dem Verfahren zur Berechnung der Knickfestigkeit von Stäben mit elastischer Einspannung, das im Jahrgang 1921 mitgeteilt wurde. Die Allgemeinheit der in Form von vielgliedrigen Determinanten erscheinenden Lösungen beeinträchtigt aber ihre technische Verwendbarkeit. Das hat dazu veranlaßt, ein Verfahren der schrittweisen Auflösung der Knickgleichungen auszubilden, das im »Bauingenieur« von 1923 auf S. 381—390 veröffentlicht ist und das die Knickfestigkeit von Stäben und Stabzügen bei beliebiger Zahl der Felder in einfachster Weise zu berechnen gestattet. Für die Ermittelung der Gesetze, nach denen sich das Verhalten solcher Gebilde regelt, und der Beziehungen zwischen den Formen verschiedener Art ist es dagegen weniger geeignet. Es ist mir neuerdings gelungen, noch ein drittes Verfahren zu finden, das sich gewissermaßen auf einer mittleren Linie zwischen den beiden vorher erwähnten bewegt und sich ebensowohl für die Zahlenrechnung wie für allgemeinere Zwecke eignet. Wenn man das zweite etwa als Schrittrechnung bezeichnet, so könnte man das dritte Gruppenrechnung nennen, da es die einzelnen Schritte in Gruppen zusammenfaßt. Es soll in folgenden Zeilen beschrieben und dann gleich zur Lösung einer interessanten Aufgabe, nämlich zur Berechnung der Knickfestigkeit geschlossener Stabzüge oder Stabringe, benutzt werden.

I. Rechnungsgrundlagen.

Die Schrittrechnung beruht auf der Erwägung, daß man jeden mehrfach gestützten Stab oder Stabzug als eine Kette von Einzelstäben auffassen kann, die sich an ihren Enden gegenseitig elastisch einspannen. Soll die Knickbedingung für das Ganze erfüllt sein, so muß sie auch für jedes Feld erfüllt sein. Es gilt also die im Jahrgang 1921 der Sitzungsberichte auf S. 778 gefundene Gleichung (6), die im Jahrgang 1923 auf S. 61 als Gleichung (16) in der vereinfachten Form

$$\mathbf{1 + (t)(\mu' + \mu'') + (u)\mu'\mu'' = 0} \tag{1}$$

wiederholt ist. Die hierin auftretenden Größen haben folgende Bedeutung:

$$(2)\qquad \begin{cases} (t) = 1 - \dfrac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}; \quad (s) = \dfrac{\alpha}{\sin\alpha} - 1 \\ (u) = [(t)+(s)]\cdot[(t)-(s)] = (t)^2-(s)^{2\,1}. \end{cases}$$

Die Größe α ist ein Hilfswinkel und durch eine der drei Gleichungen

$$(3)\qquad \alpha = a\sqrt{\frac{S}{EJ}} = \pi\sqrt{\frac{S}{K_0}} = \pi\sqrt{\frac{J_0}{J}}$$

bestimmt, in denen a die Feldlänge bedeutet, S die Stabkraft, J das vorhandene Trägheitsmoment des Stabquerschnittes,

$$(3\,a)\qquad K_0 = \pi^2\frac{EJ}{a^2}$$

die Knickkraft bei der Einspannung Null und J_0 das Trägheitsmoment, das der Querschnitt bei fehlender Einspannung haben müßte, wenn er unter der Last S knicken sollte.

Ferner ist

$$(4)\qquad \begin{cases} \mu' = \dfrac{m'}{aS}; & \mu'' = \dfrac{m''}{aS} \\ m' = -\dfrac{M'}{\nu'}; & m'' = \dfrac{M''}{\nu''}. \end{cases}$$

Unter m' und m'' werden die Spannziffern für das linke und das rechte Ende eines Feldes verstanden; d. h. die Quotienten aus den Einspannungsmomenten M und den zugehörigen Neigungsänderungen oder Verdrehungen ν der Stabachse an den Enden der Felder. Die Vorzeichen regeln sich nach den gebräuchlichen, im Bild 1 dargestellten Annahmen. Die Momente werden positiv gerechnet, wenn sie das Feld nach oben hohl krümmen; die Neigungen bei Drehung »rechts herum«. Im Bild 1 sind M', M'' und ν' positiv; nur ν'' ist negativ[2].

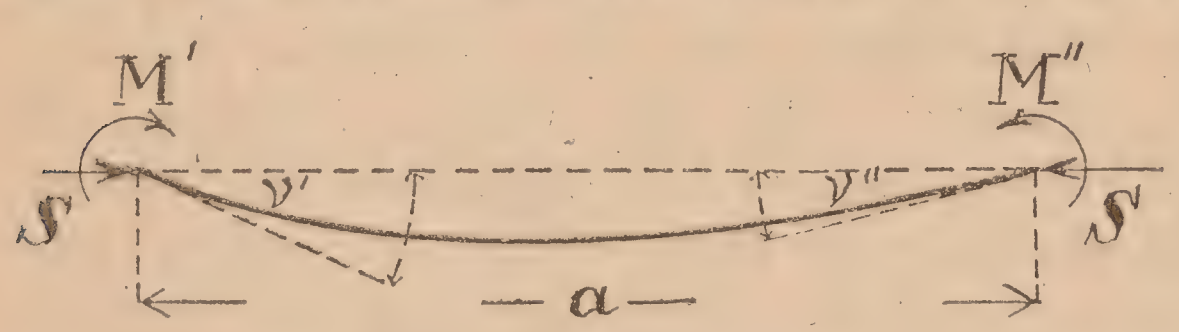


Bild 1. Bezeichnungen.

Bei gegebenen Maßen und Stabkräften sind die Größen α und damit auch (t) und (u) für jedes Feld bekannt. Es stellt dann also Gleichung (1) eine Beziehung zwischen den Spannziffern m' und m'' der Enden desselben Feldes dar, mit deren Hilfe jede von ihnen berechnet werden kann, wenn die andere gegeben ist.

---

[1] Wegen der mehrfach erwähnten Zahlentafel für die (t), (s) und (u) vergleiche Sitzungsberichte 1923 S. 55 u. ff. Da die Tafel noch nicht veröffentlicht ist, wolle der Leser zur Entnahme der weiterhin angeführten Zahlenwerte das am angegebenen Orte auf S. 63 abgedruckte Kurvenbild benutzen.

[2] Die Bezeichnungen »links«, »rechts«, »oben« sind natürlich nur der Kürze des Ausdruckes halber gewählt, ebenso wie die wagerechte Lage des Feldes im Bild 1.

Nun besteht aber auch eine feste Beziehung zwischen den Spannziffern der aneinander grenzenden Enden verschiedener Felder. Aus der Gleichgewichtsbedingung für den betreffenden Knotenpunkt folgt nämlich, daß

$$m' + m'' = 0 \tag{5}$$

sein muß. Und da dies auch noch gilt, wenn mehr als zwei Stäbe in einem Knotenpunkt verbunden sind, so läßt sich diese Knotenbedingung allgemeiner ausdrücken durch

$$\sum m = 0, \tag{6}$$

d. h. durch den Satz:

In jedem an der Knickgrenze befindlichen Stabzug ist an allen Knotenpunkten die Summe aller Spannziffern Null[3].

Jetzt ist leicht zu ersehen, wie man mit wiederholter Anwendung von (1) und (6), also schrittweise, von einem Ende aus über einen ganzen Stabzug hinweg rechnen und schließlich entweder die Einspannung für das andere Ende oder die Maße für ein Feld so bestimmen kann, daß sich das Ganze an der Knickgrenze befindet.

Das Gruppenverfahren schlägt denselben Weg ein, da es ja — wie oben schon erwähnt — nur einzelne Schritte zusammenfaßt. Wenn wir es in nachstehendem Beispiel darstellen, wird zugleich das Schrittverfahren etwas ausführlicher erläutert, als es hier nur andeutend geschehen ist.

II. Offener Stabzug.

Es handle sich um einen aus drei Feldern bestehenden Teil eines längeren Stabzuges (Bild 2). Die Bezeichnungen werden im allgemeinen so gewählt wie früher. Sie müssen aber ergänzt werden, weil jetzt das Vorhandensein mehrerer Felder die Kennzeichnung der Zugehörigkeit der einzelnen Größen nötig macht. Wir bezeichnen deshalb wie folgt:

Knotenpunkte . .	1	2	3	4
Felder	1—2	2—3	3—4	
Feldlängen	a_{12}	a_{23}	a_{34}	
Stabkräfte	S_{12}	S_{23}	S_{34}	
Produkte aS . . .	r_{12}	r_{23}	r_{34}	
Hilfswinkel α . .	α_{12}	α_{23}	α_{34}	
Größen (t)	t_{12}	t_{23}	t_{34}	
Größen (u)	u_{12}	u_{23}	u_{34}	
Spannziffern . . .	m_1'' m_1'	m_2'' m_2'	m_3'' m_3'	m_4'' m_4'
» . . .	m_1	m_2	m_3	m_4.

Die r sind nur abkürzende Bezeichnungen. Bei den (t) und (u) werden die Klammern zur Vereinfachung des Satzes weggelassen. Ein Mißverständnis

[3] Der Begriff der Spannziffer ist zum ersten Male aufgestellt im Zentralblatt der Bauverwaltung 1922 S. 390. Der oben ausgesprochene Satz ist dort als Spannziffersatz bezeichnet.

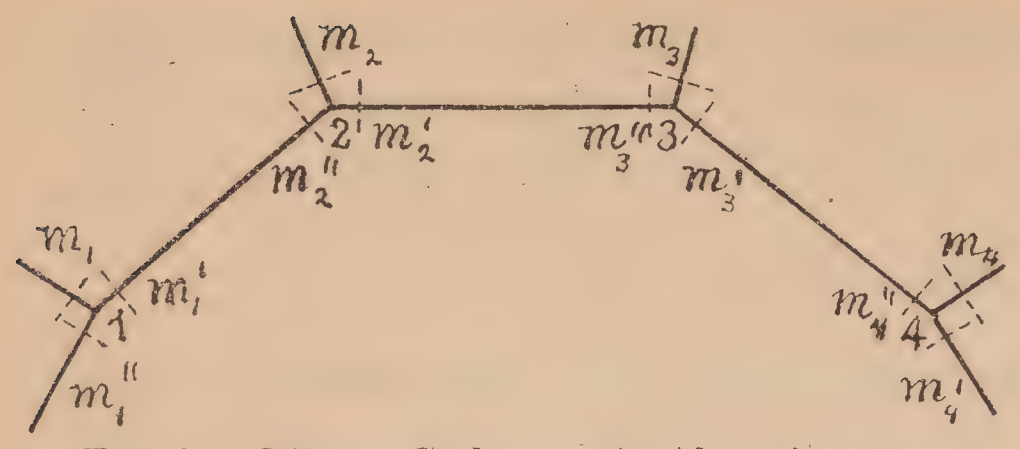


Bild 2. Offener Stabzug mit Abzweigungen.

kann daraus nicht entstehen, wenn man beachtet, daß alle t und u dieselbe Bedeutung haben wie (t) und (u) in den Gleichungen 2 und in den vorhandenen Zahlentafeln. Die nur einen Zeiger besitzenden Spannziffern gehören zu den Stabzügen, die an den Knotenpunkten 1, 2, 3, 4 in den zu berechnenden Stabzug münden und von denen angenommen wird, daß ihre Anschlußspannziffern vorher durch eine ähnliche Berechnung ermittelt worden sind. Die Größen m_1, m_2, m_3, m_4 sind also bekannt.

Die vier Knotengleichungen lauten nach (6) für

$$(7)\qquad \begin{cases} \text{Knoten } 1: & m_1'' + m_1 + m_1' = 0; \\ \text{»} \quad 2: & m_2'' + m_2 + m_2' = 0; \\ \text{»} \quad 3: & m_3'' + m_3 + m_3' = 0; \\ \text{»} \quad 4: & m_4'' + m_4 + m_4' = 0. \end{cases}$$

Die drei aus (1) folgenden Feldgleichungen für

$$(8)\qquad \begin{cases} \text{Feld } 1\text{—}2: & \dfrac{m_2''}{r_{12}} = -\dfrac{r_{12} + t_{12} m_1'}{t_{12} r_{12} + u_{12} m_1'}; \\ \text{»} \quad 2\text{—}3: & \dfrac{m_3''}{r_{23}} = -\dfrac{r_{23} + t_{23} m_2'}{t_{23} r_{23} + u_{23} m_2'}; \\ \text{»} \quad 3\text{—}4: & \dfrac{m_4''}{r_{34}} = -\dfrac{r_{34} + t_{34} m_3'}{t_{34} r_{34} + u_{34} m_3'}. \end{cases}$$

Zur schrittweisen Berechnung ist nun nichts weiter nötig, als daß man die Hilfswinkel α aus (3) berechnet, die Größen t und u der Zahlentafel entnimmt, beim Knotenpunkt 1 anfangend die bekannten Größen in die Gleichungen (7) und (8) einsetzt und damit weiter rechnet, bis man beim Knotenpunkt 4 angekommen ist.

Die Zusammenfassung der Schritte für die Gruppenberechnung geschieht wie folgt.

Die erste Knotengleichung (7) liefert

$$(9)\qquad m_1' = -m_1 - m_1''.$$

Setzt man dies in die erste Feldgleichung (8), so kommt

$$\frac{m_2''}{r_{12}} = -\frac{r_{12} - t_{12} m_1 - t_{12} m_1''}{t_{12} r_{12} - u_{12} m_1 - u_{12} m_1''}.$$

Jetzt führen wir besondere Zeichen für die von m_1'' freien und die mit m_1'' behafteten Größen ein, indem wir setzen

$$(10)\qquad \begin{cases} \text{im Zähler:} & \mathfrak{Z}_{12} = r_{12} - t_{12} m_1; \quad \mathfrak{z}_{12} = t_{12}; \\ \text{im Nenner:} & \mathfrak{N}_{12} = r_{12} t_{12} - u_{12} m_1; \quad \mathfrak{n}_{12} = u_{12}. \end{cases}$$

Dann geht die Feldgleichung für 1—2 über in

$$\frac{m_2''}{r_{12}} = -\frac{Z_{12} - z_{12} m_1''}{N_{12} - n_{12} m_1''}. \tag{11}$$

Hiermit folgt aus der zweiten Knotengleichung (7):

$$m_2' = -m_2 - m_2'' = -m_2 + \frac{Z_{12} - z_{12} m_1''}{N_{12} - n_{12} m_1''} r_{12}$$

und aus der zweiten Feldgleichung (8):

$$\frac{m_3''}{r_{23}} = -\frac{r_{23} - t_{23} m_2 + t_{23} \dfrac{Z_{12} - z_{12} m_1''}{N_{12} - n_{12} m_1''} r_{12}}{t_{23} r_{23} - u_{23} m_2 + u_{23} \dfrac{Z_{12} - z_{12} m_1''}{N_{12} - n_{12} m_1''} r_{12}}.$$

Wenn man nun im Zähler und Nenner mit $N_{12} - n_{12} m_1''$ multipliziert, die entstehenden Ausdrücke nach von m_1'' freien und damit behafteten Größen ordnet, die ersten im Zähler zu Z_{23}, im Nenner zu N_{23}, die zweiten im Zähler zu z_{23}, im Nenner zu n_{23} zusammenzieht, so hat man

$$\begin{cases} Z_{23} = Z_{12} r_{12} t_{23} + N_{12} (r_{23} - t_{23} m_2); \\ N_{23} = Z_{12} r_{12} u_{23} + N_{12} (r_{23} t_{23} - u_{23} m_2); \\ z_{23} = z_{12} r_{12} t_{23} + n_{12} (r_{23} - t_{23} m_2); \\ n_{23} = z_{12} r_{12} u_{23} + n_{12} (r_{23} t_{23} - u_{23} m_2). \end{cases} \tag{12}$$

Damit erhält die Feldgleichung für 2—3 die Form

$$\frac{m_3''}{r_{23}} = -\frac{Z_{23} - z_{23} m_1''}{N_{23} - n_{23} m_1''}. \tag{13}$$

Fährt man in dieser Weise fort, so ergibt sich als nächste Gruppe:

$$\begin{cases} Z_{34} = Z_{23} r_{23} t_{34} + N_{23} (r_{34} - t_{34} m_3); \\ N_{34} = Z_{23} r_{23} u_{34} + N_{23} (r_{34} t_{34} - u_{34} m_3); \\ z_{34} = z_{23} r_{23} t_{34} + n_{23} (r_{34} - t_{34} m_3); \\ n_{34} = z_{23} r_{23} u_{34} + n_{23} (r_{34} t_{34} - u_{34} m_3). \end{cases} \tag{14}$$

Hiermit wird schließlich die Feldgleichung für 3—4

$$\frac{m_4''}{r_{34}} = -\frac{Z_{34} - z_{34} m_1''}{N_{34} - n_{34} m_1''}. \tag{15}$$

Die letzte Knotengleichung ergibt

$$m_4' = -m_4 - m_4'', \tag{16}$$

und damit ist alles vom gegebenen Anfang m_1'' bis zum gesuchten Ende m_4' bekannt.

Bei dieser Darstellung ist stillschweigend angenommen, daß alle Felder mit Achsenkräften S belastet seien. Sehr häufig hat man es aber mit Stabzügen zu tun, an die unbelastete Felder angeschlossen sind. Nun braucht man zwar in den entwickelten Gleichungen nur $S = 0$ zu setzen, um sie auch für

diesen Fall verwendbar zu machen. Man gerät dabei jedoch auf unbestimmte Formen, zu deren Beseitigung ein Grenzübergang nötig ist. Deswegen empfiehlt es sich, ihn gleich ein für allemal auszuführen, was in folgender Weise geschehen kann.

Nach der auf S. 55 u. ff. der Sitzungsberichte für 1923 erschienenen Untersuchung lassen sich die Größen s, t und u bei kleinen Werten von S in die Reihen

$$(17)\qquad \begin{cases} s = \frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{7}{360}\alpha^4 + \frac{31}{15120}\alpha^6 + \cdots \\ t = \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{45}\alpha^4 + \frac{2}{945}\alpha^6 + \cdots \\ u = \qquad \frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{120}\alpha^6 + \cdots \end{cases}$$

entwickeln. Für den Grenzübergang zu $\alpha = 0$ genügt je das erste Glied. Damit folgt aus (2) und (3)

$$(18)\qquad \frac{t}{r} = \frac{a}{3EJ} = A; \quad \frac{u}{r^2} = \frac{1}{12}\left(\frac{a}{EJ}\right)^2 = \frac{3}{4}A^2,$$

worin das Zeichen A nur zur Abkürzung dient.

Es sei nun zum Beispiel im Feld 2—3 die Stabkraft $S_{23} = 0$. Dann tritt an Stelle von (12) durch Einführen vorstehender Werte die Gruppe

$$(19)\qquad \begin{cases} Z_{23} = \quad Z_{12} r_{12} A_{23} + N_{12}(1 - \quad A_{23} m_2); \\ N_{23} = \frac{3}{4} Z_{12} r_{12} A_{23}^2 + N_{12}\left(A_{23} - \frac{3}{4} A_{23}^2 m_2\right); \\ z_{23} = \quad z_{12} r_{12} A_{23} + n_{12}(1 - \quad A_{23} m_2); \\ n_{23} = \frac{3}{4} z_{12} r_{12} A_{23}^2 + n_{12}\left(A_{23} - \frac{3}{4} A_{23}^2 m_2\right). \end{cases}$$

Damit wird die Feldgleichung für 2—3

$$(20)\qquad m_3'' = -\frac{Z_{23} - z_{23} m_1''}{N_{23} - n_{23} m_1''},$$

bis auf den Wegfall des Nenners r_{23} übereinstimmend mit (13). Das führt auf folgende etwas mechanische, aber bequeme Regel:

Wenn ein Feld, wie z. B. 2—3, ohne Achslast ist, so ist zu setzen

$$(20a)\qquad r_{23} = 1; \quad t_{23} = A_{23} = \frac{a_{23}}{3EJ_{23}}; \quad u_{23} = \frac{3}{4}A_{23}^2,$$

und zwar überall, wo die Größen r_{23}, t_{23}, u_{23} auftreten, also in diesem Falle auch in (14), wo r_{23} im ersten Glied vorkommt.

Der Vorzug dieser Berechnungsweise gegenüber dem im Eingange erwähnten Determinantenverfahren vom Jahre 1909 besteht hauptsächlich darin, daß die zur Auswertung größerer Determinanten nötigen unübersichtlichen Rechnungen wegfallen. Gegenüber der schrittweisen Berechnung, mit der das auch erreicht wird, bietet die Gruppenberechnung den Vorteil, daß man nur

eine Feldgleichung, nämlich die letzte, auszurechnen und sich um die Knotengleichungen der Zwischenpunkte überhaupt nicht zu kümmern braucht. Beide Verfahren gestatten es, die Rechnung immer in derselben Weise beliebig weit fortzusetzen, da nicht ihr Gang, sondern nur ihre Länge durch die Zahl der Felder beeinflußt wird. Die Gleichungen für ein neu hinzutretendes Feld ergeben sich aus den vorhergehenden in einfachster Art dadurch, daß die Ziffern aller Zeiger um eine Einheit erhöht werden.

Eine weitere günstige Eigenschaft des Gruppenverfahrens ist es, daß die letzte Feldgleichung die Spannziffern des Anfanges und des Endes des Stabzuges enthält. Gerade darauf beruht die Eignung des Verfahrens zur Lösung allgemeinerer Aufgaben. Diese Feldgleichung ermöglicht es, den ganzen Stabzug wie ein Einzelfeld zu behandeln und mit anderen zu verbinden, wie ja auch die Gleichung (15) den Gleichungen (8) ganz ähnlich gebaut ist. Daß die Spannziffern der Zwischenknoten in (15) nicht auftreten, dient außerdem der Einfachheit. Um dies zu veranschaulichen, soll das Verfahren jetzt zur Aufstellung der Knickbedingung für einen geschlossenen Stabzug benutzt werden. Solche Gebilde kommen als Fachwerkdreiecke und als Rahmen mit vier oder mehr Feldern im Bauwesen häufig vor, sind aber bisher auf ihre Knickfestigkeit noch nicht allgemein untersucht worden. Wir wollen sie Stabringe nennen.

III. Stabring.

Um den offenen Stabzug des Bildes 2 in einen geschlossenen zu verwandeln, denken wir uns den Endknoten 4 mit dem Anfangsknoten 1 verbunden wie in Bild 3. Dann verschwindet hier und ebenso in allen Gleichungen der Zeiger 4 und an seine Stelle tritt 1. Natürlich ist dann auch der angeschlossene Stabzug 4 derselbe wie 1, so daß nur noch drei solche äußere Stabzüge vorhanden sind. Die Gruppe (14) lautet jetzt

$$(21)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Z}_{31} = Z_{23}\, r_{23}\; t_{31} + N_{23}\,(r_{31} \quad - t_{31}\, m_3)\,; \\ \mathfrak{N}_{31} = Z_{23}\, r_{23}\, u_{31} + N_{23}\,(r_{31}\, t_{31} - u_{31}\, m_3)\,; \\ \mathfrak{z}_{31} = z_{23}\, r_{23}\; t_{31} + n_{23}\,(r_{31} \quad - t_{31}\, m_3)\,; \\ \mathfrak{n}_{31} = z_{23}\, r_{23}\, u_{31} + n_{23}\,(r_{31}\, t_{31} - u_{31}\, m_3)\,. \end{cases}$$

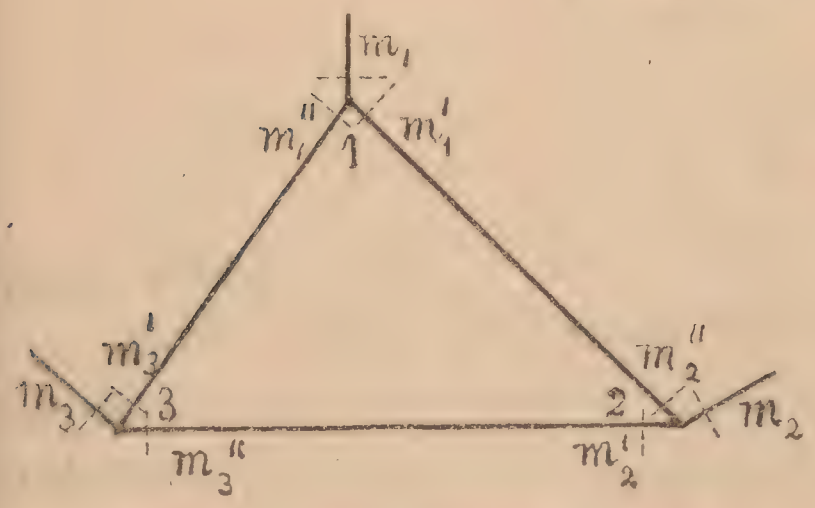


Bild 3. Geschlossener Stabzug mit Abzweigungen.

Der Zahlenwert der mit dem Zeiger 31 versehenen Größen ist aber derselbe wie der der vorher mit 34 bezeichneten gleichbenannten Größen.

Die Gleichung (15) geht in

$$(22)\qquad \frac{m_1''}{r_{31}} = -\frac{Z_{31} - z_{31}\, m_1''}{N_{31} - n_{31}\, m_1''}$$

über. Darin, daß jetzt auf beiden Seiten nur noch die gleiche Spannziffer m_1'' auftritt, kommt die Geschlossenheit des Ringes zum Ausdruck, die auch die Gleichung (16) gegenstandslos macht. Die Gleichungen (21) und (22) gelten für einen Ring mit drei Feldern. Sind mehr vorhanden, so setzt man zunächst die Glei-

chungen (14) und (15) nach der angegebenen einfachen Regel für den offenen Stabzug fort und verwandelt diesen dann in einen geschlossenen wie vorher, indem man an die Stelle der höchsten Zeigerziffer die 1 setzt. In diesem Sinne kann man sagen, daß (21) und (22) die allgemeine Lösung der Aufgabe enthalten, die Knickfestigkeit eines Ringes mit beliebiger Zahl der Seiten und in jedem Knotenpunkt einmündendem äußeren Stabzug zu berechnen. Damit ist der Theorie ein neuer Weg zu einem Feld eröffnet, dessen Bearbeitung nicht kurzerhand zu erledigen sein wird. Daß es Früchte tragen kann, soll aber doch an einem

Beispiel

gezeigt werden.

Der Ring sei gleichseitig, d. h. alle drei Felder seien gleich bemessen und belastet. Die Spannziffern m_1, m_2, m_3 der angeschlossenen Stabzüge seien Null.

$$\text{Mit } a_{12} = a_{23} = a_{31} = a; \quad t_{12} = t_{23} = t_{31} = t;$$
$$S_{12} = S_{23} = S_{31} = S; \quad u_{12} = u_{23} = u_{31} = u;$$
$$\text{also } r_{12} = r_{23} = r_{31} = r$$

erhält man aus (10), (12) und (21)

$$(23)\quad \begin{cases} Z_{12} = r; & Z_{23} = 2t \cdot r^2; & Z_{31} = (u+3t^2)\, r^3; \\ N_{12} = tr; & N_{23} = (t^2+u)\, r^2; & N_{31} = (t^2+3u)\, tr^3; \\ z_{12} = t; & z_{23} = (t^2+u)\, r; & z_{31} = (t^2+3u)\, tr^2; \\ n_{12} = u; & n_{23} = 2tu \cdot r; & n_{31} = (u+3t^2)\, ur^2. \end{cases}$$

Die Gleichung (22) nach m_1'' aufgelöst ergibt

$$(24)\qquad m_1'' = \frac{N_{31} - z_{31} r}{2 n_{31}} \pm \sqrt{\left(\frac{N_{31} - z_{31} r}{2 n_{31}}\right)^2 + \frac{Z_{31} r}{n_{31}}}.$$

Wir nehmen zunächst an, es sei

$$(25)\qquad n_{31} \textit{ nicht Null.}$$

Dann folgt aus (24) wegen (23)

$$(26)\qquad m_1'' = \pm \sqrt{\frac{Z_{31} r}{n_{31}}} = \pm r \sqrt{\frac{1}{u}}.$$

Wie die Zahlentafel ergibt, ist u für alle Werte von $\alpha > \pi$ negativ und somit m_1'' imaginär. Ist dagegen $\alpha < \pi$, so wird zwar m_1'' reell; dann erreichen die Felder aber für sich die Knickgrenze nicht, und es ist nicht denkbar, daß nur durch ihre Verbindung das Knicken herbeigeführt werden könnte. Nur wenn

$$(27)\qquad \alpha = \pi, \quad \text{wofür } u = \infty$$

wird, hat die Gleichung (26) einen Sinn. Sie ergibt dann

$$(28)\qquad m_1'' = 0.$$

Das ist die Spannziffer für den Knoten 1. Mit Hilfe der Gleichungen für die beiden anderen Knotenpunkte prüfen wir, welche Spannziffern dort vorhanden sein müssen.

Aus (11), (23) und (28) folgt

$$\frac{m_2''}{r} = -\frac{Z_{12}}{N_{12}} = -\frac{1}{t} = 0, \tag{29}$$

da $t = \infty$ wird für $\alpha = \pi$. Ferner folgt aus (13), (23) und (28)

$$\frac{m_3''}{r} = -\frac{Z_{23}}{N_{23}} = -\frac{2t}{t^2+u} = 0, \tag{30}$$

wegen (2) und (27).

Hiernach zeigt es sich, daß in allen drei Knoten die Einspannung Null sein muß, wenn der Ring bei $\alpha = \pi$ die Knickgrenze erreichen soll. Das bedeutet, daß mindestens in einem Knoten ein Gelenk angebracht werden muß. Daß dann der Ring bei demselben Wert von α knickt wie die einzelnen Stäbe, ist zwar eine richtige, aber auch eine nichtssagende Lösung, weil wir ja gerade wissen wollen, bei welchem α die Knickgrenze erreicht wird, wenn die Stäbe in allen Ecken fest miteinander verbunden sind.

Da die Annahme (25) nicht an dies Ziel geführt hat, setzen wir jetzt

$$n_{31} = u + 3t^2 = 0. \tag{31}$$

In diesem Falle ist nach (23) auch $Z_{31} = 0$ und ergibt sich aus (24)

$$m_1'' = \frac{0}{0}. \tag{32}$$

Die Spannziffer kann also für den Knoten 1 beliebig angenommen werden. Solange das nicht geschieht, sind natürlich auch die Spannziffern für die beiden anderen Knoten unbestimmt.

Nun fragen wir, welcher Wert von α zu (31) gehört. Die Gleichung läßt sich auch in den Formen

$$2t = s \quad \text{oder} \quad t : u = -1 : 3t \tag{33}$$

schreiben, von denen die zweite eine geometrische, die Lösung erklärende Bedeutung hat. Wir gehen jetzt hierauf nicht ein, sondern begnügen uns damit, aus den Spalten für (s) und (t) oder für $1 : (t)$ und $(t) : (u)$ der Zahlentafel zu entnehmen, daß die folgenden (abgerundeten) Werte den Bedingungen (33) fast genau entsprechen:

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha = 221^0 = 3.857 \\ s = -6.88; \quad t = -3.44; \quad 1 : t = -0.291; \quad t : u = 0.097. \end{array} \right. \tag{34}$$

Die Tafel lehrt zugleich, daß dies bei

$$\frac{S}{K_0} = 1.51 \tag{35}$$

geschieht.

Hiermit gelangen wir zu dem überraschenden Ergebnis, daß die Knicklast dreier gleicher Stäbe um mehr als die Hälfte erhöht wird, wenn man sie zu einem gleichseitigen Ringe fest miteinander verbindet. Es widerspricht das durchaus der bisher allgemein gehegten Ansicht, daß sich Stäbe nicht stützen können, die je für sich an der Knickgrenze sind.

Es bleibt noch zu prüfen, ob sich auch für die Knoten 2 und 3 bestimmte Werte der Spannziffern ergeben, wenn man m_1'' einen solchen zuteilt. Die Gleichung (11) wird durch (31) nicht beeinflußt; wohl aber (13). Der darin vorkommende Ausdruck t^2+u kann nach (31) durch $-2t^2$ ersetzt werden. Man hat also für die Felder

$$(36)\qquad \overbrace{\frac{m_2''}{r}=-\frac{r-tm_1''}{tr-um_1''}}^{1-2} \quad \text{und} \quad \overbrace{\frac{m_3''}{r}=\frac{r+tm_1''}{tr+um_1''}}^{2-3},$$

woraus sich bestimmte Werte ergeben, sobald m_1'' bestimmt ist.

Wählt man beispielsweise

$$(37)\qquad \boldsymbol{m_1''=0},\ \text{so folgt}\ \frac{m_2''}{r}=-\frac{1}{t};\quad \frac{m_3''}{r}=+\frac{1}{t}.$$

Wäre dagegen

$$(38)\qquad \boldsymbol{m_1''=\infty},\ \text{so käme}\ \frac{m_2''}{r}=-\frac{t}{u};\quad \frac{m_3''}{r}=+\frac{t}{u}.$$

Die Zahlenwerte für $1:t$ und $t:u$ sind oben angegeben.

Obgleich hiernach an der Richtigkeit der Lösung nicht zu zweifeln ist, läßt es die Eigenart der Aufgabe doch wünschenswert scheinen, die statische Wirkung der Teile noch etwas eingehender zu untersuchen, um womöglich eine Erklärung für das merkwürdige Verhalten des Ringes zu finden. Wir wollen dazu die beiden eben behandelten Fälle und die unten angezogenen Regeln benutzen[4].

Die Knickbedingung für den an einem Ende frei drehbar gelagerten, am anderen elastisch eingespannten Stab lautet allgemein

$$\frac{m}{r}=-\frac{1}{t}.$$

[4] Die Knickbedingungen für den an einem Ende starr, am anderen elastisch eingespannten oder frei drehbar gelagerten Stab sind zum ersten Male im Jahrgang 1921 der Sitzungsberichte auf S. 779 und 780 als Beispiele 2 und 3 entwickelt, jedoch in einer anderen (wegen des damaligen Mangels an Zahlentafeln gewählten) Form als die heute gebräuchliche, wie sie die Gleichungen (18) und (19) auf S. 61 und 62 der Sitzungsberichte von 1923 zeigen. Die Gleichungen für den an beiden Enden gleich eingespannten Stab mit einfach bogenförmiger und mit S-förmiger Biegung finden sich im Zentralblatt der Bauverwaltung von 1922 auf S. 37 unter Ziffer (20) und (21). — Daß bei der oben getroffenen Wahl für die Vorzeichen der Spannziffern eine positive Spannziffer die Bedeutung hat, daß der Stab ohne Einspannung zu schwach ist, während eine negative Spannziffer das Gegenteil bedeutet, ist im Zentralblatt der Bauverwaltung von 1922 auf S. 390 nachgewiesen. Eine ausführliche Erörterung hierüber wie auch über die eben besprochenen Knickbedingungen und einen Auszug aus der in Anm. 1 erwähnten Zahlentafel brachte Heft 13 des »Bauingenieur« von 1923 auf S. 381 bis 390.

Dem entsprechen die Gleichungen (37). Da die Felder 1—2 und 1—3 mit 1.51 K_o belastet sind, ohne die Einspannung aber nur die Last K_o tragen könnten, sind sie für sich zu schwach und bedürfen einer positiven Einspannung. Im Ringe ist sie für

	Feld 1—2 im Punkte 2	Feld 1—3 im Punkte 3
(39)	$m_2'' = -r:t = 0.291\,r$;	$m_3' = -m_3'' = -r:t = 0.291\,r$,

also in der Tat positiv.

Die Einspannung kann in beiden Punkten nur durch das Feld 2—3 ausgeübt sein. Da es aber schon mit 1.51 K_o belastet ist, so wäre es bei einfach bogenförmiger Biegung mit der Tragkraft K_o schon für sich zu schwach, und noch viel mehr, wenn es auch noch die Felder 1—2 und 1—3 stützen soll. Es kann das nur bei S-förmiger Biegung leisten, weil seine Tragkraft durch diese auf 4 K_o erhöht wird. Nun ist die allgemeine Knickbedingung für den an beiden Enden gleich eingespannten Stab bei S-förmiger Biegung

$$\frac{m}{r} = -\frac{1}{t-s}.$$

Im vorliegenden Falle ist $m:r$ durch die Gleichungen (37) gegeben. Setzt man den Wert hier ein, so kommt

$$(40) \qquad m_2' = m_3'' = \frac{r}{t} = -\frac{r}{t-s} = -0.291\,r.$$

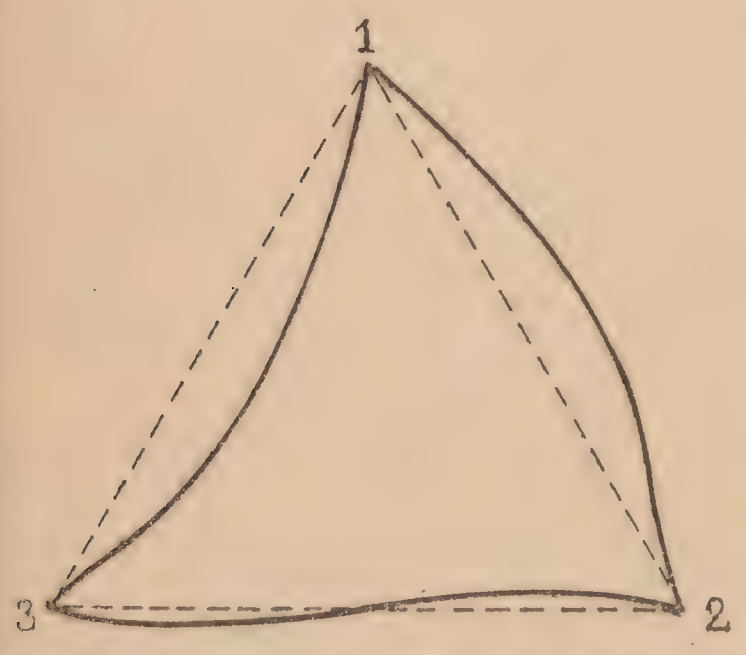


Bild 4. Gegensymmetrische Knickung.

Daß diese Bedingung im Ring erfüllt ist, folgt aus (33), wonach $t = -(t-s)$; und daß $m_1' = m_3''$ negativ ist, entspricht der Forderung, daß ein Stab, der für sich zu stark sein würde, negativ eingespannt werden muß, wenn er die Knickbedingung erfüllen soll.

Mit Hilfe dieser Betrachtung können wir uns die Biegeform, die der Ring annehmen muß, wenn im Punkt 1 keine gegenseitige Einspannung der Felder 1—2 und 1—3 stattfinden soll, am Bild 4 veranschaulichen. Die Formbedingung, daß sich die Eckwinkel bei der Biegung nicht ändern, wird dadurch erfüllt, daß sich die Felder im Punkt 1 überhaupt nicht beeinflussen, während in den Punkten 2 und 3 ihre Einspannungen entgegengesetzt gleich.

Die Knickbedingung für den an einem Ende starr, am andern elastisch eingespannten Stab lautet allgemein

$$\frac{m}{r} = -\frac{t}{u}.$$

Dem entsprechen die Gleichungen (38). Da die Felder 1—2 und 1—3 mit 1.51 K_o belastet sind, ohne die Einspannung in den Punkten 2 und 3 aber

(rund) 2.0 K_o tragen könnten, sind sie für sich zu stark und müssen daher negativ eingespannt werden. Im Ringe geschieht es für

Feld 1—2	Feld 1—3
im Punkte 2	im Punkte 3

mit

$$(41)\quad m_2'' = -rt:u = -0.097\,r; \quad m_3' = -m_3'' = -rt:u = -0.097\,r,$$

also in der Tat negativ.

In beiden Punkten kann die Einspannung nur auf das Feld 2—3 ausgeübt werden. Es bedarf einer solchen auch, wenn es einfach bogenförmig gekrümmt ist, da es dann für sich nur die Tragkraft K_o haben würde, während es im Ring 1.51 K_o aufnehmen soll. Die allgemeine Knickbedingung für den so gebogenen Stab mit gleicher Einspannung der Enden ist

$$\frac{m}{r} = -\frac{1}{t+s}.$$

Im vorliegenden Falle ist $m:r$ durch die Gleichungen (38) gegeben, womit

$$(42)\quad m_2' = m_3'' = r\frac{t}{u} = -\frac{r}{t+s} = 0.097\,r,$$

also positiv, wie es für das an sich zu schwache Feld nötig ist. Daß die Bedingung (42) im Ring erfüllt ist, folgt aus (33), wonach $t+s = 3t = -u:t$.

Hiermit können wir nun wieder die Biegeform des Ringes feststellen. Wenn sich die Felder 1—2 und 1—3 im Punkte 1 gegenseitig starr einspannen, muß sie symmetrisch gegen diesen Punkt sein und so aussehen, wie das Bild 5 zeigt, das einer Beschreibung nicht bedarf. Zusammen mit dem die gegensymmetrische Knickung darstellenden Bild 4 erklärt es vollkommen, woher die Erhöhung der Tragfähigkeit der Einzelfelder bei ihrer Vereinigung zum Ringe rührt.

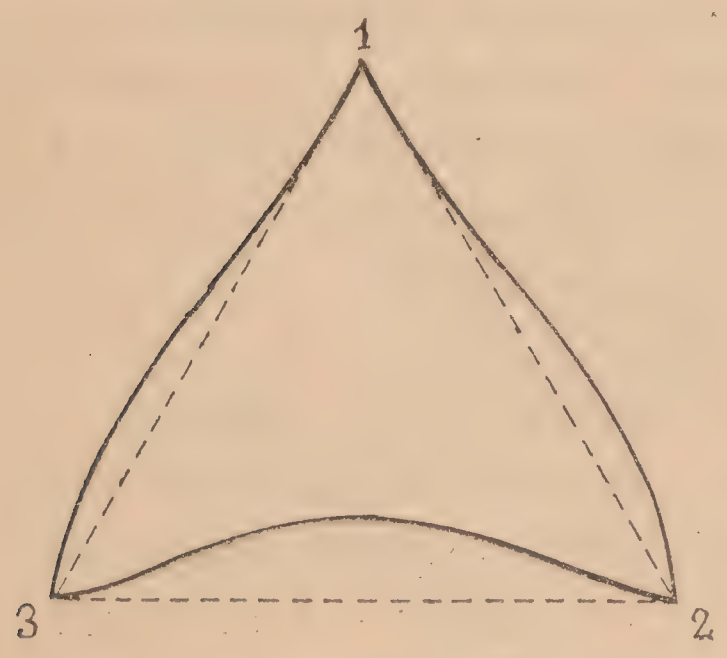


Bild 5. Symmetrische Knickung.

Man weiß längst, daß derselbe Stab bei S-förmiger Biegung weit mehr tragen kann, als wenn er sich in einfachem Bogen biegt. Davon läßt sich aber in der Regel kein Nutzen ziehen, weil solche Biegungen unsicher sind und in die andere, weniger tragfähige Form umschlagen, wenn nicht ein äußerer Zwang das verhindert. Daß das aber auch durch einen inneren Zwang geschehen kann, lehrt der hier untersuchte Ring. Der Zusammenhang der Felder macht ihre einfach bogenförmige Biegung unmöglich. Eine weitere Überlegung zeigt jedoch, daß das nur bei Ringen mit einer ungeraden Zahl von Feldern so ist. Der Unterschied gegenüber anderen muß natürlich mit wachsender Zahl der Felder abnehmen. Das erinnert an ähnliche Eigenschaften gewisser Raumfachwerke.

Die durch die Bilder 4 und 5 veranschaulichten Lösungen haben insofern etwas Unbefriedigendes, als sie offenbar nur Grenzformen darstellen,

zwischen denen die allgemeineren liegen. Man möchte vermuten, daß es eine Form gibt, bei der alle drei Felder gleichartig gebogen sind. Dann müssen natürlich auch die Spannziffern in den drei Knoten gleich sein. Um zu prüfen, ob das möglich ist, setzen wir jetzt m''_1 weder Null noch unendlich, wie in (37) und (38), sondern lassen ihm den allgemeinen Wert und untersuchen, ob sich damit aus (36) gleiche Werte für m''_2 und m''_3 bestimmen lassen.

Aus

$$-\frac{r - t m''_1}{t r - u m''_1} = \frac{r + t m''_1}{t r + u m''_1} \tag{43}$$

folgt wegen (33):

$$\frac{m''_1}{r} = \pm\sqrt{\frac{1}{u}} = \pm\frac{1}{t}\sqrt{-\frac{1}{3}}. \tag{44}$$

Wenn wir den Fall $u = t = \infty$ mit $\alpha = \pi$ und $m''_1 = 0$ ausschließen, da er wieder auf Gleichung (26) und die dort besprochenen Folgerungen führen würde, so zeigt sich, daß eine Lösung der gesuchten Art nicht möglich ist.

Man könnte nun noch die Frage aufwerfen, ob denn die in den Bildern 4 und 5 dargestellten Formen in sicherem Gleichgewicht sind. Um sie zu beantworten, müssen wir auf die allgemeine Gleichung (24) zurückgreifen. Wir haben gefunden, daß sie nur dann reelle und mit den Bedingungen der Aufgabe verträgliche Wurzeln hat, wenn die Belastung der Gleichung (31) genügt, daß sie dann aber nach (32) durch jeden beliebigen Wert von m''_1 befriedigt wird. Daraus folgt rückwärts, daß die Tragkraft des Ringes nicht davon abhängt, welchen Wert man der Spannziffer im Punkt 1 beilegt. Die Beispiele haben insbesondere gezeigt, daß die Knickbedingung bei derselben durch (31) bestimmten Achslast mit $m''_1 = 0$ ebensogut zu erfüllen ist wie mit $m''_1 = \infty$. Hiernach tritt bei keinem Wechsel von m''_1 und bei keiner Änderung der Biegeform ein Sinken der Tragfähigkeit des Ringes ein. Wir kommen zu dem Schluß: Er ist bei allen Formen in sicherem Gleichgewicht. Und da die Zahl dieser Formen unbegrenzt ist, so enthüllt sich der gleichseitige Ring als eins der merkwürdigsten Gebilde im Bereich der Knicktheorie.

Versuche mit auf Biegung und Knickung beanspruchten Flugzeugholmen.

Von Heinrich Müller-Breslau.

(Vorgelegt am 13. März 1924 [s. oben S. 48].)

Die Spannungsberechnung der Flugzeuge wird meistens für hohe, bis in die Nähe der Bruchgrenze reichende Belastungsstufen durchgeführt. Für Kriegsflugzeuge wurde dies von der militärischen Behörde sogar verlangt, weil man aus dem Vergleich mit dem Bruchversuch Anhaltspunkte für strengere Bauvorschriften zu gewinnen hoffte. Es entstanden nun Zweifel, ob es bei so hohen Beanspruchungen noch zulässig sei, die Elastizitätsmodel unveränderlich anzunehmen und mit Formeln zu rechnen, die, auf dem Hookeschen Gesetze fußend, nur innerhalb des elastischen Bereiches gelten.

Einen Beitrag zu dieser Frage bilden Versuche, die mit Tragflächenholmen nach einem von mir ausgearbeiteten Plane mit den Mitteln der Kaiser-Wilhelm-Stiftung für kriegstechnische Wissenschaften im Staatlichen Materialprüfungsamte in Dahlem angestellt worden sind[1].

Eine kurze Mitteilung über diese Versuche leite ich im Abschnitt I durch eine Zusammenstellung und Besprechung der Formeln für die Berechnung der auf Biegung und Knickung beanspruchten Tragflächenholme ein.

I.

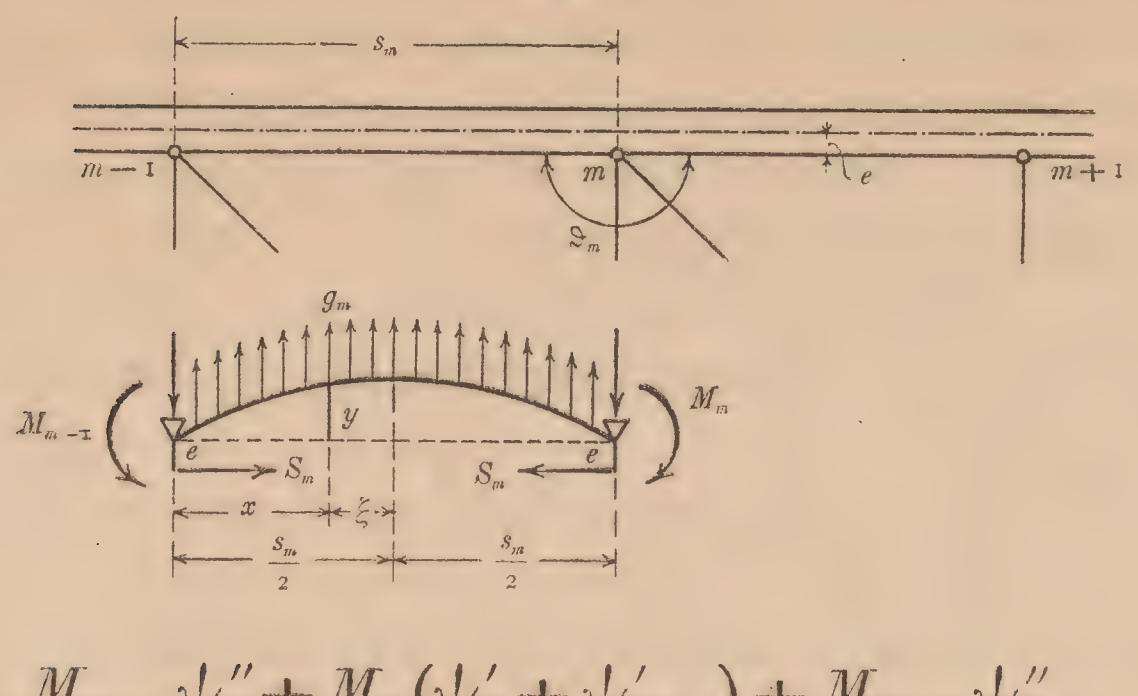
Fig. 1 beschreibt die am Felde s_m eines Oberholmes eines Doppeldeckers angreifenden Kräfte. g_m ist die gleichmäßige Querbelastung der Längeneinheit, S_m der Druck. M_{m-1} und M_m sind die Knotenmomente, das sind die Biegungsmomente, welche verschwinden, wenn in den Knotenpunkten M_{m-1} und M_m Gelenke angeordnet werden.

Zur Berechnung der Knotenmomente dienen die erweiterten Clapeyronschen Gleichungen[2]:

[1] Ich war während des Krieges Vorsitzender des Fachausschusses für Luftfahrt dieser Stiftung, auch Berater der Abteilung für Luftfahrt des Preußischen Kriegsministeriums und der Inspektion der Fliegertruppen.

[2] Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. II, Abt. 2, 1908, S. 289, Gl. (46); ferner Müller-Breslau, Zur Theorie der Biegungsspannungen in Fachwerkträgern, Allg. Bauz., Wien 1884.

Fig. 1.



$$M_{m-1}\psi''_m + M_m(\psi'_m + \psi'_{m+1}) + M_{m+1}\psi''_{m+1}$$

$$(1) \qquad = \Delta\vartheta_m - \frac{g_m s_m}{S_m}\nu'''_m - \frac{g_{m+1}s_{m+1}}{S_{m+1}}\nu'''_{m+1} - e\left(\frac{\nu''_m + \nu'_m}{s_m} + \frac{\nu'_{m+1} + \nu''_{m+1}}{s_{m+1}}\right),$$

wo

$$\psi' = \frac{\nu'}{Ss}, \quad \psi'' = \frac{\nu''}{Ss},$$

$$\nu' = 1 - \alpha \operatorname{cotg}\alpha, \quad \nu'' = \frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1,$$

$$\nu''' = \frac{1 - \alpha\cos\alpha}{\alpha\sin\alpha} - \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\alpha} - \frac{1}{2} = \frac{\nu' + \nu''}{\alpha^2},$$

$$\alpha = s\sqrt{\frac{S}{EJ}}.$$

Die Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ werden meistens aus einem WILLIOTschen Verschiebungsplan abgelesen. Sind δ_{m-1}, δ_m, δ_{m+1} die Senkungen der Knotenpunkte $m-1$, m, $m+1$, so ist

$$\Delta\vartheta_m = \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{s_m} - \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{s_{m+1}}.$$

Genauer aber ist die Berechnung der $\Delta\vartheta$ unmittelbar aus den Stabkräften.

Die Stabkräfte, die Längenänderungen der Stäbe und die Winkeländerungen werden unter der Voraussetzung gelenkiger Knoten berechnet; sie hängen aber von den zunächst unbekannten Knotenmomenten ab und müssen, wenn eine möglichst strenge Berechnung verlangt wird, nachträglich verbessert werden.

Setzt man in (1)

$$\psi' = \frac{s}{EJ}\frac{\nu'}{\alpha^2}, \quad \psi'' = \frac{s}{EJ}\frac{\nu''}{\alpha^2},$$

$$\frac{\nu'''}{S} = \frac{s^2}{EJ}\frac{\nu'''}{\alpha^2}$$

und multipliziert man die Gleichung (1) mit EJ, so sind die Beiwerte der Unbekannten M Längen.

Zur Erleichterung der Zahlenrechnung hatte die Flugzeugmeisterei der Inspektion der Fliegertruppen umfangreiche Tafeln der Zahlen ν und $\nu:\alpha^2$ ausgearbeitet und den Flugzeugwerken zur Verfügung gestellt. Eine die Zahl $\nu:\alpha^2$ darstellende Kurve verläuft viel flacher als die ν-Linie und läßt sich deshalb durch weniger Punkte festlegen.

Die Zahlen $\nu:\alpha^2$ habe ich bereits in meiner ersten Arbeit (1884) über diesen Gegenstand benutzt. Neuerdings habe ich mit den Bezeichnungen

$$\frac{2\,s'_m}{s_m} = \frac{6\,\nu'_m}{\alpha_m^2}\,\frac{J}{J_m}, \qquad \frac{s''_m}{s_m} = \frac{6\,\nu''_m}{\alpha_m^2}\,\frac{J}{J_m}, \qquad \frac{s'''_m}{s_m} = \frac{24\,\nu'''_m}{\alpha_m^2}\,\frac{J}{J_m},$$

wo J ein beliebiges Trägheitsmoment ist, die Gleichung (1) umgeformt in[3]

$$(2)\quad \begin{aligned} &M_{m-1}\,s''_m + 2\,M_m(s'_m + s'_{m+1}) + M_{m+1}\,s''_{m+1} = 6\,EJ\,\Delta\vartheta_m - \frac{g_m s_m^2 s'''_m}{4} \\ &- \frac{g_{m+1} s_{m+1}^2 s'''_{m+1}}{4} - e\left[S_m(2\,s'_m + s''_m) + S_{m+1}(2\,s'_{m+1} + s''_{m+1})\right]. \end{aligned}$$

Diese Gleichung geht in die gewöhnliche Clapeyronsche Gleichung über, wenn $S = 0$ ist. Dann wird $\alpha = 0$ und man erhält $s' = s'' = s''' = s$. Die s', s'', s''' wird man stets gut abrunden.

Nach Berechnung der an den Enden $(m-1)$ und m des Feldes s_m angreifenden Momente

$$M_A = M_{m-1} + S_m e, \qquad M_B = M_m + S_m e$$

findet man das Feldmoment

$$(3)\quad M_{\frac{\max}{\min}} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} - g k^2, \qquad k^2 = \frac{EJ}{s}$$

wo

$$C_1 = \left(g k^2 + \frac{M_A + M_B}{2}\right)\sec\frac{\alpha}{2},$$

$$C_2 = \frac{M_A - M_B}{2}\,\mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2}.$$ [4]

Die Knotenmomente und Feldmomente wachsen bei zunehmender Belastung in stärkerem Maße wie die Belastung; sie steigen besonders stark an, wenn sich die Nennerdeterminante D_N der Dreimomentengleichungen der Grenze Null nähert. Dabei muß allerdings angenommen werden, daß die Spannkräfte

---

[3] Müller-Breslau, Zur Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme. Technische Berichte, herausgegeben von der Flugzeugmeisterei der Inspektion der Fliegertruppen Charlottenburg, 1918, Augustheft, Zeile 485 f. Die dort stehende Tafel der Werte s', s'', s''' findet der Leser auch in der z. Z. unter der Presse befindlichen neuen Auflage von Bd. II, Abt. 2 meiner Graphischen Statik, desgl. eine Tafel der Zahlen ν mit dem Bogenmaß als Argument.

[4] Müller-Breslau, Zur Berechnung der Tragflächenholme, Zeitschr. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1920, S. 163. Viel benutzt werden die Formeln (Graph. Statik II 2 S. 288)

$$M_{\frac{\max}{\min}} = \frac{D_1}{\cos\frac{x}{k}} - g k^2, \text{ wo } \operatorname{tg}\frac{x}{k} = \frac{D_2}{D_1 \sin\alpha} - \operatorname{cotg}\alpha$$

$$D_1 = g k^2 + M_A, \qquad D_2 = g k^2 + M_B.$$

S und damit auch die Werte ψ und $\Delta\vartheta$ unabhängig von den Unbekannten M sind. Das vollständigste Bild von der Bruchsicherheit liefert die Berechnung der Momente und Spannungen σ für stufenweise zunehmende Belastung, wobei die von den Knotenmomenten abhängigen Spannkräfte S von Stufe zu Stufe verbessert werden. Innerhalb einer Laststufe hat man es mit Gleichungen ersten Grades zu tun. Trägt man nun den Lastvervielfacher als Abszisse und die zugehörige größte Spannung σ als Ordinate auf, so erhält man eine Kurve, die für $D_N = 0$ eine Asymptote hat. Bruchgefahr entsteht, sobald die Spannung σ in die Nähe der Asymptote kommt. Von einem Unendlichwerden der Momente M im Falle $D_N = 0$ bei endlich bleibender Zählerdeterminante kann natürlich nicht die Rede sein, ebensowenig von einem Unbestimmtwerden bei verschwindender Zählerdeterminante; denn im Grenzfalle $D_N = 0$ wird die der Entwicklung der Gleichung (1) zugrunde liegende Näherungsgleichung

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

der elastischen Linie unbrauchbar. Es genügt, auf den schwerwiegenden Mangel der EULERschen Theorie der Knickung gerader Stäbe hinzuweisen, der in der Unbestimmtheit der Größe der Durchbiegung liegt und erst durch die bekannte Untersuchung GRASHOFS mit Hilfe der genaueren Gleichung $\frac{EJ}{r} = -M$ beseitigt worden ist. Nach dieser Verbesserung bezeichnet man als Knicklast eines geraden Stabes diejenige Belastung, bei welcher der Stab beginnt, sich in ganz bestimmter Weise zu biegen. Für die als Druckglieder verwendeten steifen Stäbe weicht allerdings die Bruchlast nur so wenig von der EULERschen Knicklast ab, daß letztere für die Bemessung des Sicherheitsgrades maßgebend ist. Ebenso verhält es sich mit der Beurteilung des mittels der angenäherten Gleichung der elastischen Linie erhaltenen Grenzfalles $D_N = 0$. Die Berechnung der Tragflächenholme nach der genauen Gleichung der elastischen Linie würde zu große Schwierigkeiten bereiten. Der Hauptwert ist deshalb bei dieser Untersuchung auf die Bestimmung der Spannungen innerhalb der Proportionalitätsgrenze zu legen. Es müssen mindestens zwei Belastungsfälle verfolgt werden, erstens die Belastung für den vorgeschriebenen Betrieb, zweitens eine möglichst hoch gewählte Laststufe, die aber noch innerhalb des elastischen Bereiches liegen muß, wenn man die auf dem HOOKEschen Gesetz beruhenden Formeln anwenden will. Nach Durchführung dieser zweiten Berechnung bietet auch die Untersuchung des Grenzfalles $D_N = 0$ — wenn man sie überhaupt noch für nötig hält — selbst bei einer größeren Zahl von Gleichungen keine Schwierigkeit, da man schon eine in der Nähe der ersten Wurzel der Gleichung $D_N = 0$ liegende Lösung kennt. Das Ausrechnen der Determinante D_N kann man durch die Berechnung der Momente für einen sehr einfachen Belastungsfall ersetzen. Die Anzahl der Felder sei n. Der erste Stützpunkt werde mit 0, der letzte mit n bezeichnet. Es sei durchweg $\Delta\vartheta = 0$, auch $e = 0$. An dem einen Holmende z. B. am Ende des Feldes s_n nehme man ein beliebig großes angreifendes

Moment M_n an. Sonst sei der Holm unbelastet; es wirken nur die Drucke S. Mit den Bezeichnungen

$$\psi'_m + \psi'_{m+1} = b_m, \quad \psi'_m = a_m$$

ergibt sich dann[5]:

$$M_1 = -\mu_1 M_2, \quad M_2 = -\mu_2 M_3, \quad M_3 = -\mu_3 M_4, \ldots M_{n-1} = -\mu_{n-1} M_n,$$

wo

$$\mu_1 = \frac{a_2}{b_1},$$

$$\mu_2 = \frac{a_3}{b_2 - \mu_1 a_2},$$

$$\mu_m = \frac{a_{m+1}}{b_m - \mu_{m-1} a_m},$$

. . . . . .

Ist nun $b_{n-1} - \mu_{n-2} a_{n-1} = 0$, so wird $\mu_{n-1} = \infty$ und alle Knotenmomente werden unendlich.

Ich schalte ein Zahlenbeispiel ein. Die Feldlängen eines frei auf 7 Stützen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ruhenden Stabes seien 4.2^m, 4.3^m, 4.7^m, 4.8^m, 4.9^m, 5.0^m, die Drucke verhalten sich zu einander wie $5 : 6 : 60 : 70 : 81 : 170$[6]. Die fünfte Spalte der folgenden Zahlentafel gibt die Verhältnisse

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_6} = \frac{s_m}{s_6}\sqrt{\frac{S_m J_6}{S_6 J_m}}$$

an, die sechste die Werte α_m für $\alpha_6 = \mathbf{3.633}$. Aus den zu diesen α gehörigen, einer Tafel entnommenen Zahlen ν wurden (an Stelle der Werte $\psi = \nu : Ss$) die Zahlen

$$\psi'_m = \frac{S_6 s_6}{S_m s_m}\nu'_m, \qquad \psi''_m = \frac{S_6 s_6}{S_m s_m}\nu''_m = a_m$$

berechnet, sodann die $b_m = \psi'_m + \psi'_{m+1}$ und die Zahlen

$$\mu_1 = \frac{1.984}{7.662} = 0.259. \qquad \mu_2 = \frac{3.787}{9.906 - 1.984\,\mu_1} = 0.403$$

$$\mu_3 = \frac{4.678}{12.995 - 3.787\,\mu_2} = 0.408, \qquad \mu_4 = \frac{6.161}{15.556 - 4.678\,\mu_3} = 0.451.$$

Da nun

$$b_5 - \mu_4 a_5 = 2.778 - 0.451 \cdot 6.161 = 2.778 - 2.779 = 0.00$$

ist, so wird die Knickbedingung erfüllt. Knickgefahr entsteht im sechsten Felde sobald S_6 in die Nähe von

$$S_6 = 3.633^2 \frac{EJ}{s^2} = 1.34\,\pi^2 \frac{EJ}{s^2}$$

kommt. Kurz vor Eintritt dieses Grenzfalles muß aber die Beanspruchung des Stabes noch innerhalb des elastischen Bereiches liegen, da sonst die auf dem Hookeschen Gesetze fußende Rechnung ungültig ist. Eine Untersuchung der Knickbedingung ohne Berechnung der Spannungen hat wenig Wert.

[5] Ich verweise auf die bekannte Theorie des mehrfach gestützten Balkens und auf die Bestimmung der Festpunkte L und R mit Hilfe der Zahlen μ. Im vorliegenden Falle müssen die von den S abhängigen μ für jeden Belastungsfall neu berechnet werden.

[6] Ich wähle ein in zwei anderen Arbeiten (Zentralbl. der Bauverwaltung 1922, S. 233 und Der Bauingenieur 1923, S. 388) stehendes Beispiel um eine Vergleichung verschiedener Verfahren zu erleichtern. Für den oben eingeschlagenen Weg braucht man nichts als die erweiterten Clapeyronschen Gleichungen und die Zahlen μ, die für alle auf dreigliedrige Gleichungen führende Aufgaben wichtig sind.

m	s_m	S	$\frac{S_6 s_6}{S_m s_m}$	$\frac{a_m}{a_6}$	a_m	ν'_m	ν''_m	$\psi_m = \frac{S_6 s_6}{S_m s_m} \nu_m$		$b_m = \psi'_m + \psi'_{m+1}$	μ_m
								ψ'_m	$\psi''_m = a_m$		
1	4.2	5	40.48	0.144	0.523	0.0929		3.761		7.662	0.259
2	4.3	6	32.95	0.162	0.589	0.1184	0.0602	3.901	1.984	9.901	0.403
3	4.7	60	3.01	0.558	2.027	1.995	1.258	6.005	3.787	12.995	0.408
4	4.8	70	2.53	0.616	2.238	2.763	1.849	6.990	4.678	15.556	0.451
5	4.9	81	2.14	0.676	2.456	4.003	2.879	8.566	6.161	2.778	
6	5.0	170	1	1	**3.633**	-5.788		-5.788			

Für die mit den Festpunkten L und R des mehrfach gestützten Balkens vertrauten Leser knüpfe ich an dieses Beispiel noch eine Bemerkung, die geeignet sein dürfte, den eingeschlagenen einfachen Weg zu veranschaulichen.

Führt man die Rechnung für $\alpha_6 = 3.4$ durch, so erhält man für die den Stützpunkten 1, 2, 3, 4, 5 zugeordneten Zahlen μ_1 bis μ_5 die Werte

$$0.252 \qquad 0.383 \qquad 0.384 \qquad 0.414 \qquad 1.994 .$$

Der nach links positiv genommene Abstand des Punktes L_6 vom Stützpunkte 6 beträgt

$$\frac{s_6}{1+\mu_5} = \frac{5.0}{2.994} = 1.67^{\mathrm{m}} .$$

Für $\alpha = 3.6$ findet man

$$\mu = 0.259 \qquad 0.402 \qquad 0.404 \qquad 0.445 \qquad 13.10 .$$

L_6 hat sich dem Stützpunkt 6 genähert bis auf $5.0 : 14.10 = 0.35^{\mathrm{m}}$.

Für $\alpha = 3.633$ fällt L_6 mit 6 zusammen. In Wirklichkeit besteht aber schon bei $\alpha = 3.6$ Bruchgefahr, da σ in einem solchen Falle bereits zu nahe an der Asymptote der σ-Linie liegen wird. Es ist auch gleichgültig, ob man mit

$$S_n = 3.6^2 \frac{EJ}{s^2} = 1.31\, \pi^2 \frac{EJ}{s^2}$$

rechnet oder mit dem oben erhaltenen Werte.

Ein wichtiger Punkt muß besonders hervorgehoben werden, da er in den mir bekannt gewordenen Holmberechnungen nicht beachtet worden ist. Es ist dies die Änderung Δs der Feldlänge s infolge der starken Holmverbiegung auf der hohen Belastungsstufe. Zu der Verkürzung

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} \tag{4}$$

infolge des Druckes S tritt bei zentrischen Knoten die Verkürzung

$$\Delta s = s - \int_0^s ds \cos \tau ,$$

wo τ den Neigungswinkel der Tangente der elastischen Linie im Punkte x bedeutet. Hierfür darf man genügend genau setzen

$$\Delta s = \frac{1}{2} \int_0^s \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}s}^{\frac{1}{2}s} \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 d\xi \tag{5}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{C_1}{Sk} \sin \frac{\xi}{k} + \frac{C_2}{Sk} \cos \frac{\xi}{k} + g\frac{\xi}{S} - \frac{M_A - M_B}{Ss} .$$

Sind die Knoten exzentrisch (Fig. 1) so kommt noch der Betrag hinzu:

$$\Delta s = e(\tau_A + \tau_B) \tag{6}$$

$$\tau_A = M_A \psi' + M_B \psi'' + g \frac{s v'''}{S}$$

$$\tau_B = M_B \psi' + M_A \psi'' + g \frac{s v'''}{S} .$$

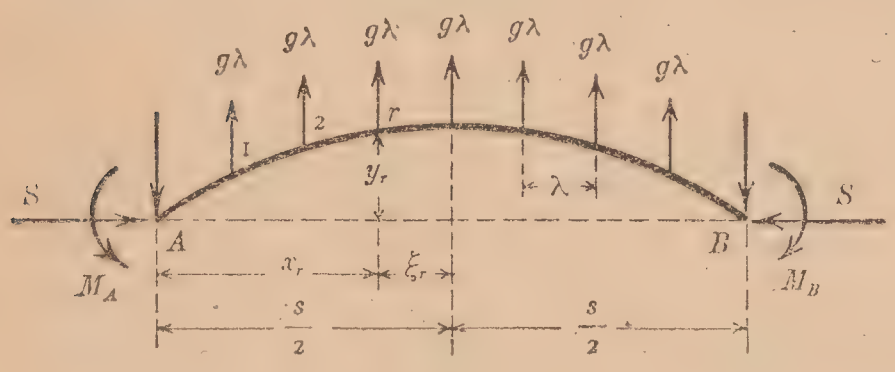
Ist z. B. für ein Holmfeld auf hoher Belastungsstufe: $S = 1200$ kg, $s = 350$ cm, $J = 245.5$ cm^4, $F = 20$ cm^2, $e = 4$ cm, $E = 120000$ kg/cm^2 (Kiefer), $g = 1.48$ kg/cm, $M_A = -30$ kgm, $M_B = -190$ kgm, so liefern die Formeln (4), (5), (6) der Reihe nach

$$\Delta s = 1.75^{\text{mm}}, 4.66^{\text{mm}}, 4.83^{\text{mm}} .$$

II.

Die unter I zusammengestellten Formeln setzen eine stetige gleichförmige Querbelastung g voraus[7]. In Wirklichkeit werden aber durch die in Abständen λ angeordneten Flügelrippen auf den Holm Einzellasten $g\lambda$ übertragen, (Fig. 2). In der in der Fußnote 3 angeführten Abhandlung habe ich nachgewiesen, daß sich die Biegungsmomente M für die Angriffsstellen der $g\lambda$ von den durch eine stetige Belastung erzeugten Momenten nur dadurch unterscheiden, daß an die Stelle von gk^2 der Wert

Fig. 2.



$$g v^2 = g k^2 \frac{\frac{\alpha}{2n}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2n}} \tag{7}$$

tritt. Infolge einer stetigen Belastung entsteht im Abstande ξ von der Feldmitte (Fig. 1)

$$M = \left[g k^2 + \frac{1}{2}(M_A + M_B) \right] \frac{\cos \frac{\xi}{s} \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2}(M_A - M_B) \frac{\sin \frac{\xi}{s} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} g k^2 . \tag{8}$$

Wird also das Feld in n Abschnitte λ zerlegt und die Bezeichnung eingeführt

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{n} = \lambda \sqrt{\frac{S}{EJ}} ,$$

---

[7] Den Einfluß einer ungleichförmigen stetigen Querbelastung habe ich in der Abhandlung Über Knickfestigkeit im Zentralbl. der Bauverwaltung 1919, S. 309 behandelt.

so ist

$$\frac{\xi_r}{s}\alpha = \left(\frac{n}{2} - r\right)\bar{\alpha},$$

und man erhält für den Feldquerschnitt r

$$(9)\quad M_r = \left[gv^2 + \frac{1}{2}(M_A + M_B)\right]\frac{\cos\left(\frac{n}{2} - r\right)\bar{\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2}(M_A + M_B)\frac{\sin\left(\frac{n}{2} - r\right)\bar{\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - gv^2.$$

Fig. 3.

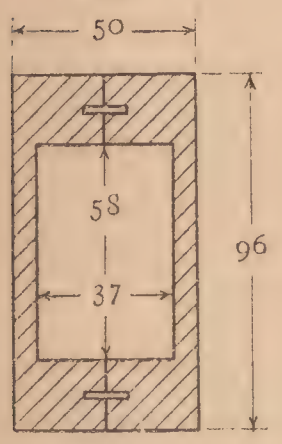
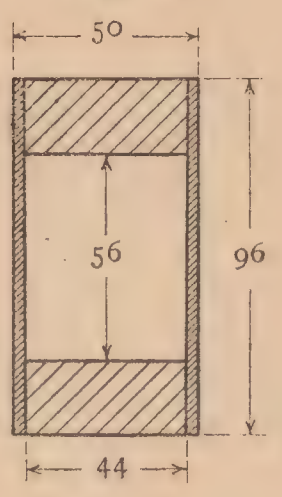


Fig. 4.



Nach dieser Vorbereitung wende ich mich zu den mit Flugzeugholmen angestellten Versuchen.

Es wurden 24 zweifeldrige, von der Flugzeugmeisterei und den Albatroswerken gelieferte Holme aus Kiefernholz untersucht, 12 ungleicharmige ($s = 3.2^{m}$ und $s_1 = 2.4^{m}$) und 12 gleicharmige ($s = s_1 = 3.2^{m}$). Die Holme der Flugzeugmeisterei hatten den in Fig. 3 dargestellten Querschnitt. Die Albatrosholme bestanden nach Fig. 4 aus zwei durch Sperrhölzer (Birke) verbundenen Gurtungen. Die Figuren geben abgerundete Abmessungen an. Für die Nachrechnung der Versuchsergebnisse wurden die Querschnitte der verschiedenen Holme genau gemessen. Für J und F mußten für jeden Holm besondere Mittelwerte eingeführt werden.

Die Querbelastung bestand aus gleich großen, in Abständen von 40 cm angehängten Einzellasten G.

Fig. 5.

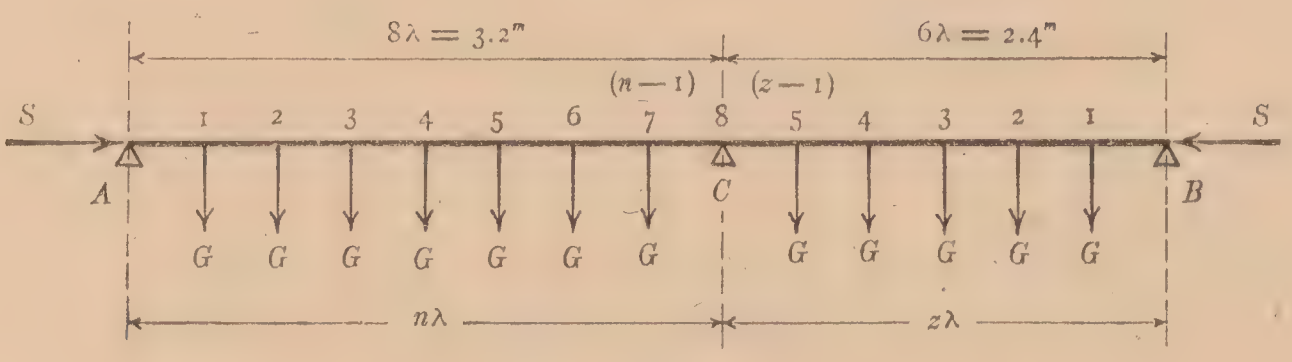


Fig. 5 zeigt die Belastung der ungleicharmigen Holme. Zwischen den Feldmomenten M_{n-1} und M_{z-1} und dem Stützenmoment M_C besteht die Beziehung

$$(10)\qquad M_{n-1}\bar{v}'' + 2M_C\bar{v}' + M_{z-1}\bar{v}'' + Sy_{n-1} + Sy_{z-1} = 0;$$

wo

$$\bar{v}' = 1 - \bar{\alpha}\operatorname{cotg}\bar{\alpha}, \qquad \bar{v}'' = \frac{\bar{\alpha}}{\sin\bar{\alpha}} - 1 \qquad \bar{\alpha} = \lambda\sqrt{\frac{S}{EJ}}.$$

Mit Hilfe von

$$M_{n-1} = g\frac{\lambda^2}{2}(n-1) + M_C\frac{n-1}{n} + Sy_{n-1} \quad \text{und}$$

$$M_{z-1} = g\frac{\lambda^2}{2}(z-1) + M_C\frac{z-1}{z} + Sy_{z-1}$$

läßt sich (10) umformen in

$$(11)\qquad \frac{\bar{\alpha}}{\sin\bar{\alpha}}(M_{n-1}+M_{z-1})+M_C\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{z}-2\bar{\alpha}\operatorname{cotg}\bar{\alpha}\right)=g\frac{\lambda^2}{2}(n+z-2).$$

Nun ist nach (9) mit $M_A=0$ und M_C statt M_B:

$$M_{n-1}=gv^2\left(\frac{\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\bar{\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}-1\right)+M_C\frac{\sin(n-1)\bar{\alpha}}{\sin\alpha},$$

woraus sich ergibt

$$\frac{\bar{\alpha}}{\sin\bar{\alpha}}M_{n-1}=\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\bar{\alpha}}{2}-1\right)g\frac{\lambda^2}{2}+M_C(\operatorname{cotg}\bar{\alpha}-\operatorname{cotg}\alpha)\bar{\alpha}.$$

Ebenso findet man

$$\frac{\bar{\alpha}}{\sin\bar{\alpha}}M_{z-1}=\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\bar{\alpha}}{2}-1\right)g\frac{\lambda^2}{2}+M_C(\operatorname{cotg}\bar{\alpha}-\operatorname{cotg}\alpha_1)\bar{\alpha}.$$

Setzt man diese Werte in (11) ein, so erhält man für das Stützenmoment den einfachen Ausdruck

$$(12)\qquad M_C=-\frac{gs^2}{2}\,\frac{\frac{1}{n}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2n}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\right)-1-\frac{s_1}{s}}{v'+\frac{s}{s_1}v_1'},$$

wo v' und v_1' die zu

$$\alpha=s\sqrt{\frac{S}{EJ}}\quad\text{und}\quad\alpha_1=s_1\sqrt{\frac{S}{EJ}}$$

gehörigen Zahlen sind.

Mit der Bezeichnung

$$\varepsilon=\frac{\alpha}{2n}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2n}$$

läßt sich (12) auch umformen in

$$(13)\qquad M_C=-gs^2\,\frac{\left(v'''+\frac{s_1}{s}v_1'''\right)\varepsilon-\left(1+\frac{s_1}{s}\right)\frac{1-\varepsilon}{2}}{v'+\frac{s}{s_1}v_1'}.$$

Setzt man bei kleinen Bogenlängen $\alpha:2n$

$$\frac{\alpha}{2n}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2n},\quad\text{also}\quad\varepsilon=1,$$

so geht (13) in die für stetige Querbelastung gültige Formel über.

Wird die Formel (12) beibehalten und

$$(14)\qquad M_C=-\beta gs^2$$

gesetzt, so ist für den ungleicharmigen Versuchsholm mit

$$s = 8\lambda, \quad s_I = 6\lambda, \quad \alpha_I = \frac{3}{4}\alpha, \quad \alpha = \frac{\alpha}{8},$$

$$\beta = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{16}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{3\alpha}{4}\right) - 7}{8\left(\nu' + \frac{4}{3}\nu_I'\right)} \tag{15}$$

Das größte Feldmoment entsteht bei $r = 4 = \frac{n}{2}$ und ist

$$M_4 = \left(gv^2 + \frac{1}{2}M_C\right)\sec\frac{\alpha}{2} - gv^2$$

$$M_4 = \frac{gs^2}{16}\left[\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{16} - 8\beta\right)\sec\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\alpha}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{16}\right]. \tag{16}$$

Auch die Durchbiegung wird in der Nähe von $r = 4$ am größten. Aus

$$M_4 = \frac{gs^2}{8} - \frac{1}{2}M_C + Sy_4$$

folgt mit

$$G = g\lambda = \frac{gs}{8}$$

$$y_4 = \frac{Gs}{2S}\left[\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{16} - 8\beta\right)\left(\sec\frac{\alpha}{2} - 1\right) - 2\right]. \tag{17}$$

Für alle Versuche wurde

$$S = 40\,G$$

angenommen. Das gibt in Millimetern

$$y_4 = 40\left[\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{16} - 8\beta\right)\left(\sec\frac{\alpha}{2} - 1\right) - 2\right]. \tag{18}$$

Jetzt konnte die Frage beantwortet werden: Bei welchem Elastizitätsmodul E stimmt die durch einen bestimmten Druck S erzeugte Durchbiegung y_4 mit der berechneten Durchbiegung überein? Man hat nur nötig, mittels Gleichung (18) den zu dem gemessenen y_4 gehörenden Wert α zu bestimmen und in die Formel

$$E = \frac{Ss^2}{\alpha^2 J}$$

einzusetzen. Zur Auffindung zusammengehöriger Werte y und α wurde eine Zahlentafel und eine Kurve mit den Abszissen α und den Ordinaten y benutzt.

Die mit großer Sorgfalt ausgeführten Versuche verliefen sehr regelmäßig[8]. Wir beschränken uns hier auf die Mitteilung der Ergebnisse für drei ungleich-

[8] Die bauliche Durchbildung der Versuchsvorrichtung geschah durch den Direktor des Materialprüfungsamtes, Hrn. RUDELOFF, die Ausführung der Versuche leitete der Assistent des

armige Albatrosholme, bemerken aber, daß auch die anderen Versuche mit ungleicharmigen Holmen bis kurz vor dem Bruch ein nur wenig veränderliches E ergaben. Der unterstrichene, den Wert $40\,G$ nicht mehr ganz erreichende Druck S erzeugte den Bruch.

$J = 311.02$ cm^4, $W = 64.78$ cm^3, $F = 23.98$ cm^2					$J = 308.20$ cm^4, $W = 64.51$ cm^3, $F = 28.80$ cm^2					$J = 310.70$ cm^4, $W = 64.52$ cm^3, $F = 24.17$ cm^2				
S kg	G kg	y_4 mm	E kg/cm^2	σ kg/cm^2	S kg	G kg	y_4 mm	E kg/cm^2	σ kg/cm^2	S kg	G kg	y_4 mm	E kg/cm^2	σ kg/cm^2
800	20	11.2	118320		800	20	10.4	127130		800	20	11.0	120180	
1000	25	13.9	123660		1000	25	13.5	127640		1000	25	14.8	117400	
1200	30	17.3	124700		1200	30	16.9	128110		1200	30	18.3	119360	
1400	35	21.4	123980		1400	35	20.1	130950		1400	35	22.7	118790	
1600	40	25.8	123950		1600	40	24.8	128470		1600	40	27.9	117590	
1800	45	30.8	123750		1800	45	28.9	130360		1800	45	33.2	117980	
2000	50	36.4	123670		2000	50	33.8	130760		2000	50	40.8	115770	
2200	55	43.6	122510		2200	55	39.8	130160		2200	55	48.4	115810	
2400	60	52.9	120570		2400	60	46.3	130540		2400	60	61.2	112290	456
2600	65	62.7	120280	530	2600	65	54.4	129830		**2580**	65	88.7	103730	(583)
2755	70	80.9	115280	(620)	2800	70	66.1	127660	531					
					2860	75	85.5							

Die gleicharmigen Holme konnten zur Berechnung von E nicht benutzt werden. Obgleich mit der größten Sorgfalt darauf gesehen wurde, die Belastung symmetrisch aufzubringen und Fehlerhebel zu vermeiden, gelang es nicht, symmetrische elastische Linien zu erhalten. Man konnte deutlich erkennen, wie verkehrt es sein würde, bei der Bestimmung der Knicksicherheit für symmetrische Belastung mit einer wagerechten Tangente der elastischen Linie über der Mittelstütze zu rechnen. Wir geben für einen der 12 Versuche mit gleicharmigen Holmen die Ordinaten y_3 der beiden Felder an.

S kg	y_3 mm	y_3 mm	S kg	y_3 mm	y_3 mm
200	2.4	1.7	2000	22.1	24.9
400	4.0	4.0	2200	24.6	28.4
800	7.9	7.9	2400	27.7	32.8
1000	9.8	10.4	2600	31.1	37.8
1200	11.9	12.6	2800	34.0	43.4
1400	14.2	15.4	3000	37.2	50.3
1600	16.8	18.2	3200	40.2	59.3
1800	19.6	21.4	3400	40.3	67.4
			3430	24.8	98.1

Materialprüfungsamtes Hr. Panzerbieter. Es kam sehr darauf an, sämtliche Lasten G gleichzeitig von einer Stufe auf die nächste zu erhöhen und die drei Stützpunkte in derselben Wagerechten zu erhalten. Eine ausführliche Beschreibung der Versuche muß auf bessere Zeiten verschoben werden.

Ausgegeben am 28. April.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XII. Gesamtsitzung. 3. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*Hr. Erman sprach über zwei ägyptische Weisheitsbücher später Zeit, die Lehre des Anii und die des Amen-em-ope.

Beide gehören derselben Richtung an, die vor allem auf Bescheidenheit und Zurückhaltung Wert legt; die des Amen-em-ope scheint jünger zu sein als die des Anii.

Ausgegeben am 28. April.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 10. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Nernst berichtete über gemeinsam mit Hrn. W. Jaeger ausgeführte Versuche über die Konstruktion möglichst störungsfreier Galvanometer. (Erscheint ausführlich an anderer Stelle.)

Bekanntlich besitzen zur Zeit die astatischen Nadelgalvanometer die größte Empfindlichkeit. doch sind sie sowohl Erschütterungen wie auch magnetischen Störungen so sehr ausgesetzt, daß in vielen Fällen ihre Benutzung auf große Schwierigkeiten stößt, die aber durch geeignete Neukonstruktionen sich weitgehend überwinden lassen.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. E. Korschelt in Marburg übersandte die 3. Auflage seines Werkes »Lebensdauer, Altern und Tod« (Jena 1924).

Ausgegeben am 28. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1924 XIV—XVII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 24. April. (S. 179)
Klassensitzung am 1. Mai. (S. 180)
Bieberbach: Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche. (S. 181)
Schur: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. (Mitteilung vom 10. Januar.) (S. 189)
Gesamtsitzung am 8. Mai. (S. 209)
S. Valentiner und M. Rössiger: Über Ökonomie der Fluoreszenzstrahlung. (S. 210)
Klassensitzung am 15. Mai. (S. 216)
Rubner: Über die Bildung der Körpermasse im Tierreich und die Beziehung der Masse zum Energieverbrauch. (S. 217)

Library of Congress
DEC - 5 1924
Smithsonian Deposit

BERLIN 1924

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XIV. Gesamtsitzung. 24. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Einstein sprach Über den gegenwärtigen Zustand des Strahlungsproblems.

Statistische Eigenschaften der Strahlung. Betrachtung über Bothes Theorie der mehrfachen Quanten und über Bemühungen des Verfassers, das Quantenproblem durch überbestimmte Gleichungssysteme zu lösen.

2. Hr. Hellmann legte sodann vor den »Versuch einer Geschichte der Wettervorhersage im XVI. Jahrhundert«. (Abh.)

Seit dem Ende des XV. Jahrhunderts gab es drei Methoden zur Vorhersage der Witterung: die astrometeorologische, nach der man glaubte, aus den Gestirnstellungen die Witterungsverhältnisse im voraus berechnen zu können; die meteorologische, die lehrte, aus den sogenannten natürlichen Wetterzeichen in der Luft und am Himmel auf die nahe bevorstehende Witterung einen Schluß zu ziehen, und endlich die alten vererbten Wetterregeln des Volkes. Die erste Methode wurde als ein besonderer Wissenszweig auch an Universitäten gepflegt und stand überall in hohem Ansehen; sie wurde hauptsächlich in den jährlich erscheinenden Prognostiken oder Praktiken betätigt und erreichte im XVI. Jahrhundert den Höhepunkt der Entwicklung. Während von 1470 bis 1500 gegen 300 solcher Schriften erschienen, steigerte sich ihre Zahl im XVI. Jahrhundert auf mindestens 3000, an deren Abfassung etwa 400 Autoren beteiligt waren. Für die zweite Methode zeitigte das XVI. Jahrhundert 36 Schriften, die Anleitung zur Aufstellung von Wetterprognosen gaben.

3. Vorgelegt wurde Band IX, 2 des Corpus medicorum Graecorum: Paulus Aegineta, edidit J. L. Heiberg, pars altera, libri V—VII (Lipsiae et Berolini 1924).

4. Ferner Monumenta Germaniae historica, Legum sectio III. Concilia· Tomi II supplementum. Libri Carolini (Hannoverae et Lipsiae 1924) und die 45. wissenschaftliche Veröffentlichung der Deutschen Orient-Gesellschaft: Wirtschaftstexte aus Fara, hrsg. von Anton Deimel (Leipzig 1924).

Die Preußische Regierung hat durch Erlaß vom 11. April die Wahl des ordentlichen Professors an der Universität Berlin, Hrn. Dr. Ludwig Bieberbach, zum ordentlichen Mitgliede der physikalisch-mathematischen Klasse bestätigt.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Viktor Hensen in Kiel am 5. April durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 12. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 1. Mai

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Bieberbach sprach »Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche«.

Ein einfach zusammenhängender, von einer rektifizierbaren Jordankurve begrenzter Bereich B sei in Inhalt und Umfang um weniger als ε vom Einheitskreis verschieden. Dann gibt es eine Zahl a und eine analytische Funktion $f(z)$, welche $|z| < 1$ schlicht auf B abbildet, derart, daß $f(\varepsilon, z)$ in $|z| \leq 1$ gleichmäßig mit ε zugleich gegen Null strebt, wenn man $f(\varepsilon, z)$ durch

$$f(z) = a + z + f(\varepsilon, z)$$

definiert.

2. Hr. von Laue überreichte sein Werk La théorie de la relativité, traduction par Gustave Létang, Tom. I (Paris 1924).

Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche.

Von LUDWIG BIEBERBACH.

Ich nenne einen Bereich nahezu kreisförmig, genauer bis auf ε kreisförmig, wenn man ihn durch eine topologische, d. h. eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung so in einen Kreis überführen kann, daß dabei keiner seiner Punkte um mehr als ε aus seiner Ausgangslage verschoben wird. RADÓ löste das Problem, zu untersuchen, unter welchen Umständen man einen solchen Bereich konform auf einen Kreis abbilden kann, ohne dabei einen seiner Punkte um mehr als eine mit ε gegen Null strebende Schranke aus seiner Ausgangslage zu verschieben. (RADÓ, Acta Szeg. 1) Abschätzungen kann man unter einer zusätzlichen naturgemäßen Voraussetzung finden, nämlich der, daß der Bereich von einer rektifizierbaren JORDAN-Kurve begrenzt ist, deren Länge vom Umfang des erwähnten Kreises um weniger als ε abweicht.

1. Ich werde folgenden Satz beweisen. Es sei B ein schlichter, einfach zusammenhängender Bereich, L die Länge seiner als rektifizierbar vorausgesetzten JORDANschen Randkurve. Es sei

$$|L-2\pi|<\varepsilon\cdot 2\pi \tag{1}$$

und 2. gebe es zwei konzentrische Kreise von den Radien $1-\varepsilon$ und $1+\varepsilon$ derart, daß die Randkurve völlig zwischen diesen beiden Kreisen verläuft. Man nehme an, daß der Mittelpunkt dieser beiden Kreise $z=0$ ist. Es sei $f(z)$ diejenige analytische Funktion, welche $|z|<1$ auf B umkehrbar eindeutig abbildet, so daß $f(0)=0$ und $f'(0)>0$ gilt. Dann ist im abgeschlossenen Einheitskreis

$$|f(z)-z|<4\pi\sqrt{2\varepsilon}.$$

Diese Schranke ist insofern die genaue, als man $\sqrt{\varepsilon}$ nicht durch eine höhere Potenz von ε ersetzen kann.

2. Bevor ich auf den Beweis des eben formulierten Satzes eingehe, will ich noch kurz von einem etwas allgemeineren Satze reden, der sich aus dem eben genannten erschließen läßt. Es ist der folgende: Wenn ein einfach zusammenhängender, von einer rektifizierbaren JORDAN-Kurve begrenzter Bereich B in Inhalt und Umfang um weniger als η vom Einheitskreis abweicht, so gibt es eine Zahl a und eine analytische Funktion $f(z)$, welche $|z|<1$

schlicht auf B abbildet, derart, daß $f(\eta, z)$ in $|z|<1$ gleichmäßig mit η zugleich gegen Null strebt, wenn man $f(\eta, z)$ durch

$$f(z) = a + z + f(\eta, z) \tag{2}$$

definiert.

Ich gebe kurz an, wie dieser Satz aus dem vorigen folgt. Mit einer der Methoden, welche zum Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises dienen, am raschesten wohl mit der Hurwitzschen, kann man beweisen, daß es eine mit η gegen Null strebende Zahl $r(\eta)$ gibt, derart, daß der Rand eines einfach zusammenhängenden Bereiches, der in Inhalt und Umfang um weniger als η vom Einheitskreis abweicht, zwischen zwei passenden konzentrischen Kreisen von den Radien $1-r(\eta)$ und $1+r(\eta)$ verläuft. Ist a der Mittelpunkt dieses Kreises, so führt die Abbildung $f(z)-a$ den Kreis $|z|<1$ in einen anderen Bereich über, der für

$$\varepsilon = \mathrm{Max}\,(\eta, r(\eta))$$

den Voraussetzungen des ersten Satzes genügt.

Ich will mich mit diesen Andeutungen begnügen. An sich bietet ja die eben erwähnte Tatsache geometrisches Interesse. Sie stellt eine Verschärfung der Tatsache dar, daß der Kreis der einzige Bereich ist, der bei gegebenem Inhalt einen möglichst kleinen Umfang besitzt. Natürlich ist nicht in dieser Weise jeder Bereich durch Inhalt und Umfang bestimmt. Das eben erwähnte geometrische Problem löste Bonnesen, Ann. 84, 91.

Das Neue an meinem Satze liegt darin, daß die Abbildungsfunktion im abgeschlossenen Bereich von z wenig abweicht. Bekannt ist schon eine Abschätzung für innere Teilbereiche, welche nur verlangt, daß der Bildbereich in seinem Inhalt wenig vom Einheitskreis abweicht. So bekommt man begreiflicherweise Schranken, die im abgeschlossenen Bereiche nicht einmal beschränkt sind. Die Beschränktheit folgt ja auch erst aus der Forderung des geringen Umfangunterschiedes oder aus der des geringen gestaltlichen Unterschiedes zwischen Einheitskreis und Bereich B.

3. Dem eigentlichen Beweise meines Satzes schicke ich einige Hilfsbetrachtungen voraus. Sie beziehen sich wesentlich auf die analytische Darstellung des Umfangs vermittels der Abbildungsfunktion. Die Kreise $|z| = r < 1$ gehen bei der Abbildung in analytische Kurven über. Ihren Umfang kann man leicht berechnen. Er wird

$$L(r) = \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|\, r\, d\varphi\,. \tag{3}$$

Man beachte nun, daß wegen der Schlichtheit der Abbildung $f'(z)$ in $|z|<1$ von Nullstellen frei ist. Daher ist jeder Zweig von $\sqrt{f'(z)}$ in $|z|<1$ regulär. Man bezeichne weiter mit $\sqrt{f'(z)}$ denjenigen Zweig der Funktion, welcher bei $z=0$ einen positiven Wert besitzt, und setze

$$\sqrt{f'(z)} = \sum_1^\infty c_\nu z^{\nu-1}. \tag{4}$$

Dann wird

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \left| \sqrt{f'(re^{i\varphi})} \right|^2 r\, d\varphi$$

$$= 2\pi \sum_1^\infty |c_\nu|^2 r^{2\nu-1}. \qquad (r<1)$$

Ich behaupte nun: Dafür, daß die JORDANsche Randkurve von B rektifizierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\sum_1^\infty |c_\nu|^2$$

konvergiert, und es gilt für den Umfang derselben

$$L = L(1) = 2\pi \sum_1^\infty |c_\nu|^2. \qquad (5)$$

Ich begnüge mich hier damit, die Notwendigkeit zu beweisen, da ich mehr für weiterhin nicht brauche und da sich das Hinreichende der Bedingung aus den folgenden Betrachtungen auch leicht ableiten läßt. Es sei also die Randkurve von B rektifizierbar und L ihr Umfang. Dann stelle ich zunächst fest, daß

$$L(r) \leqq L \text{ ist für } r<1.$$

Zum Beweis betrachte man die Näherungssummen von $L(r)$. Es sei

$$L_n(r) = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} |f(re^{i\varphi_{\mu+1}}) - f(re^{i\varphi_\mu})| = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} |g_\mu(r)|,$$

$$\text{wo } g_\mu(r) = f(re^{i\varphi_{\mu+1}}) - f(re^{i\varphi_\mu})$$

eine solche. Hier halte man die ϕ_μ fest und denke sich r für einen Augenblick durch eine frei veränderliche komplexe Variable $\mathfrak{z}$ ersetzt. $L_n(\mathfrak{z})$ ist dann eine für $|\mathfrak{z}| \leq 1$ stetige Funktion. Denn $f(z)$ ist bekanntlich im abgeschlossenen Einheitskreis stetig, da es diesen auf einen Bereich abbildet, der von einer (rektifizierbaren) JORDAN-Kurve begrenzt ist. Diese Funktion nimmt aber das Maximum ihres absoluten Betrages am Rande des Einheitskreises ein. Denn man findet

$$\Delta(L_n(\mathfrak{z})) = \frac{\partial^2}{\partial\mathfrak{z}\,\partial\bar{\mathfrak{z}}}(L_n(\mathfrak{z})) = \sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial\mathfrak{z}\,\partial\bar{\mathfrak{z}}} \sqrt{g_\mu(\mathfrak{z})\,\overline{g_\mu(\mathfrak{z})}},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist.

$$= \sum_\mu \frac{\partial}{\partial\bar{\mathfrak{z}}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_\mu \cdot \bar{g}_\mu}} g'_\mu \cdot \bar{g}_\mu$$

$$= \sum_\mu \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_\mu \bar{g}_\mu}} \cdot g'_\mu \bar{g}'_\mu - \frac{1}{4} \frac{1}{(\sqrt{g_\mu \bar{g}_\mu})^3} \cdot g'_\mu \bar{g}_\mu g_\mu \cdot \bar{g}'_\mu \right)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_\mu \frac{1}{\sqrt{g_\mu \cdot \bar{g}_\mu}} \cdot g'_\mu \bar{g}'_\mu.$$

Und das ist nicht kleiner als Null für $|\mathfrak{z}|<1$, so daß nach einem bekannten Satz über die Differentialgleichung $\Delta u = \rho(x, y)$ im Inneren von $|\mathfrak{z}|<1$ kein Maximum liegen kann. Es liegt also eines am Rande, und zwar möge es bei

$$\mathfrak{z} = e^{i\vartheta}$$

liegen. Dann ist also

$$L_n(r) < \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \left| f(e^{i(\vartheta+\varphi_{\mu+1})}) - f(e^{i(\vartheta+\varphi_\mu)}) \right| = L_n.$$

Man erkennt sofort, daß L_n eine Näherungssumme für L, d. h. für den Umfang des Bereiches B ist. Somit wissen wir jetzt, daß zu jeder Näherungssumme von $L(r)$ eine mindestens ebenso große von L gehört. Daher ist auch

$$L(r) \leq L.$$

Daher gilt für jedes ganze $n>0$ und jedes $0<r<1$ auch

$$2\pi \sum_{1}^{n} |c_\nu|^2 r^{2\nu-1} \leq L(r) \leq L.$$

Daher ist auch für jedes ganze $n>0$

$$2\pi \sum_{1}^{n} |c_\nu|^2 < L.$$

Daher ist

$$\sum_{1}^{\infty} |c_\nu|^2$$

konvergent, und es ist

$$2\pi \sum_{1}^{\infty} |c_\nu|^2 \leq L.$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß hier das Gleichheitszeichen gilt. Dazu ist zu zeigen, daß

$$\lim_{r\to 1} L(r) = L$$

ist. Denn dann lehrt der Abelsche Grenzwertsatz, daß (5) gilt. Zum Nachweis der Richtigkeit von (5) ist wieder nur festzustellen, daß L nicht größer als $\lim_{r\to 1} L(r)$ sein kann. Dies aber folgt daraus, daß zu jeder Näherungssumme von L für hinreichend großes r eine davon beliebig wenig verschiedene Näherungssumme von $L(r)$ gehört. Denn wir wissen ja schon, daß $L_n(r)$ für $r \leq 1$ stetig ist.

4. Nun komme ich zum eigentlichen Beweis meines Approximationssatzes. Ich befasse mich zunächst mit dem linearen Glied in der Entwicklung von $f(z)$. Ich setze

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_\nu z^\nu,$$

so daß $c_1 = \sqrt{a_1}$ ist. Bekanntlich gilt dann für den Inhalt F des Bereiches B

$$F = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|^2 r\, dr\, d\varphi = \pi \sum_{1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2.$$

Nach der zweiten unserer Voraussetzungen ist daher

$$\sum_{1}^{\infty} \nu \left| a_\nu \right|^2 \leq (1+\varepsilon)^2 .$$

Namentlich ist also

$$a_1 \leq 1+\varepsilon .$$

Da B den Kreis $|z|<1-\varepsilon$ enthält, so wird dieser durch die Umkehrungsfunktion von $f(z)$ auf einen Teil von $|z|<1$ abgebildet. Die eben verwendete Schlußweise lehrt daher eine Abschätzung nach oben für das lineare Glied dieser Umkehrungsfunktion. So findet man

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{|a_1|^2} \leq 1 ,$$

d. h. $a_1 \geq 1-\varepsilon$. Daraus ergeben sich auch zwei Schranken für $c_1 = \sqrt{a_1}$. Zunächst hat man nämlich unmittelbar

$$c_1 \leq \sqrt{1+\varepsilon} < 1+\frac{1}{2}\varepsilon .$$

Ferner aber ist

$$\frac{1}{c_1} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} = \sqrt{1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} < 1+\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} .$$

Also

$$c_1 > \frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon} = 1-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} .$$

Da aber $\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} > \frac{1}{2}\varepsilon$, so ist $|c_1 - 1| < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$.

Nun wird

$$|f(z)-z| = \left|\int_0^z (f'-1)\,dz\right| \leq \int_0^r |f'-1|\,dr$$

$$\leq \sqrt{\int_0^r |\sqrt{f'}-1|^2\,dr \cdot \int_0^r |\sqrt{f'}+1|^2\,dr}$$

$$= \sqrt{\int_0^r \left(\sum_1^\infty c_\nu z^{\nu-1}-1\right)\left(\sum_1^\infty \bar{c}_\nu \bar{z}^{\nu-1}-1\right) dr}$$

$$\cdot \sqrt{\int_0^r \left(\sum_1^\infty c_\nu z^{\nu-1}+1\right)\left(\sum_1^\infty \bar{c}_\nu \bar{z}^{\nu-1}+1\right) dr}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{(\nu,\mu)}^{1\cdots\infty} \frac{|c'_\nu||c'_\mu|}{\nu+\mu-1} r^{\nu+\mu-1}} \cdot \sqrt{\sum_{(\nu,\mu)}^{1\cdots\infty} \frac{|c''_\nu||c''_\mu|}{\nu+\mu-1} r^{\nu+\mu-1}} ,$$

wo $c'_\varkappa = c''_\varkappa = c_\varkappa$ für $\varkappa > 1$ und $c'_1 = c_1 - 1$, $c''_1 = c_1 + 1$.

Nun ist nach HILBERT

$$F(x, x) = \sum_{(\nu,\mu)}^{1\cdots\infty} \frac{x_\nu x_\mu}{\nu+\mu-1}$$

eine beschränkte quadratische Form. Daher gilt weiter

$$|f(z)-z| \leqq \sqrt{F(|c'|, |c'|)}\ \sqrt{F(|c''|, |c''|)}$$

für $|z| \leqq 1$.

Hr. J. SCHUR hat (HENSELS Journal, Bd. 140, S. 16ff.) die beste Schranke gefunden. Es ist nämlich

$$|F(x, x)| \leqq \pi \text{ für } \sum_1^\infty x_\varkappa^2 \leqq 1.$$

In unserem Falle ist

$$\sum_1^\infty |c_\nu'|^2 = (c_1-1)^2 + \sum_2^\infty |c_\nu|^2 \leqq \frac{\varepsilon^2}{(2-\varepsilon)^2} + \sum_2^\infty |c_\nu|^2$$

und

$$\sum_1^\infty |c_\nu''|^2 = (c_1+1)^2 + \sum_2^\infty |c_\nu|^2 < \left(2+\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + \sum_2^\infty |c_\nu|^2.$$

Nun ist aber

$$|L-2\pi| = |2\pi \sum_1^\infty |c_\nu|^2 - 2\pi| < \varepsilon\, 2\pi.$$

Also

$$|c_1^2 - 1 + \sum_2^\infty |c_\nu|^2| < \varepsilon.$$

Das heißt

$$\sum_2^\infty |c_\nu|^2 < \varepsilon + |c_1^2-1| = \varepsilon + |a_1-1| < 2\varepsilon.$$

Also ist

$$\sum_1^\infty |c_\nu'|^2 < 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{(2-\varepsilon)^2}$$

und

$$\sum_1^\infty |c_\nu''|^2 < \left(2+\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + 2\varepsilon.$$

Also wird endlich

$$|f(z)-z| < \pi \sqrt{2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{(2-\varepsilon)^2}}\ \sqrt{2\varepsilon + \left(2+\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2}$$

$$< \pi \sqrt{2\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon}{4(2-\varepsilon)^2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{\left(2+\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2}\right),$$

da ja $\varepsilon < 1$ sein muß.

Daher wird auch

$$|f(z)-z|<4\pi\sqrt{2\varepsilon} \text{ für } |z|\leqq 1 \text{ und } \varepsilon<1.$$

Bei numerisch gegebenem ε kann man natürlich den Faktor 4 durch einen kleineren ersetzen. Wenn z. B. $\varepsilon\leqq\frac{1}{10}$ ist, so findet man die für $|z|\leqq 1$ gültige Abschätzung

$$|f(z)-z|<2{,}2\cdot\pi\sqrt{2\varepsilon}.$$

5. Man wird sich weiter die Frage vorlegen, ob die hier gefundene Schranke in der Größenordnung das Richtige trifft, mit anderen Worten, ob es möglich ist, darin die $\sqrt{\varepsilon}$ durch eine höhere Potenz von ε zu ersetzen. Daß dies nicht möglich ist, will ich nun an einem Beispiel zeigen. Ich betrachte einen Bereich, der aus dem Einheitskreis dadurch hervorgeht, daß man durch eine Schne eine Kalotte desselben entfernt. Zur genaueren Fixierung des Bereiches nehme ich an, daß der Schnitt senkrecht zur positiven reellen Achse geführt wird. Der Bereich ist dann ein zur reellen Achse symmetrisches Kreisbogenzweieck, dessen Ecken in den Punkten $\alpha=e^{i\vartheta}$, $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$ und $\bar{\alpha}$ liegen mögen. Der Bereich gehöre der z-Ebene an. Die Funktion

$$\left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)^{\varkappa}\cdot\frac{\left(\frac{\alpha-z}{z-\bar{\alpha}}\right)^{\varkappa}-\left(\frac{-\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^{\varkappa}}{\left(\frac{\alpha-z}{z-\bar{\alpha}}\right)^{\varkappa}-\left(\frac{\bar{\alpha}}{-\alpha}\right)^{\varkappa}},\quad \text{wo } \varkappa=\frac{1}{1-\frac{1}{\pi}\vartheta},$$

bildet ihn unter Erhaltung von $z=0$ auf den Einheitskreis ab, und zwar so, daß dabei die Richtung der positiven reellen Achse erhalten bleibt. Der Punkt α geht dabei in

$$\left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^{\varkappa}=e^{2i\vartheta\varkappa}$$

über.

Die Entfernung des Punktes α von seinem Bildpunkt ist für $\vartheta\longrightarrow 0$ asymptotisch gleich

$$|\vartheta-2\vartheta\varkappa|\sim\vartheta,$$

d. h. der Quotient aus dieser Zahl und der Entfernung hat den Grenzwert 1 für $\vartheta\longrightarrow 0$. Wie hängt ϑ mit der oben mit ε bezeichneten Zahl zusammen? Die Höhe der abgeschnittenen Kalotte ist

$$1-\cos\vartheta=\frac{\vartheta^2}{2}-\cdots<\frac{\vartheta^2}{2},$$

so daß der Rand des abzubildenden Bereiches zwischen den beiden Kreisen vom Radius 1 und vom Radius $1-\frac{\vartheta^2}{2}$ liegt. Sein Umfang unterscheidet sich von 2π um weniger als $\pi\vartheta^2$. Setzt man also $\varepsilon=\frac{1}{2}\vartheta^2$, so sind die oben

gemachten Voraussetzungen erfüllt. Daher wird für $\varepsilon \longrightarrow 0$ die Entfernung des Punktes α von seinem Bildpunkt asymptotisch gleich

$$\sqrt{2\varepsilon}.$$

Und damit ist gezeigt, daß meine Schranke die richtige Größenordnung besitzt.

6. Unsere Abschätzung und namentlich dies einfache Beispiel lehren, wie empfindlich die Abbildungsfunktion gegenüber Änderungen des Bereiches ist. Für das Kreisinnere bekommt man insofern etwas bessere Schranken, als dann bekanntlich, und wie auch unser Beweisgang lehrt, zur gefundenen Schranke noch der Faktor r hinzutritt. Auch die bekannte schlechte Konvergenz aller Verfahren zur Praxis der konformen Abbildung deutet auf diese Empfindlichkeit hin.

7. Bei potentialtheoretischen Anwendungen, wie etwa der Lösung der ersten Randwertaufgabe mit Hilfe der Kreisabbildung und des Poissonschen Integrales, kommt noch die Empfindlichkeit der Randwerte und der Potentialfunktion gegenüber Änderungen von z in Betracht. Ändern sich also die Randwerte nicht allzu stürmisch von Ort zu Ort, so kann man auf diesem Wege doch zu recht brauchbaren Lösungen der Randwertaufgabe gelangen. Für die zweite und andere Randwertaufgaben gelten ganz ähnliche Betrachtungen.

Es ist nicht nötig, darauf des näheren einzugehen, weil durch die Untersuchung der Abbildungsfunktion alle prinzipiellen Schwierigkeiten überwunden sind.

Im allgemeinen aber werden vor dem Wege über die konforme Abbildung andere Verfahren zur Lösung der Randwertaufgaben, wie z. B. das von Trefftz (Math. Ann. 79), den Vorzug verdienen, obwohl hier explizite Fehlerschätzungen noch nicht vorzuliegen scheinen.

8. Meine Betrachtungen geben auch mittelbar Aufschluß über den Unterschied zweier Abbildungsfunktionen, die zu wenig voneinander verschiedenen beliebigen Bereichen gehören. Mittelbar insofern, als man den einen der beiden Bereiche auf einen Kreis abbilden und den anderen dieser selben Abbildung unterwerfen kann. Es würde aber von Interesse sein, auch in diesem Falle eine direkte Abschätzung zu finden. Man kann sich an Hand der Betrachtungen dieser Arbeit klarmachen, daß es dabei wesentlich auf die Kleinheit einer gewissen simultanen Bewegungsinvariante der beiden Bereiche ankommt. Doch fehlt noch die direkte, d. h. von der konformen Abbildung unabhängige Kennzeichnung derselben.

Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie.

VON I. SCHUR.

(Vorgetragen am 10. Januar 1924 [s. oben S. 1].)

Unterwirft man die n Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_n$ einer allgemeinen Form $f(a, x)$ vom Grade k den linearen homogenen Substitutionen $x = s(x')$ einer vorgelegten Gruppe $\mathfrak{G}$ und setzt $f(a, x) = f(a^s, x')$, so wird man auf das Studium der zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Invarianten $J(a)$ der Form geführt. Es sind das diejenigen ganzen rationalen homogenen Funktionen den $N = \binom{n+k-1}{k}$ Koeffizienten a von $f(a, x)$, für die $J(a^s)$ sich von $J(a)$ nur um einen konstanten Faktor unterscheidet, sobald s in $\mathfrak{G}$ enthalten ist. Um nun die Endlichkeit des Systems der Invarianten $J(a)$ nachzuweisen, braucht man, wie Hr. HILBERT[1] gezeigt hat, nur einen Prozeß zur Erzeugung von Invarianten zu kennen, der gewissen Bedingungen zu genügen hat (vgl. § 2). Für den Fall der projektiven Gruppe $\mathfrak{G}$ (projektive Invarianten) verwendet Hr. HILBERT den Ω-Prozeß; auch andere Differentiationsprozesse führen zum Ziele (HILBERT, STORY). Eine andere weiterführende Methode verdankt man A. HURWITZ[2], der für allgemeine Klassen von Gruppen $\mathfrak{G}$ einen Integrationsprozeß benutzt, der dasselbe leistet wie das einfache Summationsverfahren im Falle einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$. Relativ einfach gestaltet sich die Rechnung für die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}$ der reellen orthogonalen Substitutionen von der Determinante 1 (Orthogonalinvarianten). Die Schwierigkeiten, die bei dieser Methode der Fall der projektiven Invarianten darzubieten scheint, überwindet HURWITZ in scharfsinniger Weise durch Heranziehen der Gruppe $\mathfrak{U}$ der Substitutionen, die man gegenwärtig als *unitär* bezeichnet. Um seinen Integrationskalkül aufzubauen, sieht sich HURWITZ aber genötigt, eine Parameterdarstellung für die Gruppe $\mathfrak{U}$ einzuführen, was umständliche Rechnungen erfordert.

Im folgenden zeige ich, daß man diese Rechnungen vermeiden kann, indem man den HURWITZschen Integrationsprozeß zur Erzeugung der projektiven Invarianten durch einen wesentlich einfacheren ersetzt, bei dem nur über die Einheitskugel in einem gewissen mehrdimensionalen Raum integriert zu werden

---

[1] *Über die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Ann. Bd. 36, S. 473.

[2] *Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration*, Göttinger Nachrichten 1897, S 71. — Diese Arbeit wird im folgenden kurz mit E. zitiert werden.

braucht. Auch der von Hurwitz (E., S. 86) für binäre Formen $f(a, x)$ rechnerisch durchgeführte, im allgemeinen Falle nur angedeutete Beweis für die bemerkenswerte Tatsache, daß sein Verfahren zur Erzeugung projektiver Invarianten im wesentlichen dasselbe Resultat liefert wie der Ω-Prozeß, wird hier erheblich vereinfacht.

Im Falle der Orthogonalinvarianten scheint der Hurwitzsche Integrationsprozeß keine ähnliche Umgestaltung zuzulassen. Ich zeige aber, daß gerade in diesem Falle der von Hurwitz entwickelte Kalkül noch andere wichtige Anwendungen gestattet. Insbesondere liefert er eine elegante Lösung des »Abzählungsproblems«, nämlich der Aufgabe, die genaue Anzahl der zu $f(a, x)$ gehörenden linear unabhängigen Orthogonalinvarianten von vorgegebenem Grade r zu bestimmen[1]. Man gelangt zu dieser Lösung auf dem im Falle einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ von Molien[2] eingeschlagenen Wege, indem man das an und für sich wichtige Studium der mit der »Drehungsgruppe« $\mathfrak{D}$ homomorphen Gruppen linearer homogener Substitutionen weiterverfolgt und eine Theorie entwickelt, die weitgehende Analogien mit der schönen Frobeniusschen Theorie der Gruppencharaktere aufweist.

Erster Teil. Projektive Invarianten.

§ 1. Ein Hilfssatz über unitäre Substitutionen.

Unter einer *unitären* Substitution verstehe ich hier eine Substitution

$$(s) \qquad x_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} s_{\varkappa\lambda} x'_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

von der Determinante 1, die die Hermitesche Einheitsform

$$E(x) = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \cdots + x_n \bar{x}_n$$

ungeändert läßt. Multipliziert man alle Koeffizienten $s_{\varkappa\lambda}$ einer unitären Substitution mit einem von Null verschiedenen Faktor, so soll die so entstehende neue Substitution *semiunitär* heißen.

Hilfssatz. *Ist $F(z_{\varkappa\lambda})$ eine ganze rationale homogene Funktion der n^2 Variabeln $z_{\varkappa\lambda}$, und weiß man, daß $F(z_{\varkappa\lambda})$ gleich Null wird, wenn die Variabeln $z_{\varkappa\lambda}$ durch die Koeffizienten $s_{\varkappa\lambda}$ einer beliebigen unitären Substitution s ersetzt werden, so muß $F(z_{\varkappa\lambda})$ identisch verschwinden.*

Wegen der Homogenität von F wird offenbar auch für jede semiunitäre Substitution $s = (s_{\varkappa\lambda})$ die Gleichung $F(s_{\varkappa\lambda}) = 0$ gelten müssen. Eine solche Substitution erhält man insbesondere, indem man, wenn μ und ν $(\mu < \nu)$ zwei feste Indizes und a_1, a_2, a_3, a_4 vier reelle Größen mit nicht verschwindender Quadratsumme bedeuten,

---

[1] Für die projektiven Invarianten haben diese Aufgabe im binären Falle schon Cayley und Sylvester, für $n > 2$ Deruyts behandelt (vgl. Enc. der math. Wiss. I B. 2, S. 353—356). Eine allgemeine Methode zur Lösung derartiger Abzählungsaufgaben im projektiven Falle werde ich in einer später erscheinenden Arbeit entwickeln.

[2] *Über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1897, S. 1152.

$$(1)\qquad \begin{cases} x_\mu = (a_1 + a_2 i)\, x'_\mu + (a_3 + i a_4)\, x'_\nu \\ x_\nu = (-a_3 + a_4 i)\, x'_\mu + (a_1 - i a_2)\, x'_\nu \\ x_\varkappa = \pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}\cdot x'_\varkappa \end{cases} \qquad (\varkappa \neq \mu, \nu)$$

setzt. Bezeichnet man eine solche Substitution mit $T_{\mu\nu}(a)$, so ist auch jedes Produkt

$$(2)\qquad s = T_{\mu\nu}(a)\; T_{\mu_1\nu_1}(b)\; T_{\mu_2\nu_2}(c)\cdots$$

von endlich vielen derartigen Substitutionen semiunitär. Für die Koeffizienten $s_{\varkappa\lambda}$ einer solchen Substitution s erhält F aber die Form

$$(3)\qquad F = G + H_1 A + H_2 B + \cdots + K_1 A B + \cdots,$$

wobei

$$A = \pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2},\quad B = \pm\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2},\ \cdots$$

zu setzen ist, und die Ausdrücke

$$(4)\qquad G,\ H_1,\ H_2,\ \cdots,\ K_1,\ \cdots$$

ganze rationale Funktionen der Größen $a_\varrho, b_\varrho, \cdots$ bedeuten. Da der Ausdruck (3) bei beliebiger Wahl der Vorzeichen der Quadratwurzeln $A, B, \cdots$ verschwinden soll, so müssen die Ausdrücke (4) einzeln Null sein. Diese ganzen rationalen Funktionen verschwinden also für beliebige reelle Größen $a_\varrho, b_\varrho, \cdots$ mit den Nebenbedingungen $A^2 > 0$, $B^2 > 0, \cdots$. Hieraus folgt aber, daß sie identisch Null sind.

Daher wird auch für beliebige komplexe Größen $a_\varrho, b_\varrho, \cdots$ der Ausdruck $F(z_{\varkappa\lambda})$ verschwinden, sobald die $z_{\varkappa\lambda}$ durch die Koeffizienten $s_{\varkappa\lambda}$ einer Substitution der Form (2) ersetzt werden. Mit Hilfe komplexer a_ϱ läßt sich aber jede Substitution

$$(5)\qquad x_\mu = \alpha x'_\mu + \beta x'_\nu,\quad x_\nu = \gamma x'_\mu + \delta x'_\nu,\quad x_\varkappa = x'_\varkappa \qquad (\varkappa \neq \mu, \nu)$$

von der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ auf die Form (1) bringen. Ferner kann man bekanntlich jede Substitution von der Determinante 1 als Produkt von Substitutionen der Form (5) darstellen. Dies zeigt, daß unser Ausdruck $F(z_{\varkappa\lambda})$ für die Koeffizienten $s_{\varkappa\lambda}$ jeder Substitution von der Determinante 1 den Wert Null erhalten muß. Da F homogen sein soll, folgt hieraus unmittelbar, daß alle Koeffizienten von F gleich Null sein müssen.

§ 2. Der Integrationsprozeß zur Erzeugung projektiver Invarianten.

In der Einleitung war nur von den Invarianten $J(a)$ einer Form $f(a, x)$ die Rede. Es empfiehlt sich jedoch, die Untersuchung auf breiterer Basis durchzuführen.

Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe linearer homogener Substitutionen in den n Veränderlichen x_ν[1], so sprechen wir von einem *Homomorphismus* $H(s)$ von $\mathfrak{G}$, wenn auf Grund irgendeiner Vorschrift jeder Substitution $s = (s_{\varkappa\lambda})$ von $\mathfrak{G}$ eine Substitution $H(s)$

[1] Wir nehmen hierbei an, $\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe im eigentlichen Sinne, d. h. alle Substitutionen s von $\mathfrak{G}$ seien von nicht verschwindender Determinante und $\mathfrak{G}$ enthalte neben s auch die inverse Substitution s^{-1}.

$$a_\varrho^s = \sum_{\sigma=1}^{N} c_{\varrho\sigma}^s a_\sigma \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, N)$$

in N neuen Veränderlichen a_ϱ zugeordnet wird, so daß für je zwei Elemente s und t von $\mathfrak{G}$

$$H(s)\,H(t) = H(st)$$

wird. Außerdem wird verlangt, daß die Determinanten $|c_{\varrho\sigma}^s|$ von Null verschieden sein sollen. Es folgt dann von selbst, daß die identische Substitution e von $\mathfrak{G}$ in die identische Substitution $H(e) = E$ übergeht, und daß $H(s^{-1})$ die Inverse von $H(s)$ ist. Die voneinander verschiedenen unter den Substitutionen $H(s)$ bilden eine mit $\mathfrak{G}$ *homomorphe* Gruppe $\mathfrak{H}$. Der Homomorphismus soll insbesondere *homogen vom Grade* k heißen, wenn die N^2 Koeffizienten $c_{\varrho\sigma}^s$ als ganze rationale Funktionen k-ten Grades der n^2 Größen $s_{\varkappa\lambda}$ gegeben sind.

Unter einer zum Homomorphismus $H(s)$ gehörenden Invariante $J(a)$ verstehen wir eine (nicht identisch verschwindende) Form in den N Veränderlichen a_ϱ, die für jedes Element s von $\mathfrak{G}$ einer Gleichung

$$J(a^s) = \gamma(s)\,.\;J(a) \tag{6}$$

genügt. Hierbei liefern die konstanten Faktoren $\gamma(s)$ einen neuen »linearen« Homomorphismus von $\mathfrak{G}$.

Handelt es sich insbesondere um das Studium der Invarianten $J(a)$ einer Form k-ten Grades $f(a, x)$, so hat man für $H(s)$ im wesentlichen nur die Potenztransformation $P_k(s)$ zu wählen[1].

Man nehme nun an, $\mathfrak{G}$ sei die Gruppe aller linearen homogenen Substitutionen von nicht verschwindender Determinante in den x_ν, und denke sich für $H(s)$ einen beliebigen homogenen Homomorphismus vom Grade k gewählt[2]. Ist dann $J(a)$ eine zugehörige Invariante vom Grade r, so muß bekanntlich in (6)

$$\gamma(s) = |s|^{\frac{kr}{n}}$$

sein, wobei $|s|$ die Determinante der Substitution s bedeutet. Bezeichnet man also als das *Gewicht* einer Form $F(a)$ vom Grade r die Zahl

$$p = \frac{kr}{n},$$

so erkennt man zugleich, daß in unserem Fall eine zu $H(s)$ gehörende Invariante von ganzzahligem Gewicht sein muß.

Für jeden homogenen Homomorphismus $H(s)$ der projektiven Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt das System der Invarianten $J(a)$ eine endliche Basis.

Um dies nach dem Hilbertschen Verfahren zu beweisen, genügt es, auf Grund irgendeiner Vorschrift jeder Form $F(a)$ der N Veränderlichen a_ϱ, deren

---

[1] Vgl. A. Hurwitz, *Zur Invariantheorie*, Math. Ann. Bd. 45, S. 381. — Genauer ist, wenn s' die Transponierte von s bedeutet, für $H(s)$ die Transponierte von $P_k(s')$ zu wählen.

[2] Die sämtlichen Homomorphismen dieser Art habe ich in meiner Inaugural-Dissertation, *Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen*, Berlin 1901, genau bestimmt.

Gewicht eine ganze Zahl ist, eine Form $F^*(a)$ desselben Grades r zuzuordnen, so daß folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

1. Für jede Form $F(a)$ ist $F^*(a)$ entweder identisch Null oder eine zu $H(s)$ gehörende Invariante.

2. Für je zwei Formen $F_1(a)$ und $F_2(a)$ von gleichem Grade ist, wenn u_1 und u_2 Konstanten bedeuten,

$$(u_1 F_1 + u_2 F_2)^* = u_1 F_1^* + u_2 F_2^* .$$

3. Ist $F(a)$ durch die Invariante $J(a)$ teilbar, so soll auch $F^*(a)$ durch $J(a)$ teilbar sein.

4. Ist $F(a)$ selbst eine zu $H(s)$ gehörende Invariante, so soll sich $F^*(a)$ von $F(a)$ nur um einen konstanten, von Null verschiedenen Faktor unterscheiden.

Um nun eine solche Operation mit Hilfe der Integralrechnung auf möglichst einfachem Wege herzustellen, verfährt man folgendermaßen. Man setze, wenn $s = (s_{\varkappa\lambda})$ eine beliebige quadratische, n-reihige Matrix ist, $s_{\varkappa\lambda} = s'_{\varkappa\lambda} + i s''_{\varkappa\lambda}$. Für jede reelle oder komplexe Funktion der $2n^2$ reellen Variabeln $s'_{\varkappa\lambda}$ und $s''_{\varkappa\lambda}$ verstehe man unter $\int f(s)\,ds$ das Integral

$$\int\int \cdots \int f(s)\, ds'_{11} \cdots ds'_{nn}\, ds''_{11} \cdots ds''_{nn},$$

die Integration erstreckt über die Einheitskugel

$$\sum_{\varkappa,\lambda}^{1,\ldots,n} \left(s'^2_{\varkappa\lambda} + s''^2_{\varkappa\lambda}\right) \leq 1 . \tag{7}$$

Ich behaupte nun: *Sind g und h zwei beliebige nicht negative ganze Zahlen, und setzt man, wenn $F(a)$ eine Form r-ten Grades von ganzzahligem Gewichte $p = \frac{kr}{n}$ ist,*

$$F^*_{g,h}(a) = \int F(a^s)\,|s|^g\,|\bar{s}|^h\,ds,$$[1]

so genügt diese Operation den ersten drei unter den vorhin genannten Bedingungen. Ist insbesondere $h = g + p$, so ist auch die vierte Bedingung erfüllt.

Der Beweis stützt sich auf den Hilfssatz des vorigen Paragraphen. Ist nämlich t eine beliebige unitäre Substitution in den n Veränderlichen x_ν, so wird in leicht verständlichen Bezeichnungen

$$F^*_{g,h}(a^t) = \int F(a^{st})\,|s|^g\,|\bar{s}|^h\,ds . \tag{8}$$

Setzt man aber

$$st = u = (u'_{\varkappa\lambda} + i u''_{\varkappa\lambda})$$

und führt die $u'_{\varkappa\lambda}$, $u''_{\varkappa\lambda}$ als neue Integrationsvariable ein, so liefert dies nur eine reelle orthogonale Transformation der $s'_{\varkappa\lambda}$, $s''_{\varkappa\lambda}$. Das Integrationsgebiet (7) bleibt also ungeändert. Außerdem ist wegen $|t| = 1$

$$|s| = |u|, \quad |s| = |\bar{u}| .$$

Daher wird

$$F^*_{g,h}(a^t) = \int F(a^u)\,|u|^g\,|\bar{u}|^h\,du = F^*_{g,h}(a)$$

[1] Hierbei bedeutet $|\bar{s}|$ die Determinante der n^2 Größen $s'_{\varkappa\lambda} - i s''_{\varkappa\lambda}$.

oder, was dasselbe ist,

$$F^*_{g,h}(a^t) = |t|^p \cdot F^*_{g,h}(a)\,. \tag{9}$$

Da aber beide Ausdrücke in bezug auf die Koeffizienten $t_{\varkappa\lambda}$ von t homogene ganze rationale Funktionen vom Grade kr sind, so lehrt unser Hilfssatz, daß die Gleichung nicht nur für alle unitären Substitutionen t, sondern auch für jede beliebige Substitution richtig ist. Die Form r-ten Grades $F^*_{g,h}(a)$ ist also, wenn sie nicht identisch verschwindet, eine Invariante.

Die Bedingung 2. ist für unsere Operation gewiß erfüllt. Ferner genügt $F^*_{g,h}(a)$ auch der Bedingung 3. Denn ist $F(a) = G(a)J(a)$ und bedeutet q das Gewicht der Invariante $J(a)$, so wird

$$\begin{aligned} F^*_{g,h}(a) &= \int G(a^s)J(a^s)|s|^g|\bar{s}|^h\,ds \\ &= \int G(a^s)J(a)|s|^{g+q}|\bar{s}|^h\,ds = G^*_{g+q,h}(a)J(a)\,. \end{aligned}$$

Ist insbesondere $F(a)$ selbst eine Invariante vom Gewichte p, so wird

$$F^*_{g,h}(a) = F(a)\int |s|^{g+p}|\bar{s}|^h\,ds\,.$$

Will man erreichen, daß der hier auftretende konstante Faktor von Null verschieden ausfällt, so genügt es, wegen $|s||\bar{s}| \geqq 0$ nur $h = g+p$, also etwa $g = 0$, $h = p$ zu wählen.

§ 3. Beziehungen zum Ω-Prozeß.

Hr. Hilbert stellt eine Operation $F^*(a)$ her, die den vier vorhin genannten Bedingungen genügt, indem er für jede Form $F(a)$ vom ganzzahligen Gewichte p

$$F^*(a) = \Omega_s^p F(a^s) \tag{10}$$

setzt. Hierbei bedeutet Ω_s den Cayleyschen Differentiationsprozeß

$$\sum \pm \frac{\partial^n}{\partial s_{1\nu_1}\partial s_{2\nu_2}\cdots\partial s_{n\nu_n}}\,.$$

Für eine Invariante $J(a)$ vom Gewichte p wird insbesondere

$$J^*(a) = \Omega^p|s|^p \cdot J(a) = \prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{(p+\nu)!}{\nu!}\cdot J(a)\,. \tag{11}$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß unser Integralprozeß $F^*_{g,h}(a)$ für jedes Wertepaar g, h eine Invariante liefert, die sich von dem Ausdruck (10) nur um einen konstanten Faktor unterscheidet.

Sind nämlich

$$s = (s_{\varkappa\lambda})\,, \quad t = (t_{\varkappa\lambda})$$

zwei Systeme von je n^2 Variabeln, so gilt bekanntlich für jede Funktion $\Phi(s)$ der n^2 Variabeln $s_{\varkappa\lambda}$ die leicht zu beweisende Relation

$$\Omega_t\Phi(st) = |s|\cdot\Omega_{st}\Phi(st)\,,$$

also auch für jedes p

$$\Omega_t^p\Phi(st) = |s|^p\cdot\Omega_{st}^p\Phi(st)\,.$$

Aus der Formel (8), die für jede Substitution t gilt, folgt nun, da unter den Integralzeichen differentiiert werden darf,

$$\Omega_t^p F_{g,h}^*(a^t) = \int \Omega_{st}^p F(a^{st}) |s|^{g+p} |\bar{s}|^h ds .$$

Da aber $F_{g,h}^*(a)$ eine Invariante und

$$\Omega_{st}^p F(a^{st}) = \Omega_s^p F(a^s)$$

von den $s_{\varkappa\lambda}$ nicht mehr abhängt, so erhalten wir wegen (11)

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{(p+\nu)!}{\nu!} \cdot F_{g,h}^*(a) = \Omega_s^p F(a^s) \cdot \int |s|^{g+p} |\bar{s}|^h ds .$$

In genau derselben Weise erkennt man, daß der kompliziertere Integrationsprozeß von HURWITZ für jede Form $F(a)$ nur einen Ausdruck der Form const. $\Omega_s^p F(a^s)$ liefert.

Zweiter Teil. Die Homomorphismen der Drehungsgruppe und das Abzählungsproblem für Orthogonalinvarianten.

§ 4. Der HURWITZsche Integralkalkül.

Eine reelle orthogonale Substitution

$$s = (s_{\varkappa\lambda}) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

von der Determinante 1 bezeichne ich im folgenden kurz als eine *Drehung*, die von allen Drehungen in n Veränderlichen gebildete Gruppe soll die *Drehungsgruppe* $\mathfrak{D}$ heißen.

Um seinen Integralkalkül rechnerisch aufzubauen, benutzt HURWITZ die im Falle $n = 3$ schon von EULER eingeführte Parameterdarstellung. Man verstehe unter $e_\alpha(\phi)$ für $\alpha = 1, 2, \cdots, n-1$ die Drehung

$$x_\alpha = \cos\phi \cdot x'_\alpha + \sin\phi \cdot x'_{\alpha+1}, \quad x_{\alpha+1} = -\sin\phi \cdot x'_\alpha + \cos\phi \cdot x'_{\alpha+1}, \quad x_\beta = x'_\beta .$$

Mit Hilfe der $\frac{n(n-1)}{2}$ Winkelgrößen

$$\begin{array}{l} \phi_{01} \\ \phi_{02}, \ \phi_{12} \\ \phi_{03}, \ \phi_{13}, \ \phi_{23} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \phi_{0,n-1}, \ \phi_{1,n-1}, \cdots, \phi_{n-2,n-1} \end{array}$$

bilde man die Substitutionen

$$\begin{aligned} E_1 &= e_{n-1}(\phi_{01}) \\ E_2 &= e_{n-2}(\phi_{12})\, e_{n-1}(\phi_{02}) \\ E_3 &= e_{n-3}(\phi_{23})\, e_{n-2}(\phi_{13})\, e_{n-1}(\phi_{03}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_{n-1} &= e_1(\phi_{n-2,n-1})\, e_2(\phi_{n-3,n-1}) \cdots e_{n-1}(\phi_{0,n-1}) . \end{aligned}$$

Jede Drehung s läßt sich dann in der Form

$$s = E_1 E_2 \cdots E_{n-1}$$

darstellen. Will man jede Drehung nur einmal erhalten, so empfiehlt es sich, die Winkelgrößen $\phi_{\alpha\beta}$ folgenden Bedingungen zu unterwerfen:

1. Es gelten für sie die Ungleichungen

$$0 \leqq \phi_{\alpha,\alpha+1} < 2\pi\,, \quad 0 \leqq \phi_{\alpha\beta} < \pi \qquad (\beta - \alpha > 1).$$

2. Ist eine Größe $\phi_{\alpha\beta}$ gleich Null, so soll auch

$$\phi_{0\beta} = \phi_{1\beta} = \cdots = \phi_{\alpha-1,\beta} = 0$$

sein[1].

Durch diese Bedingungen wird in dem Parallelotop

$$0 \leqq \phi_{\alpha,\alpha+1} \leqq 2\pi \quad 0 \leqq \phi_{\alpha\beta} \leqq \pi \qquad (\beta - \alpha > 1) \tag{12}$$

ein gewisser Teilraum $\mathfrak{F}$ festgelegt. Jedem Punkt von $\mathfrak{F}$ entspricht eine Drehung und umgekehrt. Ordnet man jeder Drehung s eine reelle oder komplexe Zahl $f(s)$ zu, so entsteht eine in $\mathfrak{F}$ definierte Funktion $F(\phi_{\alpha\beta})$ der $\frac{n(n-1)}{2}$ reellen Variabeln $\phi_{\alpha\beta}$.

Unter dem Zeichen

$$\int f(s)\, ds \tag{13}$$

verstehen wir nun das Integral

$$\int\int \cdots \int F(\phi_{\alpha\beta}) \Big| \prod_{\gamma,\delta} (\sin \phi_{\gamma\delta})^{\gamma} \Big| \, d\phi_{01} \cdots d\phi_{n-2,n-1}, \tag{14}$$

wobei als Integrationsgebiet das Parallelotop (12) *zu wählen ist*[2].

Insbesondere wird

$$h = h_n = \int ds$$

eine wohlbestimmte positive reelle Größe, und zwar findet man

$$h_{2\nu} = \frac{\pi^{\nu^2} \cdot 2^{\nu^2+\nu-1}}{2!\,4! \cdots (2\nu-2)!}$$

$$h_{2\nu+1} = \frac{\pi^{\nu^2+\nu} \cdot 2^{\nu^2+3\nu} \cdot \nu!}{2!\,4! \cdots (2\nu)!}.$$

Was für uns vor allem von entscheidender Bedeutung ist, ist der von Hurwitz bewiesene Satz: *Ist t eine beliebige festgewählte Drehung, so wird für jede Funktion $f(s)$, sofern das Integral* (14) *überhaupt einen Sinn hat,*

---

[1] Die sich bei Hurwitz (E., S. 77) findende Behauptung, daß die Parameterdarstellung eineindeutig wird, wenn die $\phi_{\alpha\beta}$ den Ungleichungen

$$0 \leqq \phi_{0\beta} < 2\pi\,, \quad 0 \leqq \phi_{\alpha\beta} < \pi \qquad (\alpha < \beta)$$

unterworfen werden, ist nicht richtig. Man kann zwar auch bei dieser Wahl der Intervalle durch Hinzunahme weiterer Bedingungen Eineindeutigkeit erzwingen, doch ist es einfacher, die $\phi_{\alpha\beta}$ wie im Texte festzulegen.

[2] Den bei Hurwitz vor dem Integralzeichen stehenden Faktor $2^{\frac{n^2-n}{4}}$ lasse ich der Einfachheit wegen fort.

$$\int f(st)\,ds = \int f(s)\,ds\,. \tag{15}$$

Durch diese Eigenschaft ist zugleich, wie HURWITZ gezeigt hat, die Integraloperation bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

§ 5. Einige Eigenschaften der Homomorphismen der Gruppe $\mathfrak{D}$.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die zur Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ gehörenden Homomorphismen

$$H(s) = (c^s_{\rho\sigma}) \qquad (\rho, \sigma = 1, 2, \cdots, N) \tag{16}$$

zu studieren (vgl. § 2). Hierbei verlangen wir, daß die $c^s_{\rho\sigma}$ in leicht zu verstehender Bezeichnungsweise *stetige* Funktionen von s sein sollen. Die wirkliche Bestimmung aller möglichen stetigen Homomorphismen von $\mathfrak{D}$ scheint eine schwierige Aufgabe zu sein, auch unter der (für die Anwendungen vor allem wichtigen) Voraussetzung, daß die $c^s_{\varkappa\lambda}$ als ganze rationale Funktionen der n^2 Koeffizienten $s_{\varkappa\lambda}$ von s darstellbar sein sollen, weiß man sie nicht näher zu beschreiben[1]. Es wird uns aber gelingen, einige wichtige Eigenschaften dieser Homomorphismen abzuleiten.

Zwei Homomorphismen $H(s)$ und $H_1(s)$ von $\mathfrak{D}$ mit der gleichen Variabelnanzahl N heißen einander *ähnlich*, wenn sich eine von s unabhängige lineare Transformation T von nicht verschwindender Determinante angeben läßt, so daß

$$H_1(s) = T^{-1} \cdot H(s) \cdot T$$

wird.

Der Homomorphismus $H(s)$ heißt *irreduzibel*, wenn sich kein ihm ähnlicher Homomorphismus $H_1(s)$ angeben läßt, der in den üblichen Bezeichnungen die Form

$$H_1(s) = \begin{pmatrix} H_{11}(s) & 0 \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{pmatrix}$$

erhält, wobei $H_{11}(s)$ eine quadratische Matrix mit weniger als N Zeilen sein soll.

Unter der *Charakteristik* $\chi(s)$ des Homomorphismus (16) verstehe ich die Funktion

$$\chi(s) = c^s_{11} + c^s_{22} + \cdots + c^s_{NN}\,.$$

Für die Identität $s = e$ wird insbesondere

$$\chi(e) = N.$$

Es gilt nun der grundlegende Satz:

I. *Zwei Homomorphismen $H(s)$ und $H_1(s)$ der Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ sind dann und nur dann einander ähnlich, wenn ihre Charakteristiken übereinstimmen.*

Um dies zu beweisen, genügt es nach einem allgemeinen Satz über Gruppen linearer homogener Substitutionen[2] zu zeigen, daß folgender Satz besteht:

[1] Bekannt und leicht zu beweisen ist nur, daß es für $n > 2$ außer $H(s) = 1$ keinen anderen linearen Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ gibt; vgl. H. WEYL, Math. Zeitschrift Bd. 20 (1924), S. 136. [Zusatz bei der Korrektur. Es ist mir in der Zwischenzeit gelungen, alle stetigen Homomorphismen der Gruppe $\mathfrak{D}$ zu bestimmen.]

[2] G. FROBENIUS und I. SCHUR, *Über die Aquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen* (Satz IV), Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1906, S. 24.

II. *Jede mit der Drehungsgruppe* $\mathfrak{D}$ *homomorphe Substitutionsgruppe* $\mathfrak{H}$ *ist vollständig reduzibel.*

Dieser Satz ist aber gewiß richtig[1], wenn wir beweisen können:

III. *Jede mit* $\mathfrak{D}$ *homomorphe Substitutionsgruppe* $\mathfrak{H}$ *ist eine* HERMITESCHE *Gruppe, d. h. ihre Substitutionen* $H(s)$ *lassen eine (von* s *unabhängige) positive* HERMITESCHE *Form ungeändert.*

Dies ergibt sich aber ganz ähnlich wie für endliche Gruppen in folgender Weise. Ist $M(s)$ eine Matrix, deren Elemente $f_{\varrho\sigma}(s)$ für alle Drehungen s definiert sind, so verstehe man unter $\int M(s)\,ds$ die Matrix mit den Elementen $\int f_{\varrho\sigma}(s)\,ds$. Man setze nun

$$F = \int \overline{H}'(s)\,H(s)\,ds = (h_{\varrho\sigma}),$$

wobei $H'(s)$ die Transponierte der zu $H(s)$ konjugiert komplexen Matrix bedeutet. Dann wird wegen

$$H(s)\,H(t) = H(st), \qquad \overline{H}'(t)\,\overline{H}'(s) = \overline{H}'(st)$$

in Verbindung mit (15) für jede feste Drehung t

$$\overline{H}'(t)\cdot F\cdot H(t) = \int \overline{H}'(st)\,H(st)\,ds = F. \tag{17}$$

Diese Formel besagt aber, daß $H(t)$ die HERMITESCHE Form

$$\sum_{\varrho,\sigma}^{1\ldots N} h_{\varrho\sigma}\,\bar{x}_\varrho x_\sigma = \int\left(\sum_{\varrho=1}^{N}\left|c^s_{\varrho 1}x_1 + \cdots + c^s_{\varrho N}x_N\right|^2\right)ds$$

ungeändert läßt. Diese Form ist aber positiv definit, denn negativer Werte ist sie gewiß nicht fähig und der Wert Null wird wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktionen $c^s_{\varrho\sigma}$ von s nur dann angenommen, wenn für jedes s

$$c^s_{\varrho 1}x_1 + \cdots + c^s_{\varrho N}x_N = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, N)$$

wird. Für $s = e$ folgt hieraus $x_1 = \cdots = x_N = 0$.

Einen direkten Beweis für den Satz II liefert die von mir im Falle der endlichen Substitutionsgruppen angewandte Methode[2]. Auch das dort benutzte Summationsverfahren läßt sich in unserem Falle durch Integrationen ersetzen.

§ 6. Die Grundrelationen für die einfachen Charakteristiken.

Der Satz II lehrt uns, daß man nur die irreduziblen Homomorphismen der Gruppe $\mathfrak{D}$ zu kennen braucht, um alle übrigen zu beherrschen. Ferner geht aus I hervor, daß jeder Homomorphismus durch seine Charakteristik vollständig gekennzeichnet ist, sobald man zwei einander ähnliche Homomorphismen als nicht wesentlich verschieden ansieht. Unter einer *einfachen* Charakteristik $\chi(s)$ verstehen wir die eines irreduziblen Homomorphismus $H(s)$; die

[1] Vgl. H. MASCHKE, *Beweis des Satzes usw.*, Math. Ann. Bd. 52, S. 363.

[2] Vgl. meine Arbeit *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere* (§ 3), Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1905, S. 406. — Diese Arbeit wird im folgenden kurz mit B. zitiert werden.

zugehörige Variabelnanzahl $N = \chi(e)$ hieße der *Grad* der Charakteristik. Es gilt nun der wichtige Satz:

IV. *Ist $\chi(s)$ eine zur Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ gehörende einfache Charakteristik vom Grade N, so besteht für jede Drehung t die Formel*

$$\int \chi(ts^{-1})\chi(s)\,ds = \frac{h}{N}\chi(t). \qquad \left(h = \int ds\right) \tag{18}$$

Speziell wird für $t = e$

$$\int \chi(s^{-1})\chi(s)\,ds = h. \tag{19}$$

Sind ferner $\chi(s)$ und $\chi_1(s)$ zwei voneinander verschiedene einfache Charakteristiken, so wird

$$\int \chi(ts^{-1})\chi_1(s)\,ds = 0, \tag{20}$$

also speziell

$$\int \chi(s^{-1})\chi_1(s)\,ds = 0. \tag{21}$$

Diese Formeln bilden ein genaues Analogon zu den bekannten Grundformeln für die FROBENIUSschen Gruppencharaktere[1]. Der Beweis ergibt sich ohne Mühe nach der von mir angegebenen Methode (B., § 2). Sei nämlich $H(s) = (c^s_{\rho\sigma})$ ein irreduzibler Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ mit der Charakteristik $\chi(s)$. Ist $U = (u_{\rho\sigma})$ eine beliebige quadratische Matrix mit N Zeilen, so setze man

$$V = \int H^{-1}(s) \cdot U \cdot H(s)\,ds.$$

Dann wird wegen (15) für jede Drehung t

$$H^{-1}(t) \cdot V \cdot H(t) = \int H^{-1}(ts) \cdot U \cdot H(st)\,ds = V.$$

Also ist V für jedes t mit $H(t)$ vertauschbar und muß daher, wie aus der Irreduzibilität von $H(t)$ folgt, die Form

$$V = \left(\sum_{\xi,\eta}^{1,\ldots,N} a_{\xi\eta} u_{\xi\eta}\right) E$$

haben, wobei $E = (e_{\rho\sigma})$ die Einheitsmatrix bedeutet. Dies liefert

$$\int c^{s^{-1}}_{\rho\xi} c^s_{\eta\sigma}\,ds = a_{\xi\eta} e_{\rho\sigma}.$$

Setzt man hierin $\sigma = \rho$ und addiert über alle ρ, so ergibt sich wegen $H(s^{-1})\,H(s) = E$

$$\int e_{\eta\xi}\,ds = N a_{\xi\eta}.$$

Folglich ist

$$\int c^{s^{-1}}_{\rho\xi} c^s_{\eta\sigma}\,ds = \frac{h}{N} e_{\rho\sigma} e_{\eta\xi}. \qquad (\rho, \sigma, \xi, \eta = 1, 2, \ldots, N) \tag{}$$

[1] Die Zahl $h = \int ds$ läßt sich nach HURWITZ deuten als der Inhalt desjenigen Gebildes im Raume der n^2 Koordinaten $s_{\varkappa\lambda}$, dessen Punkte alle Drehungen $(s_{\varkappa\lambda})$ liefern. In unseren Formeln spielt h dieselbe Rolle wie die Ordnung der zu untersuchenden endlichen Gruppe im FROBENIUSschen Falle.

Multipliziert man mit $c^t_{\tau\varrho}$ und addiert über alle ρ, so erhält man

$$\int c^{ts^{-1}}_{\tau\xi} c^s_{\eta\sigma}\, ds = \frac{h}{N} c^t_{\tau\sigma} e_{\eta\xi}.$$

Für $\xi = \tau$, $\eta = \sigma$ folgt hieraus durch Addition die Formel (18).

Sind ferner

$$H(s) = (c^s_{\varrho\sigma}), \quad H_1(s) = (k^s_{\mu\nu}) \qquad \begin{pmatrix}\rho, \sigma = 1, 2, \cdots, N\\ \mu, \nu = 1, 2, \cdots, N_1\end{pmatrix}$$

zwei einander nicht ähnliche irreduzible Homomorphismen von $\mathfrak{D}$ mit den Charakteristiken $\chi(s)$ und $\chi_1(s)$, so liefert die in B. § 2 angewandte Methode für jede Drehung t die Formel

$$\int c^{ts^{-1}}_{\varrho\sigma} k^s_{\mu\nu}\, ds = 0,$$

aus der sich unmittelbar die Formel (20) ergibt.

Zu beachten ist noch, daß *die Zahl $\chi(s^{-1})$ für jede Charakteristik nichts anderes ist als die zu $\chi(s)$ konjugiert komplexe Größe*[1]. Denn ist wieder $H(s)$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ mit der Charakteristik $\chi(s)$, und bedeutet F eine positive Hermitesche Form, die bei allen Transformationen $H(s)$ ungeändert bleibt, so folgt aus der Formel (17)

$$F^{-1}\overline{H}'(s)F = H^{-1}(s) = H(s^{-1}).$$

Daher besitzen $\overline{H}'(s)$ und $H(s^{-1})$ dieselbe Spur. Das liefert $\overline{\chi}(s) = \chi(s^{-1})$.

Die Formeln (19) und (21) lassen sich demnach auch in der Form

$$\int |\chi(s)|^2 ds = h, \quad \int \chi(s)\,\overline{\chi}_1(s)\, ds = 0$$

schreiben. Unter Zugrundelegung des Hurwitzschen Integralkalküls bilden also *die sämtlichen zur Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ gehörenden einfachen Charakteristiken nach Multiplikation mit dem konstanten Faktor $h^{-\frac{1}{2}}$ ein System von normierten unitär orthogonalen Funktionen der variablen Drehung s.*

§ 7. Das Abzählungsproblem für Orthogonalinvarianten.

Es sei nun

$$(H(s)) \qquad a'_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{N} c^s_{\varrho\sigma} a_\sigma \qquad (\rho = 1, 2, \cdots, N)$$

ein beliebiger Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ mit der Charakteristik $\zeta(s)$. Auf Grund des Satzes II läßt sich $H(s)$ mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation in einen Homomorphismus überführen, der durch einfaches »Aneinanderreihen« irreduzibler Homomorphismen, der *irreduziblen Bestandteile* von $H(s)$, entsteht. Besitzen unter diesen

$$(22) \qquad H_1(s),\ H_2(s),\ \cdots,\ H_m(s)$$

voneinander verschiedene (einfache) Charakteristiken

[1] Die Koeffizienten $c^s_{\varrho\sigma}$ eines Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ brauchen keineswegs sämtlich reell zu sein. Auf die Realitätsfrage werde ich in einer späteren Arbeit eingehen.

$$\chi_1(s),\ \chi_2(s),\ \cdots,\ \chi_m(s),$$

so erhält $\zeta(s)$ die Form

$$\zeta(s) = \sum_{\mu=1}^{m} A_\mu \chi_\mu(s),$$

wo A_ν eine positive ganze Zahl ist, die angibt, wie oft $H_\nu(s)$ unter den irreduziblen Bestandteilen von $H(s)$ vorkommt[1]. Aus (19) und (21) folgt aber

$$A_\nu = \frac{1}{h}\int \zeta(s)\,\chi_\nu(s^{-1})\,ds.$$

Insbesondere wird

$$A = \frac{1}{h}\int \zeta(s)\,ds$$

gleich 0, wenn der lineare Homomorphismus $L(s) = 1$ unter den Homomorphismen (22) nicht vorkommt und gleich A_ν, wenn $H_\nu(s) = 1$ ist. Diese Zahl hat aber eine einfache Bedeutung: sie gibt an, wie viele unter den zu $H(s)$ gehörenden linearen (absoluten) Invarianten

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_N a_N$$

linear unabhängig sind[2].

Will man nun die zu $H(s)$ gehörenden (absoluten) Invarianten $J^{(r)}(a)$ vom Grade r untersuchen, so hat man nur auf $H(s)$ die Potenztransformation P_r anzuwenden. Es entsteht so ein neuer Homomorphismus

$$H^{(r)}(s) = P_r(H(s))$$

der Gruppe $\mathfrak{D}$. Die Anzahl $A^{(r)}$ der linear unabhängigen unter den $J^{(r)}(a)$ ist nun, wie in bekannter Weise geschlossen wird, nichts anderes als die Anzahl der zu $H^{(r)}(s)$ gehörenden linear unabhängigen linearen Invarianten (vgl. die auf S. 190 zitierte Arbeit von MOLIEN).

Dies liefert den Satz:

V. *Ist $H(s)$ ein Homomorphismus der Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$, so ist die Anzahl $A^{(r)}$ der linear unabhängigen unter den zu $H(s)$ gehörenden (absoluten) Invarianten $J(a)$ vom Grade r durch die Formel*

$$A^{(r)} = \frac{1}{h}\int \zeta^{(r)}(s)\,ds$$

gegeben, wobei $\zeta^{(r)}(s)$ die Charakteristik des Homomorphismus $P_r(H(s))$ bedeutet.

Die Berechnung des Ausdrucks $\zeta^{(r)}(s)$ kann auf verschiedene Arten durchgeführt werden. Kann man die charakteristischen Wurzeln

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_N$$

der Substitution $H(s)$ bestimmen, so wird $\zeta^{(r)}(s)$ nichts anderes als Koeffizient von z^r in der Entwicklung von

[1] Zwei einander ähnliche Homomorphismen gelten hierbei als nicht verschieden.

[2] Hierbei ist zu beachten, daß für $n > 2$ zur Gruppe $\mathfrak{D}$ überhaupt keine relativen Invarianten gehören; vgl. die Fußnote auf S. 197.

$$\frac{1}{(1-z\omega_1)(1-z\omega_2)\cdots(1-z\omega_N)}$$

nach positiven Potenzen von z. Ist ferner

$$\sigma_\mu = \omega_1^\mu + \omega_2^\mu + \cdots + \omega_N^\mu ,$$

so wird dieser Koeffizient gleich

$$\sum \frac{\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\cdots\sigma_r^{\alpha_r}}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\ 2^{\alpha_2}\alpha_2!\cdots r^{\alpha_r}\alpha_r!} ,$$

die Summe erstreckt über alle Lösungen der Gleichung

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + r\alpha_r = r$$

in nicht negativen ganzen Zahlen α_ν. Nun ist aber bekanntlich σ_μ gleich der Spur von

$$[H(s)]^\mu = H(s^\mu) ,$$

d. h. es ist $\sigma_\mu = \zeta(s^\mu)$. Dies liefert die explizite Formel

$$(23) \qquad A^{(r)} = \frac{1}{h}\sum \frac{1}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\ 2^{\alpha_2}\alpha_2!\cdots r^{\alpha_r}\alpha_r!}\int \zeta^{\alpha_1}(s)\,\zeta^{\alpha_2}(s^2)\cdots\zeta^{\alpha_r}(s^r)\,ds .$$

Auch für simultane Orthogonalinvarianten und Kovarianten mit vorgegebenen Graden $r, r', \cdots$ in den einzelnen Koeffizienten- bzw. Variabelnreihen lassen sich ähnliche Formeln angeben.

Bei allen Aufgaben, auf die man in der algebraischen Invariantentheorie geführt wird, hat man nur Homomorphismen $H(s)$ zu benutzen, deren Koeffizienten $c_{\varrho\sigma}^s$ als ganze rationale Funktionen der n^2 Koeffizienten $s_{\varkappa\lambda}$ von s gegeben sind. Außerdem ist in allen Fällen $\zeta(s)$ eine symmetrische Funktion[1] der charakteristischen Wurzeln

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$$

der Substitution s, also eine ganze rationale Funktion der Koeffizienten der Gleichung

$$|xe - s| = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n c_n = 0 .$$

Hierbei ist noch zu beachten, daß diese Gleichung für eine Drehung s den Bedingungen $c_n = 1$, $c_\lambda = c_{n-\lambda}$ genügt. Ist also $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$, so wird $\zeta(s)$ und ebenso auch $\zeta(s^\mu)$ eine wohlbestimmte ganze rationale Funktion von $c_1, c_2, \cdots, c_\nu$.

Drückt man die c_λ durch die $\frac{n(n-1)}{2}$ Parameter $\phi_{\alpha\beta}$ aus (vgl. § 4), so erhalten die in der Formel (23) auftretenden Integrale die Gestalt

$$\int\int\cdots\int R(\cos\phi_{\alpha\beta}, \sin\phi_{\alpha\beta})\left|\prod_\gamma (\sin\phi_{\gamma\delta})^\gamma\right| d\phi_{01}\,d\phi_{02}\cdots d\phi_{n-2,n-1} ,$$

wobei R eine ganze rationale Funktion bedeutet. Da wir über das Gebiet

$$0 \leqq \phi_{\alpha,\alpha+1} \leqq 2\pi , \quad 0 \leqq \phi_{\alpha\beta} \leqq \pi \qquad (\beta - \alpha > 1)$$

[1] Vgl. meine auf S. 192 zitierte Inaugural-Dissertation.

zu integrieren haben, lassen sich diese Integrale in *geschlossener* Form berechnen, indem man sich der leicht anzugebenden Werte der Integrale

$$\int_0^{a\pi} \sin^k\phi \cos^l\phi \,|\sin^m\phi|\, d\phi \qquad (a = 1, 2, \quad k, l, m = 0, 1, 2, \cdots)$$

bedient. *Die Formel* (23) *liefert also eine praktisch durchaus brauchbare Methode zur Berechnung der ganzen Zahl* $A^{(r)}$.

Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, indem man die Potenzsummen

$$\tau_\mu = \gamma_1^\mu + \gamma_2^\mu + \cdots + \gamma_n^\mu$$

einführt. Ist für ein passend gewähltes m der Ausdruck

$$\zeta(s) = g(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_m)$$

bekannt, so wird

$$\zeta(s^\mu) = g(\tau_\mu, \tau_{2\mu}, \cdots, \tau_{m\mu}).$$

Hierbei ist g als eine wohlbestimmte ganze rationale Funktion anzusehen. Um nun die Zahl $A^{(r)}$ zu berechnen, hat man nur die Werte der Ausdrücke

$$(24) \qquad \frac{1}{h}\int \tau_1^{\nu_1}\tau_2^{\nu_2}\cdots\tau_q^{\nu_q} ds = J_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_q} \qquad (\nu_\varkappa = 0, 1, 2, \cdots)$$

zu kennen.

Handelt es sich z. B. um die Orthogonalinvarianten $J(a)$ einer Form k-ten Grades $f(a, x)$, so hat man $H(s) = P_k(s)$ zu wählen; es wird dann

$$(25) \qquad \zeta(s) = \sum \frac{\tau_1^{\beta_1}\tau_2^{\beta_2}\cdots\tau_k^{\beta_k}}{1^{\beta_1}\beta_1!\; 2^{\beta_2}\beta_2!\cdots k^{\beta_k}\beta_k!} \qquad (\beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + k\beta_k = k).$$

Will man ferner die simultanen Invarianten $J(a_{\varkappa\lambda}^{(\mu)})$ von m Bilinearformen

$$B_\mu(x, y) = \sum_{\varkappa, \lambda}^{1\cdots n} a_{\varkappa\lambda}^{(\mu)} x_\varkappa y_\lambda \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m)$$

studieren bei gleichzeitiger Anwendung aller Drehungen s auf die beiden Variabelnreihen $x_\varkappa$ und y_λ (»kogrediente orthogonale Variabelntransformation«), so hat man einfach

$$\zeta(s) = m\tau_1^2$$

zu setzen. Unsere Zahl $A^{(r)}$ gibt dann die Anzahl der linear unabhängigen unter denjenigen Invarianten $J(a_{\varkappa\lambda}^{(\mu)})$ an, die in bezug auf alle mn^2 Koeffizienten vom Grade r sind. Beschränkt man sich auf solche Invarianten, die in bezug auf jedes der m Koeffizientensysteme $a_{\varkappa\lambda}^{(\mu)}$ vom Grade k sind, so wird die Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen durch den Ausdruck

$$A_{m,k} = \frac{1}{h}\int [\eta_k(s)]^m ds$$

bestimmt, wobei $\eta_k(s)$ die Summe bedeutet, die aus (25) hervorgeht, wenn überall die $\tau_\varkappa$ durch $\tau_\varkappa^2$ ersetzt werden. Z. B. wird

$$A_{m,1} = \frac{1}{h}\int \tau_1^{2m} ds, \qquad A_{m,2} = \frac{1}{h}\int \left[\frac{\tau_1^4 + \tau_2^2}{2}\right]^m ds.$$

§ 8. Die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

Im binären Fall lautet unsere Parameterdarstellung einfach

$$s_{11} = \cos\phi, \quad s_{12} = \sin\phi, \quad s_{21} = -\sin\phi, \quad s_{22} = \cos\phi.$$

Hier wird

$$\tau_1 = 2\cos\phi, \quad h = 2\pi.$$

Die zu berechnenden Integrale (24) haben die Form

$$J_{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_q} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (2\cos\phi)^{\nu_1}(2\cos 2\phi)^{\nu_2}\cdots(2\cos q\phi)^{\nu_q} d\phi.$$

In diesem Falle ist aber unser Abzählungsproblem ohne besonderes Interesse, denn es läßt sich ohne Mühe direkt durchführen, indem man die binäre Drehungsgruppe durch die ihr ähnliche Gruppe der Substitutionen

$$x_1 = e^{i\phi}x_1', \quad x_2 = e^{-i\phi}x_2'$$

ersetzt[1].

Auf interessantere Betrachtungen führt der ternäre Fall. Setzt man hier zur Abkürzung

$$\phi_{01} = \phi_1, \quad \phi_{02} = \phi_2, \quad \phi_{12} = \phi_3$$

und

$$\cos\phi_\lambda = \alpha_\lambda, \quad \sin\phi_\lambda = \beta_\lambda,$$

so lautet die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}
s_{11} &= \alpha_3, & s_{12} &= \alpha_2\beta_3, & s_{13} &= \beta_2\beta_3,\\
s_{21} &= -\alpha_1\beta_3, & s_{22} &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \beta_1\beta_2, & s_{23} &= \alpha_1\beta_2\alpha_3 + \beta_1\alpha_2,\\
s_{31} &= \beta_1\beta_3, & s_{32} &= -\beta_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\beta_2, & s_{33} &= \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2\alpha_3.
\end{aligned}$$

Insbesondere wird

$$\tau_1 = \sum_{\nu=1}^{3} s_{\nu\nu} = \cos\phi_3 + \cos(\phi_1+\phi_2) + \cos\phi_3\cos(\phi_1+\phi_3).$$

Die Zahl h hat hier den Wert $8\pi^2$. Die charakteristischen Wurzeln von s sind von der Form

(26) $$1, \quad e^{i\alpha}, \quad e^{-i\alpha}$$

und alle τ_μ sind ganze rationale Funktionen von

$$a = 2\cos\alpha = \tau_1 - 1 = \cos(\phi_1+\phi_2) - 1 + \cos\phi_2\left[\cos(\phi_1+\phi_2)+1\right].$$

Es genügt, die Ausdrücke

$$J_m = \frac{1}{8\pi^2}\int a^m ds \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

zu kennen. *Ich behaupte nun, daß*

(27) $$J_m = (-1)^m\binom{m}{\mu} \qquad \left(\mu = \left[\frac{m}{2}\right], \quad J_0 = 1\right)$$

wird.

[1] Vgl. E. B. Elliot, *The syzygetic theory of orthogonal binari ants.* Proceedings of the London Math. Society, Bd. 33 (1901), S. 226.

Es wird nämlich (vgl. § 4)

$$8\pi^2 J_m = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} a^m \,|\sin\phi_3|\, d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3 .$$

Nun ist aber a von der Form $P+Q\cos\phi_2$ und es ist

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} (P+Q\cos\phi)^m \,|\sin\phi|\, d\phi \\
&= \int_0^{\pi} [(P+Q\cos\phi)^m + (P-Q\cos\phi)^m] \sin\phi\, d\phi \\
&= \int_{-1}^{1} [(P+Qx)^m + (P-Qx)^m\, dx] \\
&= \frac{2}{m+1}\,\frac{(P+Q)^{m+1}-(P-Q)^{m+1}}{Q} .
\end{aligned}$$

Daher wird

$$8\pi^2(m+1)J_m = 2^{m+2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{[\cos(\phi_1+\phi_2)]^{m+1}-(-1)^{m+1}}{\cos(\phi_1+\phi_2)+1}\, d\phi_1 d\phi_2 .$$

Hieraus folgt leicht

$$2\pi(m+1)J_m = 2^m \int_0^{2\pi} \frac{\cos^{m+1}\psi-(-1)^{m+1}}{\cos\psi+1}\, d\psi .$$

Dies liefert die Rekursionsformel

$$(m+1)J_m + 2mJ_{m-1} = \frac{2^m}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^m\psi\, d\psi .$$

Schreibt man dieses Integral in der Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (e^{i\psi}+e^{-i\psi})^m d\psi ,$$

so erkennt man unmittelbar, daß es für $m = 2\mu+1$ den Wert 0, für $m = 2\mu$ den Wert $\binom{m}{\mu}$ hat. Also wird

$$(2\mu+1)J_{2\mu} + 4\mu J_{2\mu-1} = \binom{2\mu}{\mu}$$

$$(2\mu+2)J_{2\mu+1} + (4\mu+2)J_{2\mu} = 0 .$$

Hieraus ergibt sich wegen $J_0 = 1$ die Formel (27) ohne Mühe.

Diese Formel läßt noch eine interessante Folgerung zu. Setzt man

$$a_m = \tau_m - 1 = 2\cos m\alpha , \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

so wird

$$(28)\quad \begin{cases} a^{2\mu} = a_{2\mu} + \binom{2\mu}{1} a_{2\mu-2} + \cdots + \binom{2\mu}{\mu-1} a_2 + \binom{2\mu}{\mu}, \\ a^{2\mu+1} = a_{2\mu+1} + \binom{2\mu+1}{1} a_{2\mu-1} + \cdots + \binom{2\mu+1}{\mu-1} a_3 + \binom{2\mu+1}{\mu} a_1 . \end{cases}$$

Da nun

$$\frac{1}{8\pi^2}\int ds = 1\,, \quad \frac{1}{8\pi^2}\int a_1 ds = -1$$

ist, so folgt aus (27) und (28)

$$\int a_2 ds = \int a_3 ds = \cdots = 0\,.$$

Dies liefert aber die einfache Regel: *Ist im Falle* $n = 3$ *die Funktion* $f(s)$ *der variablen Drehung* s *mit Hilfe des »Drehungswinkels«* α *in die gleichmäßig konvergente Kosinusreihe*

$$f(s) = \frac{C_0}{2} + C_1 \cos\alpha + C_2 \cos 2\alpha + \cdots$$

entwickelbar, so wird

$$\frac{1}{h}\int f(s)ds = \frac{C_0 - C_1}{2}\,.$$

Auf Grund dieser Regel oder mit Hilfe der Formeln (27) lassen sich insbesondere die im vorigen Paragraphen erwähnten Abzählungsaufgaben der Invariantentheorie im ternären Fall rechnerisch vollständig durchführen. Für die dort eingeführten Zahlen $A_{m,k}$ erhält man z. B. im ternären Fall[1]

$$A_{11} = 1\,, \quad A_{2,1} = 3\,, \quad A_{3,1} = 15\,, \quad A_{4,1} = 91$$
$$A_{1,2} = 3\,, \quad A_{2,2} = 31\,, \quad A_{3,2} = 665\,, \quad A_{4,2} = 19203\,.$$

§ 9. Beliebige orthogonale Transformationen.

Zum Schluß will ich noch einige Bemerkungen über die Gruppe $\mathfrak{D}'$ aller reellen orthogonalen Substitutionen in n Veränderlichen hinzufügen. Diese Gruppe enthält die bis jetzt behandelte Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ als Untergruppe vom Index 2. Ist

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1\,,$$

so gehört ein Element t von $\mathfrak{D}'$ zu $\mathfrak{D}$ oder zu $\mathfrak{D}_1$, je nachdem die Determinante

$$\delta(t) = |t|$$

den Wert 1 oder -1 hat. Wir sprechen auch wie üblich von den eigentlichen und uneigentlichen reellen orthogonalen Transformationen. Im folgenden soll s stets ein Element von $\mathfrak{D}$ und u ein Element von $\mathfrak{D}_1$ bezeichnen.

Bedeutet nun $f(t)$ eine für alle Elemente t von $\mathfrak{D}'$ definierte Funktion, so ist es leicht, eine Integraloperation $\oint f(t)\,dt$ zu charakterisieren, die in Analogie zu der Grundeigenschaft (15) der Operation $\int f(s)\,ds$ der Bedingung genügt: Für jedes fest gewählte Element v von $\mathfrak{D}'$ wird

$$\oint f(tv)dt = \oint f(t)dt\,. \tag{29}$$

[1] Mit den Orthogonalinvarianten, die zu einem System von ternären Bilinearformen gehören, hat sich Hr. Study eingehend beschäftigt; vgl. E. Study, *Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung* (§ 22), Braunschweig 1923.

Es genügt nämlich, wenn u_0 eine beliebige uneigentliche reelle orthogonale Transformation bedeutet,

$$\oint f(t)dt = \int f(s)ds + \int f(su_0)ds \tag{30}$$

zu setzen. In der Tat: Für jedes v wird dann

$$\oint f(tv)dt = \int f(sv)ds + \int f(su_0v)ds\,.$$

Ist nun v in $\mathfrak{D}$ enthalten, so wird wegen (15)

$$\int f(sv)ds = \int f(s)ds$$

und, weil $u_0vu_0^{-1}$ wieder eine eigentliche Transformation ist,

$$\int f(su_0v)ds = \int f(su_0vu_0^{-1}\cdot u_0)ds = \int f(su_0)ds\,.$$

Ist aber v von der Determinante -1, so sind vu_0^{-1} und u_0v in $\mathfrak{D}$ enthalten, folglich ist

$$\int f(sv)ds = \int f(svu_0^{-1}u_0)ds = \int f(su_0)ds$$
$$\int f(su_0v)ds = \int f(s)ds\,.$$

In beiden Fällen gilt also die Gleichung (29). Zugleich ergibt sich, daß der Ausdruck (30) von der speziellen Wahl von u_0 unabhängig ist.

Mit Hilfe dieser Integraloperation überträgt sich alles, was wir in den Paragraphen 5 und 6 über die Homomorphismen der Gruppe $\mathfrak{D}$ ausgesagt haben, auf die Gruppe $\mathfrak{D}'$. In den Formeln des § 6 hat man hierbei die Zahl $h = \int ds$ durch

$$\oint dt = 2\int ds = 2h$$

zu ersetzen. Zu beachten ist noch, daß bei der Gruppe $\mathfrak{D}'$ zu jedem Homomorphismus $H(t)$ eine *reelle* Charakteristik $\chi(t)$ gehört. Denn zunächst ist wieder, weil das Analogon zum Satz III gilt, $\chi(t^{-1})$ die zu $\chi(t)$ konjugiert komplexe Zahl $\overline{\chi}(t)$. Innerhalb der Gruppe $\mathfrak{D}'$ sind aber bekanntlich t und t^{-1} stets ähnliche Elemente; also sind auch $H(t)$ und $H(t^{-1})$ ähnliche Substitutionen, ihre Spuren $\chi(t)$ und $\chi(t^{-1})$ stimmen demnach überein. Dies liefert aber $\chi(t) = \chi(t)$.

Für die zu einem Homomorphismus $H(t)$ von $\mathfrak{D}'$ gehörenden *absoluten* Invarianten gestaltet sich nun die Behandlung des Abzählungsproblems mit Hilfe der Integraloperation (30) ganz ebenso wie für die Gruppe $\mathfrak{D}$ mit Hife der Operation $\int f(s)\,ds$. Bei der Gruppe $\mathfrak{D}'$ hat man aber noch die *schiefen* Invarianten $J(a)$ zu berücksichtigen, für die

$$J(a') = \delta(t)J(a)$$

oder deutlicher

$$J(a^s) = J(a)\,, \quad J(a^a) = -J(a)$$

wird. Das Abzählungsproblem erledigt sich hier wieder auf Grund der Regel:

Ist $\zeta(t)$ die Charakteristik des Homomorphismus $H(t)$, so sind unter den linearen homogenen schiefen Invarianten, die zu $H(t)$ gehören, genau

$$\frac{1}{2h}\oint \zeta(t)\,\delta(t)\,dt = \frac{1}{2h}\left[\int \zeta(s)\,ds - \int \zeta(su_0)\,ds\right]$$

linear unabhängig.

Hieraus folgen ähnlich wie in § 7 die entsprechenden Regeln für schiefe Invarianten höheren Grades.

Die sich so ergebende Theorie ist aber nur für ein gerades n von Interesse. Bei ungeradem n besteht die Gruppe $\mathfrak{D}'$ nur aus den Elementen s und $-s$; für alle wichtigeren Fragen der Invariantentheorie erscheint $\mathfrak{D}'$ in diesem Falle als nicht wesentlich verschieden von der Gruppe $\mathfrak{D}$.

Die von Hurwitz (E., S. 86—90) erzielten Ergebnisse gestatten, die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Theorie auf allgemeinere Gruppenklassen auszudehnen. Die Gruppen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ sind nicht allein durch die wichtige Rolle, die sie in den Anwendungen spielen, ausgezeichnet, sondern auch dadurch, daß hier der Integralkalkül eine praktisch wirklich brauchbare Lösung des Abzählungsproblems liefert.

Ausgegeben am 12. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XVI. Gesamtsitzung. 8. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

*1. Hr. Marcks sprach über Bismarck im Frühjahr und Sommer 1848.

Er suchte, in genauerer Ausnutzung und Ausdeutung des erreichbaren Materials, die Entwicklung in Bismarcks Haltung zur Revolution schärfer als bisher geschehen festzulegen und psychologisch zu bestimmen, ihr Auf und Ab, so gewaltig der ganze Bismarck auch damals aus dem 33jährigen gelegentlich herausblickt, zugleich aus den Einflüssen von Stimmung und Enttäuschung und nicht vornehmlich aus realistischer Überlegenheit zu erklären, den Tiefpunkt im April, den allmählichen Aufstieg von da ab, die lange Nachwirkung lähmender Isolierung und praktischer Ratlosigkeit kritisch herauszuarbeiten und so, bis zum Juli hin, eine Umkehr zu sich selber, ein Wachstum nachzuweisen, dessen Beobachtung ihren biographischen Wert besitzt. Die Berührung mit dem Prinzen von Preußen und dem Könige im Juni scheint Bismarck die innere Lösung gebracht zu haben; erst jetzt trat er in seine Partei wieder ein, hinter der er bis dahin, fast tatenlos, zurückgeblieben war, und wurde nunmehr wieder, lange ehe der König selber sich frei machte, zu dem Kämpfer, der er eigentlich war.

2. Hr. Planck überreichte eine Arbeit von Hrn. Prof. Dr. S. Valentiner und Hrn. Dr. M. Rössiger in Clausthal i. Harz: Über Ökonomie der Fluoreszenzstrahlung.

Es wurde das Verhältnis der emittierten Energie von Fluoreszeïnlösungen verschiedener Konzentrationen zu der bei der Fluoreszenzerregung absorbierten Energie in der Abhängigkeit von der Wellenlänge der erregenden Strahlung und von der Konzentration untersucht. Bei den Messungen wurde von der lichtelektrischen Photometrie Gebrauch gemacht. Es ergab sich, daß das genannte Verhältnis bei Erregung mit Licht von einer Wellenlänge, die größer als die des Intensitätsmaximums der Fluoreszenzstrahlung ist, einen viel kleineren Wert hat als bei Erregung mit Licht kürzerer Wellenlänge, und daß das Verhältnis mit wachsender Konzentration in dem Bereich von 10^{-7} bis 10^{-5} g/ccm auf rund das Dreifache zunimmt.

Die Akademie hat die HH. Prof. Dr. Otto von Zallinger in Salzburg, Prof. Dr. Paul Wolters in München und Prof. Dr. Franz Studniczka in Leipzig zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer philosophisch-historischen Klasse gewählt.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Eugenius Warming in Kopenhagen am 2. April durch den Tod verloren.

Die Akademie hat das ordentliche Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse Hrn. Emil Seckel am 26. April durch den Tod verloren.

Über Ökonomie der Fluoreszenzstrahlung.

Von Prof. Dr. S. Valentiner und Dr. M. Rössiger
in Clausthal i. Harz.

(Vorgelegt von Hrn. Planck.)

Die Stokessche Regel über den Zusammenhang zwischen der Wellenlänge der Fluoreszenzstrahlung und der Wellenlänge der sie erregenden Strahlung sagt aus, daß die letztere stets die kürzere sei. Diese Regel hat sich in den Fällen, in denen es sich um scharfe Fluoreszenzemissionslinien handelt (bei den Röntgenspektren), ausgezeichnet bewährt und hat durch die Quantentheorie ihre Erklärung gefunden. In den anderen Fällen, in denen man es mit Emissionsbanden zu tun hat, also z. B. bei den festen und flüssigen Substanzen mit optisch wahrnehmbarer Fluoreszenz, für die die Regel von Stokes auf Grund zahlreicher Beobachtungen ursprünglich zur qualitativen Orientierung ausgesprochen wurde, entbehrt sie der einfachen Deutung schon deshalb, weil nicht ohne tiefergehende Vorstellungen über die Vorgänge bei der Entstehung der Fluoreszenz und nicht mit zwingenden Gründen angegeben werden kann, welche Wellenlänge der emittierten Bande als langwellige Grenze der Erregung angenommen werden soll. Als solche käme in Frage die Wellenlänge, in der das Maximum der Energie emittiert wird; man könnte aber auch das langwellige Ende der Emissionsbande dafür anzusehen geneigt sein. Daß die erstere Annahme nicht den Tatsachen entspricht, haben vor langer Zeit bereits Nichols[1] und Merritt gezeigt, die z. B. fanden, daß Fluoreszeïnlösungen noch durch Strahlung der Wellenlänge $542\,\mu\mu$ zur Fluoreszenz angeregt werden, während das Maximum der Energie in einer Wellenlänge von etwa $517\,\mu\mu$ emittiert wird. Die zweite Annahme ist theoretisch schwer zu begründen und außerdem experimentell kaum exakt kontrollierbar infolge der Unmöglichkeit, genau festzustellen, wo wirklich das Emissionsspektrum aufhört. Um entscheiden zu können, ob überhaupt dem Stokesschen Gesetz auch für feste und flüssige Substanzen mit optisch wahrnehmbarer Fluoreszenz ein quantitativ bedeutsamer Inhalt innewohnt und eine einfache Deutung des Gesetzes möglich ist, wird man zunächst die Frage der Ökonomie näher zu prüfen haben, d. h. die Frage nach dem Verhältnis der emittierten Energie zu der bei der Erregung absorbierten und insonderheit die Frage, ob die Ökonomie von der Wellenlänge der erregenden Strahlung abhängt.

Das letztere Problem, die Abhängigkeit der Ökonomie von der Wellenlänge, haben vor längerer Zeit Nichols und Merritt[2] (1910) und kürzlich

[1] Nichols, Jahrb. d. Radioakt. u. El. **2**, 149. 1905.
[2] Nichols und Merritt, Phys. Rev. **31**, 376, 381. 1910.

Wawilow[1] (1922) bearbeitet, und auf diesen Untersuchungen fußend könnte man daran gehen, die Ökonomie selbst für die erregende Strahlung einer bestimmten Wellenlänge zu messen. Leider widersprechen sich aber die Resultate der genannten Forscher, indem Nichols und Merritt ein Anwachsen der Ökonomie der Fluoreszenz von Fluoreszeïn, Eosin, Resorufin mit wachsender Wellenlänge der erregenden Strahlung fanden, und Wawilow die Unabhängigkeit der Ökonomie von der Wellenlänge glaubte nachweisen zu können. Als nächstliegende Aufgabe bleibt daher auch jetzt noch die Beantwortung der Frage nach der Abhängigkeit der Ökonomie von der Wellenlänge. Wir haben diese Aufgabe an Fluoreszeïnlösungen verschiedener Konzentration in Angriff genommen und teilen im folgenden unsere Versuchsanordnung und unsere Resultate mit, denen wir infolge der Verwendung einer genaueren Methode und der Ausdehnung der Untersuchung auf erregende Strahlung längerer Wellenlänge und auf sehr verschieden hohe Konzentrationen größere Bedeutung glauben zusprechen zu dürfen, als den Resultaten unserer Vorgänger zuzukommen scheint.

1. Versuchsanordnung. Die zu untersuchende Fluoreszeïnlösung befand sich in einem Glastrog mit ebenen Glaswänden (7×7 cm^2), der in einen lichtdicht verschließbaren, innen geschwärzten Blechkasten gestellt war. In 2 unter einem Winkel von 90° aneinander stoßenden Seitenwänden dieses Blechkastens war je eine Öffnung für den Eintritt des erregenden und den Austritt des erregten Lichtes vorgesehen. Zur Erregung versuchten wir zunächst, dem Vorgang von Nichols und Merritt folgend, weißes, durch Monochromatoren zerlegtes Licht zu verwenden. Als Lichtquelle kam in diesem Fall nur der positive Krater der Kohlebogenlampe in Betracht, da die Intensität der anderen zur Verfügung stehenden Lichtquellen infolge der zweimaligen spektralen Zerlegung, die zur Sicherung der Reinheit des herausgeblendeten Spektralbereichs notwendig ist, zu gering war, besonders wenn verschiedene Konzentrationen zur Untersuchung kommen sollten. Die Unmöglichkeit aber, den Kohlebogen auf längere Zeit genügend konstant zu halten, ferner auch die Schwierigkeit, die Intensitätsverteilung des herausgeblendeten Spektralbereichs richtig in Rechnung zu setzen, veranlaßten uns, von diesem Plan abzugehen. Auch von der Benutzung von Spektrallinien mußten wir Abstand nehmen, da passende genügend intensive nicht zur Verfügung standen. Wir waren also darauf angewiesen, mit Filtern zu arbeiten, wie Wawilow es tat. Als besonders geeignet fanden wir drei mit verhältnismäßig schmalem Durchlässigkeitsbereich von Fuess. Sie wurden vor die Öffnung des Blechkastens in den Strahlengang der erregenden Lichtquelle gebracht. Als solche diente eine Wolframspirallampe, deren spektrale Intensitätsverteilung spektralphotometrisch mit der der Hefnerlampe verglichen und mit Benutzung der Angströmschen Bestimmungen in Energiemaß festgelegt wurde. Ein durch Blenden begrenztes Strahlenbündel der ziemlich ausgedehnten Lichtquelle drang in den Trog und die Flüssigkeit ein, durch die Fluoreszenzerregung in der Flüssigkeit beobachtbar und von gut definiertem Querschnitt. Die Intensität der Fluoreszenzstrahlung wurde in einer Richtung senkrecht zum erregenden Bündel mit

[1] Vavilov (Wawilow), Phil. Mag. **43**, 307. 1922.

Hilfe einer Kaliumzelle mit Argonfüllung gemessen. Zu dem Zweck wurde ein herausgeblendetes Volumenstück des fluoreszierenden Bündels mittels zweier Linsen auf der Belegung der Kaliumzelle abgebildet, die an den negativen Pol einer andererseits geerdeten Hochspannungsakkumulatorenbatterie angelegt war. Der durch die Belichtung ausgelöste lichtelektrische Elektronenstrom von der Belegung zum Platinring der Zelle wurde einer Elektronenröhre zur Verstärkung in der von Rosenberg[1] angegebenen Weise zugeführt und mit Kompensation und Spiegelgalvanometer gemessen. Die außerordentlich große Empfindlichkeit der Anordnung ermöglichte es, noch bei sehr geringen Konzentrationen (bis 10^{-7} g/ccm) zu messen und so auch die Abhängigkeit der Ökonomie von der Konzentration zu bestimmen.

2. Berechnung. Die Abhängigkeit der Ökonomie von der Wellenlänge der erregenden Strahlung zu bestimmen, läuft darauf hinaus, einerseits die von einem Volumenelement (oder ausgedehnten Volumenstück) absorbierte Strahlung verschiedener Wellenlänge, anderseits die von dem gleichen Volumen bei der Absorption in eine bestimmte Richtung emittierte Fluoreszenzenergie in beliebig gewählten Einheiten zu messen. Der erste Teil der Aufgabe bedeutet, wie leicht zu sehen, die Berechnung des Integrals

$$A = \int H \cdot D \cdot (e^{-hd_1} - e^{-hd_2})\, d\lambda$$

bis auf einen von den Maßeinheiten und geometrischen Größen abhängenden konstanten Faktor; darin bedeutet:

$H \cdot d\lambda$ die Intensität der Lichtquelle im Wellenlängenbereich λ bis $\lambda + d\lambda$,
$D(\lambda)$ die Durchlässigkeit des Filters für die Strahlung der Wellenlänge λ,
$h(\lambda)$ den Absorptionskoeffizient der Fluoreszeïnlösung für die Wellenlänge λ,
d_1, d_2 die Entfernungen von der Eintrittsstelle des Bündels in die Flüssigkeit bis zu den Querschnitten des Bündels, die das zur Ökonomiemessung benutzte Flüssigkeitsvolumen einschließen.

Der zweite Teil der Aufgabe erfordert die Berechnung der erregten Strahlung S; und diese finden wir aus dem den lichtelektrischen Effekt der Zelle anzeigenden Galvanometerausschlag G bis auf einen konstanten, für die Berechnung der relativen Ökonomie unwesentlichen Faktor, wenn wir G dividieren durch das Integral

$$\int J \cdot \frac{1}{h} (e^{-hd'_1} - e^{-hd'_2}) \cdot E \cdot d\lambda,$$

worin bis auf einen Proportionalitätsfaktor darstellt:

$J \cdot d\lambda$ die Energie der Fluoreszenzstrahlung im Bereich λ bis $\lambda + d\lambda$,
$E(\lambda)$ die lichtelektrische Empfindlichkeit der Kaliumzelle für Strahlung der Wellenlänge λ,
d'_1, d'_2 die Entfernung der Grenzflächen des erregenden Bündels an der Stelle, die zur Ökonomiemessung benutzt wird, von der der Kaliumzelle zugewandten Trogwand.

---

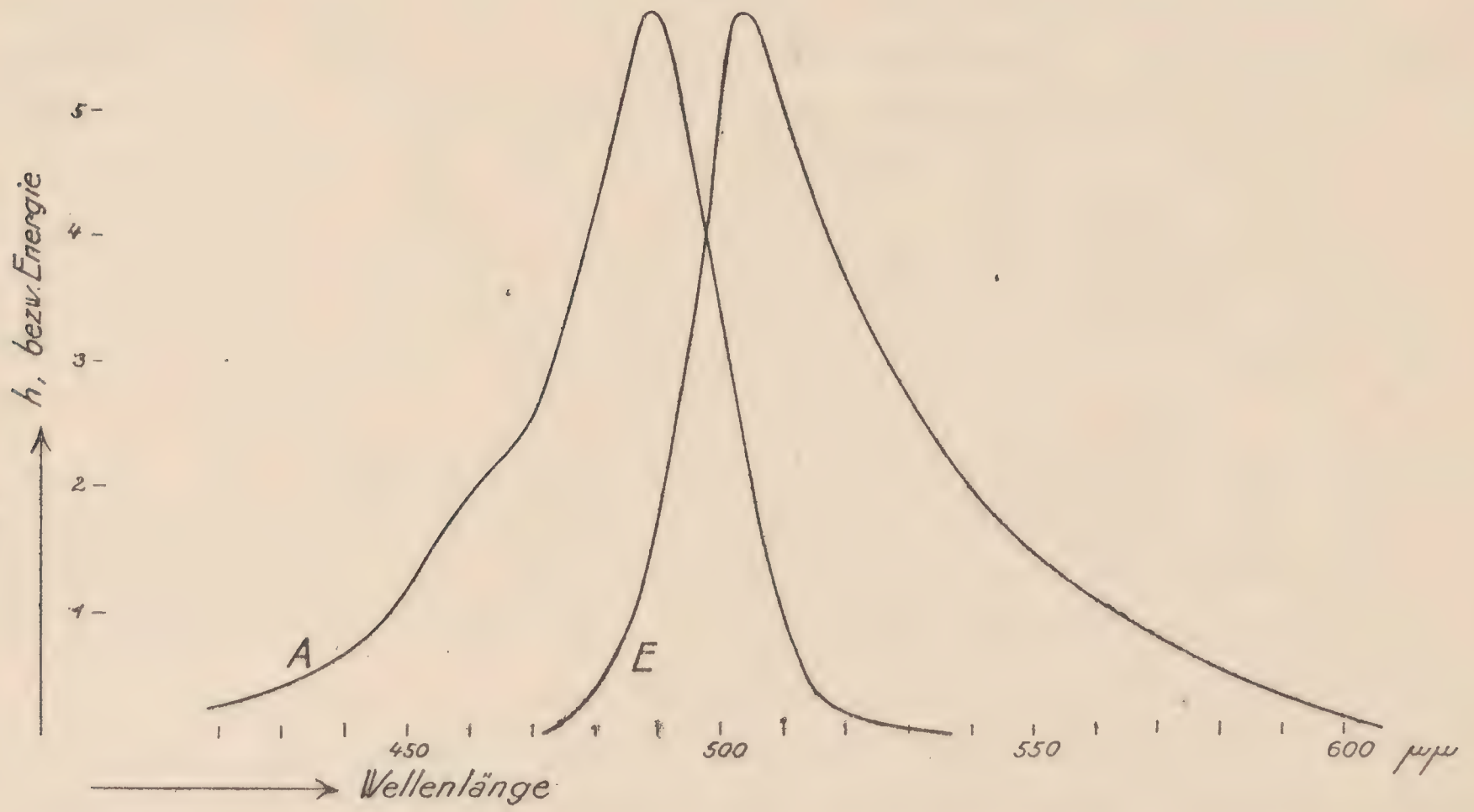
[1] Rosenberg, Die Naturw. **9**, 359. 1921.

Wir machen bei dieser Berechnung von der Voraussetzung Gebrauch, daß der lichtelektrische Effekt der Intensität der auslösenden Strahlung, multipliziert mit der Empfindlichkeit der Zelle für diese Strahlung, proportional ist. Ferner liegt der Meßmethode die Annahme zugrunde, daß die Energieverteilung der Fluoreszenzstrahlung unabhängig ist von der Wellenlänge des erregenden Lichts, eine Annahme, an deren Richtigkeit bisher bei ähnlichen Fragen nicht gezweifelt wurde, die aber außerdem von uns gesondert auf photographischem Wege geprüft und bestätigt gefunden worden ist.

Als Ökonomie ergibt sich der Quotient $S:A$, der nun von dem Wellenlängenbereich der absorbierten Strahlung und von dem Grad der Verdünnung der Lösung abhängig sein kann.

Die Berechnung der Integrale geschah graphisch und planimetrisch.

Fig. 1.



3. Einzelheiten der Messung. Nach zahlreichen orientierenden Vorversuchen an alkoholisch-wäßrigen, mit Ammoniak versetzten Fluoreszeïnlösungen[1] verschiedener Konzentration und verschiedenen Alters wurden die endgültigen Messungen mit frisch angesetzten Lösungen in drei aufeinanderfolgenden Tagen vorgenommen, da wie früher Änderungen der Helligkeit der Lösungen in kurzer Zeit beobachtet worden waren[2]. Zu Anfang und am Schluß der Beobachtungsreihe wurde zur Kontrolle das Absorptionsvermögen bestimmt und unverändert gefunden. Um einen eventuellen Vergleich des von uns benutzten Fluoreszeïnpräparates mit anderen zu ermöglichen, ist in Fig. 1 die Absorptionskurve A unserer Lösung von der Konzentration 10^{-5} g/ccm wiedergegeben, desgleichen die durch Vergleich mit der Strahlung der Hefnerlampe gewonnene Fluoreszenz-Emissionskurve E (Abszisse: Wellenlänge, Ordinate: h in cm^{-1}, bzw. Energie in willkürlicher Einheit); sie zeigen nur geringe Abweichungen von den Resultaten der früheren Beobachter.

[1] Mecklenburg und Valentiner, Phys. ZS. **15**, 267. 1914.

[2] Die vor zehn Jahren (l. c.) hergestellten und untersuchten Lösungen zeigen jetzt ein Absorptions- und Emissionsvermögen von nur noch etwa dem hundertsten Teil des anfänglichen Wertes.

Zur Charakterisierung der Durchlässigkeit der Filter sei folgendes angegeben. Filter I (violett): Durchlässigkeit > 3 Prozent im Bereich 424—468 $\mu\mu$, maximale Durchlässigkeit von 12 Prozent bei 445 $\mu\mu$; Filter II (blau): Durchlässigkeit > 3 Prozent im Bereich 465—516 $\mu\mu$, maximale Durchlässigkeit von 19 Prozent bei 486 $\mu\mu$; Filter III (grün): Durchlässigkeit > 3 Prozent im Bereich 515—558 $\mu\mu$, maximale Durchlässigkeit von 14 Prozent bei 531 $\mu\mu$.

Der Anschluß der Wolframlampenhelligkeit an die der Hefnerlampe wurde bei allen für die Ökonomiemessungen benutzten Stromstärken zu wiederholten Malen vorgenommen und durch eine Reihe besonderer Kontrollbeobachtungen sichergestellt.

Die Empfindlichkeit der Kaliumzelle in der bei den Ökonomiemessungen verwendeten Anordnung wurde mit Benutzung der Hefnerlampe bestimmt; ihre Strahlung fiel durch bekannte Filter hindurch auf ein an die Stelle des Troges gestelltes rauhes, weißes Papier, von dem diffus reflektiertes Licht in die Zelle gelangte. Auch hier führte die Verwendung von Filtern sicherer zum Ziel als spektrale Zerlegung mit Monochromatoren, in diesem Fall wegen der Schwierigkeit, die Intensität und Breite des aus dem Spektrum herausgeblendeten Spektralbereichs genau genug zu messen und mit Sicherheit falsches Licht auszuschließen. Die Benutzung von Filtern bringt allerdings eine erhebliche Rechenarbeit mit sich. Änderungen in der Empfindlichkeit der Zelle und der Verstärkeranordnung während der Versuchsreihe, die übrigens nur sehr gering waren, wurden in Rechnung gezogen.

Unvermeidliches, falsches, nicht der Fluoreszenzstrahlung angehörendes Licht wurde durch Wiederholung der Meßreihe mit destilliertem Wasser an Stelle der Fluoreszeïnlösung festgestellt und in Abzug gebracht; es betrug im ungünstigsten Fall nur wenige Prozente.

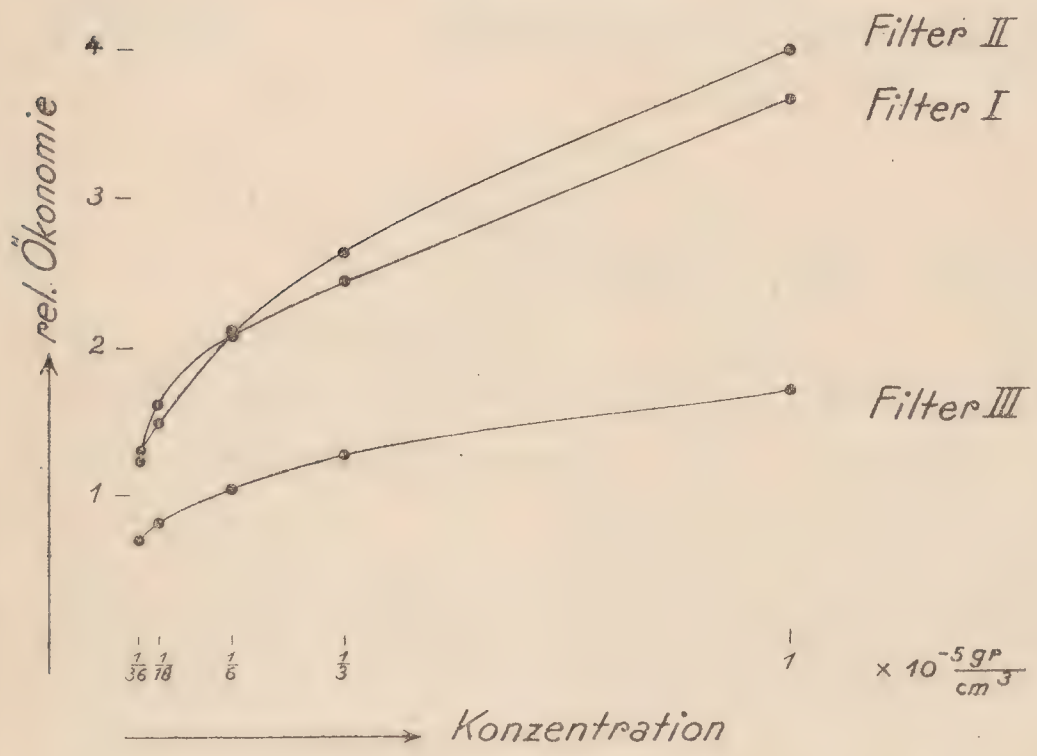
Zur Verwendung kamen die Konzentrationen 1, $^1/_3$, $^1/_6$, $^1/_{18}$, $^1/_{36}$ mal 10^{-5} g/ccm alkoholisch-wäßriger, mit Ammoniak versetzter Fluoreszeïnlösungen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Konzentration 10^{-5} g/ccm	Filter I (violett)				Filter II (blau)				Filter III (grün)			
	S/A	λ_m in $\mu\mu$	Grenzen $\mu\mu$	$S/A_{(450)}$	S/A	λ_m in $\mu\mu$	Grenzen $\mu\mu$	$S/A_{(500)}$	S/A	λ_m in $\mu\mu$	Grenzen $\mu\mu$	$\left(\frac{S}{A}\right)_{III} : \left(\frac{S}{A}\right)_{II}$
1	3.43	438	414—464	3.50	3.96	514	502—528	3.88	1.7	526	508—560	0.44
$^1/_3$	2.42	446	414—476	2.44	2.64	504	456—528	2.63	1.26	524	506—560	0.48
$^1/_6$	2.08	450	414—478	2.08	2.10	496	456—524	2.10	1.03	522	506—550	0.49
$^1/_{18}$	1.61	455	414—479	1.62	1.51	492	460—520	1.49	0.81	520	504—544	0.54
$^1/_{36}$	1.25	456	414—479	1.21	1.29	490	460—518	1.30	0.69	520	504—544	0.53

4. Resultate. In der Tabelle sind die gefundenen Werte der Ökonomie für die 3 Filter bei den 5 verschiedenen Konzentrationen eingetragen, daneben die mittleren Wellenlängen und die bei der Integration benutzten Grenzen des absorbierten Bereichs, Größen, die mit den Konzentrationen bei Filter I und II infolge der Abhängigkeit der Absorption der Lösung von der Wellenlänge ein wenig variieren. Um die mit einem Filter erhaltenen Ökonomiewerte bei verschiedenen Konzentrationen miteinander vergleichen zu können, muß man sie auf dieselbe mittlere Wellenlänge beziehen. Die Mög-

lichkeit dazu ist gegeben durch die Beobachtungen mit den beiden Filtern I und II. Die auf die Wellenlängen 450 und 500 $\mu\mu$ reduzierten Ökonomiewerte sind in Spalte 5 und 9 angegeben. In der letzten Spalte der Tabelle ist endlich das Verhältnis der Ökonomiewerte, die bei Benutzung der Filter III und II bei gleicher Konzentration gewonnen wurden, mitgeteilt. Der besseren Übersicht halber haben wir die Werte der Spalten 5, 9, 10 in Fig. 2 eingezeichnet, in der die Ökonomiewerte als Ordinaten, die Konzentrationen als Abszissen aufgetragen sind[1]. Aus dieser Darstellung ergibt sich deutlich:

Fig. 2.



1. Die Ökonomie der Fluoreszenzstrahlung hängt von der Wellenlänge der erregenden Strahlung ab; sie ist konstant oder nimmt ein wenig zu[2] mit wachsender Wellenlänge bis zu der, die ungefähr mit der des Maximums der Fluoreszenzemission zusammenfällt; bei weiter wachsender Wellenlänge sinkt sie steil ab.

2. In dem Bereich der Konzentrationen von 10^{-7} bis 10^{-5} g/ccm nimmt die Ökonomie mit wachsender Konzentration zu[3].

Hiernach ist es notwendig, bei absoluten Ökonomiemessungen auf die Konzentration und die Wellenlänge der erregenden Strahlung Rücksicht zu nehmen und Beobachtungen mit weißem erregendem Licht, wie Wawilow[4] sie kürzlich ausführte und auch von uns vor längerer Zeit unternommen waren, führen nur zu einem rohen mittleren Wert. Daß unsere Vorgänger den steilen Abfall der Ökonomie nach längeren Wellen der erregenden Strahlung zu nicht fanden, ist wohl darauf zurückzuführen, daß die von ihnen benutzten Spektralbereiche zu ausgedehnt waren, bzw. zu wenig weit in das Gebiet der längeren Wellen reichten, um den Abfall der Ökonomie bei längeren Wellen in die Erscheinung treten zu lassen.

Wenn sich die unter 1 ausgesprochene Gesetzmäßigkeit auch bei anderen fluoreszierenden Lösungen wiederfindet, was zu erwarten ist, möchten wir sie als den eigentlichen Inhalt der Stokesschen Regel ansehen[5].

---

[1] Bereits sämtliche in der Richtung verwertbare Vorversuche ergaben qualitativ dieselben Resultate.

[2] Wir glauben, die geringe Zunahme der Ökonomie mit wachsender Wellenlänge bei den hohen Konzentrationen als reell ansehen zu dürfen, da die vorhandenen Fehlerquellen dort eher eine Verkleinerung als eine Vergrößerung der Differenz bewirken.

[3] Infolge der schwierigen Empfindlichkeitsbestimmung der Kaliumzelle ist der Anstieg mit einer größeren Unsicherheit behaftet. Die Abhängigkeit der Ökonomie von der Wellenlänge wird dadurch nicht beeinflußt.

[4] Wawilow, ZS. f. Phys. **22**, 266. 1924.

[5] Weitere Einzelheiten dieser Untersuchung sowie die Ausdehnung auf andere fluoreszierende Lösungen sollen an anderer Stelle mitgeteilt werden.

Ausgegeben am 12. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XVII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 15. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

Hr. Rubner sprach: Über die Bildung der Körpermasse im Tierreich und die Beziehung zwischen Masse und Energieverbrauch.

Die Untersuchungen über Wachstum, Massenbildung und Energieverbrauch sind auf die Kaltblüter ausgedehnt worden, wobei auch der Stoffwechsel eingehende Berücksichtigung fand. Die Grundzüge des Wachstumsstoffwechsels sind überall dieselben. Der Energieverbrauch hängt nur bei dem Warmblüter kausal mit der Oberfläche zusammen, nicht aber bei den Kaltblütern. Mit jeder Massenverdopplung findet aber eine Verminderung des relativen Energieverbrauchs statt. Der Anfang jeder Entwicklung beginnt mit einem maximalen relativen Energieverbrauch, der im Lauf der Entwicklung mit Erreichung des Endes des Wachstums auf den elterlichen Energieverbrauch zurückgeführt wird.

Über die Bildung der Körpermasse im Tierreich und die Beziehung der Masse zum Energieverbrauch.

Von Max Rubner.

Die Grundzüge der Wachstumsvorgänge.

Im verflossenen Jahre habe ich über Untersuchungen berichtet, welche die Regulation zwischen Betriebsstoffwechsel und Wachstumsgewinn zum Beginn der Entwicklung bis zum Schluß der eigentlichen Wachstumsperiode geschildert hatten. Das Wachstum setzt mit einem großen Wassergehalt der Zellen ein, dieser verringert sich und erreicht mit Vollendung des Wachstums bei allen Säugern und Wirbeltieren überhaupt etwa denselben Grad der Trockenheit der Gewebe.

Der im Laufe der Entwicklung verschiedene Grad kolloidaler Quellung der Zellen hat keinen Einfluß auf den Betriebsstoffwechsel, d. h. den Nahrungsverbrauch, der bei ruhendem Wachstum, z. B. etwa bei Hunger, beobachtet wird. Bei den Hefezellen kann man zeigen, daß sie eine künstlich herbeigeführte plasmolytische Minderung ihres Wassergehaltes ohne jede Änderung des Gärungsvermögens ertragen, daß das Wachstum aber schon bei geringer Verringerung des Wassergehaltes abgeschwächt und schließlich aufgehoben wird. Man kann demnach experimentell Zellen herstellen, welche in der Wachstumsintensität ganz verschieden sind, von einem Maximum zu einem Minimum abnehmen, wie das im Laufe des normalen Wachstums der Tiere auch geschieht.

Es liegt also nahe, die Abnahme des Wachstums, die wir bei den Warmblütern von der Geburt oder dem Moment des Ausschlüpfens aus dem Ei allmählich fortschreiten sehen, als durch den verschiedenen Kolloidzustand bedingt anzusehen. Wie diese Änderung eingeleitet wird, mag vorläufig unentschieden bleiben; weil aber das Wachstum selbst zweifellos durch Hormone bestimmter endokriner Drüsen geleitet wird, liegt es nahe, einen Zusammenhang solcher Sekrete auch mit der Regulierung des Kolloidzustandes zu vermuten.

Durch das Wachstum werden bei den Tieren verschieden große Mengen von Zellen gebildet und Organe verschiedener Größe geschaffen. Die Massenbildung kann ungeheure Dimensionen annehmen, wie wir dies z. B. bei den Walfischen sehen. Vergleicht man die Intensität des Energieverbrauchs erwachsener Warmblüter, gemessen pro Kilo Lebendgewicht, so haben zweifellos die Tiere mit größerer Masse einen relativ geringeren Energieverbrauch.

Das gleiche beobachtet man bei einer Spezies zum Beginn des extrauterinen Lebens bis zur Vollendung des Wachstums, wenn man die Untersuchungen jeweils im Hungerzustund eines Tieres, d. h. unter vorübergehendem Ausschluß des Wachstums, ausführt. Gleichgewichtige wachsende und ausgewachsene Tiere haben im Hungerzustand denselben Energieverbrauch.

Mit der Massenbildung bei dem Wachstum vollzieht sich also noch ein wichtiger zweiter Vorgang, den wir am genauesten bei Säugern und Warmblütern überhaupt kennen, nämlich eine allmähliche Reduktion der Intensität des Betriebsstoffwechsels.

Masse und Energieverbrauch beim Warmblüter.

Bei den Säugetieren hatte ich vor nunmehr 41 Jahren zuerst experimentell bewiesen, daß der Energieverbrauch der Oberfläche der Tiere proportional geht; es ließen sich daher nach Auffindung dieses Zusammenhangs Tiere oder Menschen ungleichen Gewichts durch Umrechnung auf gleiche Oberflächen in ihren Verhältnissen des Energieverbrauchs bequem vergleichen und untersuchen.

Da der Energieverbrauch eines Lebewesens aber von einer ganzen Reihe von Einflüssen verändert werden kann, so lassen sich die Beziehungen zur Oberfläche nur unter ganz bestimmten Bedingungen nachweisen, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.

Der Zusammenhang der Wärmebildung mit der Oberfläche bei den Warmblütern erklärt sich zunächst aus der Abkühlung des Körpers durch die Haut, welche bei mittleren und niederen Temperaturen fast den ganzen Wärmeverlust vermittelt. Die Leibestemperatur wird durch einen Mechanismus — die chemische Wärmeregulation —, welcher bei fallender Wärme der Umgebung eine Vermehrung und bei steigender Wärme ein Sinken der Wärmeerzeugung herbeiführt, konstant erhalten. Die Regulation arbeitet sehr exakt, Luftströmungen, die man nicht mehr fühlt, regen an, und Schwankungen der Lufttemperatur von 1° lassen sich durch die Änderung des Energieverbrauchs am Tier experimentell nachweisen.

Bei dauernder Einwirkung von niederen Temperaturen, wie sie beim Aufenthalt in kalten Klimaten gegeben sind, treten Veränderungen des Körpers ein, die chemische Wärmeregulation wird nur für die üblichen Schwankungen der Temperatur herangezogen, während Dauerabkühlungen entweder durch Einlagerung von Fett ins Unterhautzellgewebe oder durch Änderung der Dicke des Pelzes oder durch beide Mittel ausgeglichen werden. Das Fett als schlechter Wärmeleiter genügt sogar, um Warmblütern (Seehunden, Robben usw.) den Aufenthalt in Polarmeeren zu ermöglichen.

Nicht zu unterschätzen ist weiter die Art der Ernährung. Je eiweißreicher diese ist, um so mehr steigt die Wärmebildung (spezifisch dynamische Wirkung).

Der Warmblüter hat die Eigentümlichkeit, daß er durch seine Eigenproduktion an Wärme und ohne chemische Wärmeregulation mit den umgebenden Wärmeverhältnissen bei einer ganz bestimmten Temperatur im Gleichgewicht steht.

Diese Ausschaltung der chemischen Regulation wird auf physiologische Weise durch die allmähliche Steigerung der umgebenden Wärme erreicht. Bei Tieren völlig gleicher Beschaffenheit macht man die Erfahrung, daß die Aktionsbreite der chemischen Regulation bei großen und kleinen Tieren prozentig ausgedrückt die gleiche ist.

Künstlich kann man die chemische Regulation mittels Durchschneidung des Halsmarkes beseitigen. Organismen ohne chemische Regulation fiebern nicht mehr. Nach Ausschaltung der chemischen Regulation befindet sich ein (hungerndes) Tier oder der Mensch auf einem Minimum des Energieverbrauchs und bleibt auf diesem, auch wenn innerhalb mäßiger Grenzen die Umgebungstemperatur noch erhöht wird. Was bei sehr hoher Temperatur geschieht, mag hier außer Betracht bleiben. Das Energieminimum entspricht jenem Zustand, den manche Autoren heute als Basalstoffwechsel bezeichnen. Unter vergleichbaren Verhältnissen liefern auch in diesem Zustand Säugetiere ungleicher Größe gleich viel Wärme pro Quadratmeter Oberfläche. Der kritische Punkt ist eben dadurch charakterisiert, daß der Energieverbrauch der Zellen gerade ausreicht, den abkühlenden Verhältnissen das Gleichgewicht zu halten, wobei die Zellen dazu eines weiteren Anreizes zu erhöhter Wärmebildung nicht bedürfen. Diese Ordnung des Wärmegleichgewichts folgt aus der Natur des Warmblüters von selbst. Den experimentellen Nachweis, daß dem so ist, wurde von mir direkt an Tieren mit ausgeschalteter Wärmeregulation erbracht.

Die Temperatur, bei der dieser zunächst regulationslose Wärmegleichgewichtszustand eintritt, ist keine konstante. Sie hängt ganz von den individuellen Verhältnissen des Tieres oder eines Menschen ab. Der kritische Punkt liegt um so tiefer, je größer das Fettpolster oder je dichter die Haarmasse des Pelzes eines Säugers oder die Federmasse eines Vogels oder beim Menschen die Bekleidung ist. Jede Nahrungsaufnahme verschiebt gleichfalls diesen Punkt nach unten, besonders die Eiweißnahrung. Während man in runder Zahl den kritischen Punkt meist zwischen 20—30° Lufttemperatur nachweisen kann, kann er aber je nach den eben angeführten Hilfskräften des Wärmegleichgewichts auch bei 0° und darunter liegen.

Erhöht man die umgebende Temperatur über den kritischen Punkt, so tritt die von mir studierte physikalische Regulation mit stufenweise sich ändernden Mitteln in Aktion. Das erste ist eine Steigerung der Hauttemperatur. Nimmt die umgebende Wärme weiter zu, so sieht man bei den Tieren, noch ehe die Leistungsfähigkeit der Blutverschiebung nach der Haut erschöpft ist, die Atmung lebhafter werden und darum beginnt die Abgabe mehr oder minder großer Mengen von Wasserdampf, die einer solchen Steigerung fähig ist, daß ein Tier oder der Mensch in einer Umgebung leben kann, die höher als seine Bluttemperatur liegt. Nur sehr wenige Tiere und der Mensch haben in der Haut Schweißdrüsen und brauchen daher ihre Atmung zur Wasserverdunstung nicht in Anspruch zu nehmen.

Damit habe ich den normalen Verlauf geschildert, der bei Warmblütern unter den verschiedensten Umständen zu der erstaunlich exakt eingehaltenen gleichbleibenden Kerntemperatur des Körpers führt, und es würde dem Ge-

sagten nichts hinzuzufügen sein, wenn nicht im Laufe der Jahre zwei Einwände gemacht worden wären. Der eine betreffend die Art der chemischen Wärmeregulation im allgemeinen, der andere betreffend den Mangel einer chemischen Wärmeregulation im wahren Sinne, bei dem Menschen überhaupt.

Die chemische Wärmeregulation verläuft nach meiner Auffassung, die heute auch von anderer Seite durch das Experiment gesichert worden ist, als ein Vorgang, bei dem ein größeres Zellgebiet des Körpers auf nervösem Weg zu lebhafterer Oxydation angeregt wird. Demgegenüber haben einige Autoren angenommen, die Regulation beruhe auf Zitterbewegungen des Muskels, also auf rein motorischen Vorgängen. Für die Tiere hat man diese Annahme schon seit längerem fallengelassen, denn die Zitterhypothese hätte ja dann auch annehmen müssen, daß manche Tiere bereits bei Temperaturen von wenig unter 30° dauernd in Zitterbewegungen wären, was eine biologische Unmöglichkeit ist und auch den Beobachtungen am Tier widerspricht. Aber für den Menschen haben seinerzeit Zuntz und Löwy und Johansson, vor kurzem noch Benedict, das Bestehen einer von gröberen motorischen Einflüssen freien chemischen Regulation bestritten.

Zunächst mag hier noch vorausgeschickt sein, daß auch für den Menschen das Oberflächengesetz unter den von mir gemachten Voraussetzungen anwendbar ist und auch allgemein zur Anwendung kommt. Aber eine besondere Stellung nimmt durch seine Haarlosigkeit der Haut der Mensch eben doch ein, denn es ist klar, für ihn muß der kritische Punkt sehr hoch sein, man kann ihn auf etwa 32—33° annehmen. Der Kulturmensch verfügt aber in seiner Bekleidung über ein souveränes Mittel, das ihm erlaubt, sein selbstgewähltes Klima zum mindesten auf der Höhe von 32—33° zu halten, ja recht häufig stellt er sich sogar noch etwas höher ein, als gerade dem kritischen Punkt entspricht, was man im praktischen Leben »Verweichlichung« nennt. Inwieweit solche jahrzehntelang beibehaltenen Gewohnheiten schließlich dahin führen können, eine von Natur aus bestehende chemische Regulation zur Degeneration zu bringen, wissen wir nicht. Außer der Bekleidung kommt auch das beim Menschen meist sehr reichlich vorhandene Fettpolster als Schutz gegen Wärmeverlust in Betracht.

Zwingt man den Menschen aber, in ungenügender Bekleidung oder nackt sich stundenlang der Kälte, besonders aber bewegter Luft auszusetzen, so steigert sich auch, wie die Versuche von C. Voit und die meines Laboratoriums gezeigt haben, die Wärmebildung.

Die Annahme, jedes Frostgefühl und Unbehagen bedinge motorische Reize für den Muskel, ist jedenfalls unrichtig, weil viele Personen, welche ihr Behaglichkeitsgleichgewicht durch unzweckmäßige Bekleidung auch im Winter auf sehr hohe Hauttemperatur eingestellt haben, schon »frösteln«, ehe sie noch das physikalische Gebiet der Wärmeregulation verlassen haben, und weil ferner trotz Frösteln und Unbehaglichkeit und gelegentlich leichtem Zittern, der Stoffumsatz nicht notwendig zuzunehmen braucht, wie Wolpert gezeigt hat. Im übrigen ist heute auch von anderer Seite das Bestehen der chemischen Regulation ohne motorische Mitwirkung der Muskeln, durch die eingehenden Experimente von Hill erwiesen, wie auch durch die Versuche von Freund

und Grafe, und auch der Mechanismus dieser Regulationen und ihre Nervenbahnen sind klargelegt. (Pflüg. Arch. Bd. 200, S. 96, 1923). Damit ist vorläufig auch die Streitfrage für den Menschen erledigt, wennschon ich es für zweckmäßig halte, unsere Kenntnisse auf diesem Gebiete durch Studien an geeigneten Naturvölkern zu erweitern.

Der thermische Zusammenhang des Oberflächengesetzes ist damit im einzelnen geschildert und im Aufbau auf den beiden wichtigen Regulationsmechanismen des Körpers begründet worden. Auf die unhaltbaren Versuche, den Tatsachen eine andere kausale Deutung für den Warmblüter zu geben, kann verzichtet werden.

Die thermischen Regulationseinrichtungen bei den Warmblütern bedeuten für diese einen höchst bedeutsamen biologischen Vorteil, weil die Existenzmöglichkeit im tropischen wie polaren Klima mit einer Spannweite von mehr als 100° gewährleistet wird.

Die Oberflächenentwicklung und die Masse des Organismus unterliegen beim Warmblüter enormen Unterschieden, und dementsprechend ist der Energieverbrauch pro 1 kg Lebendgewicht verschieden. Eine neugeborene Masse von 1 g Gewicht braucht im Tag pro Kilo etwa 654 kg/cal. Der Walfisch, der durch seine ungeheuren Fettpolster als Warmblüter den Aufenthalt im eisigen Polarmeer verträgt, dürfte bei 150000 kg Lebendgewicht pro Kilo kaum mehr als 1.7 kg/cal. im Tag an Wärme bilden, was ausreicht, seine normale Temperatur des Blutes zu erhalten. Der menschliche Säugling produziert pro Kilo etwa dreimal soviel Wärme als ein Erwachsener, und ähnliche Unterschiede finden sich bei den anderen Warmblütern im jugendlichen und erwachsenen Zustand.

Die Kaltblüter.

a. Die Fische.

Diesem abgeschlossenen Problem der Warmblüter gegenüber unternehme ich es für ein gewaltiges Gebiet unserer Fauna, für den Kaltblüter oder die Poikilothermen, die Beziehungen zwischen Masse und Energieverbrauch näher zu verfolgen. Das ist aus allgemein biologischen Gründen von Bedeutung, wie auch deshalb, weil eine direkte Anwendung des Oberflächengesetzes auf den Kaltbüter von manchen Autoren als etwas Selbstverständliches angesprochen wird.

Im allgemeinen wäre wohl die Vermutung berechtigt, daß die Masse entweder das allein Entscheidende ist oder daß auch Speziesunterschiede vorhanden sind, indem zum Unterhalt des Lebens bei verschiedenen Tieren eben verschiedene Mengen an Energie verbraucht werden müssen, was wieder eine innere Verschiedenheit des Protoplasmas voraussetzen würde. Bei der Mannigfaltigkeit der zu den Kaltblütern zu rechnenden Tiere, Fische, Kröten, Eidechsenarten, Schlangen, und ihren besonderen Lebensäußerungen liegt es nahe, spezifische Speziesunterschiede auch in der Intensität des Energieverbrauchs zu vermuten. Demgegenüber habe ich schon vor längerer Zeit mich dahin ausgesprochen, daß die Gesetze des Stoffverbrauchs und Energieverbrauchs etwas viel Einheitlicheres sind, als die wandelbare Morphologie

der äußeren Erscheinungsform vermuten läßt. Die Einheitlichkeit kann zum Ausdruck kommen in der Rolle, welche die einzelnen Nährstoffe spielen, und weiter auch in den quantitativen Verhältnissen des Gesamtenergieverbrauchs im Betriebsstoffwechsel wie hinsichtlich der Ordnung des Chemismus beim Wachstum.

Manches schien mir für eine Unitätshypothese zu sprechen, für eine innere Verwandtschaft und einen nahen Zusammenhang der ernährungs physiologischen Vorgänge zwischen Kalt- und Warmblütern, in dem Sinne, daß der Stammesentwickelung gleiche Ernährungsvorgänge zugrunde liegen, die man sich konservativer denken muß wie den Wandel der Form.

Einen sicheren, klaren Entscheid haben meine früheren Betrachtungen in dieser Richtung nicht gegeben, und deshalb scheint mir der vorliegende Versuch, zu einem definitiven Schluß zu kommen, besonders wichtig.

Für einen vergleichend physiologischen Zusammenhang hat die Lösung der Frage, wie sich die Massen zum Energieverbrauch verhalten, eine grundlegende Bedeutung, weil wir es ja bei dem Kaltblüter wie Warmblüter mit Tieren von sehr verschiedener Größe zu tun haben.

Wenn nun auch andere Autoren ohne Rücksicht auf die thermischen Eigentümlichkeiten des Warmblüters das Oberflächengesetz auf den Kaltblüter haben übertragen wollen, so ergibt sich ohne weiteres die Unrichtigkeit eines solchen Unternehmens, weil ja der kausale Zusammenhang der chemischen Wärmeregulation beim Kaltblüter vollkommen fehlt. Ganz abgesehen davon, daß der Anzahl von Fällen, in denen die Berechnung des Energieverbrauchs für die Oberflächeneinheit stimmt, viele mit negativen Ergebnissen gegenüberstehen.

Wenn uns die historische Entwickelung der Ernährungslehre zuerst auf das Studium des Kaltblüters geführt hätte, so würde wohl niemand auf den Einfall gekommen sein, einen kausalen Zusammenhang zwischen Energieverbrauch und Oberfläche der Tiere zu vermuten.

Eine Erklärung der bestehenden Verhältnisse darf nicht von den Zuständen bei den Warmblütern ausgehen, sondern muß aus den Lebenserscheinungen der Kaltblüter selbst abgeleitet werden. Diese sind ja auch in der Natur das Primäre, aus dem sich die Warmblüter gebildet haben.

Für meine vorliegenden Untersuchungen habe ich älteres Material anderer Autoren nur zum Teil verwenden können, soweit es brauchbar ist, stammt es aus einer Zeit, in der die energetischen Verhältnisse der Ernährung noch nicht bekannt waren. Ich habe in diesen Fällen die Angaben anderer nach den heutigen Gesichtspunkten umgerechnet und kritisch gesichtet. Ich wende mich in erster Linie nunmehr der Betrachtung der Fische zu. Sie besitzen keine normale Bluttemperatur, sondern sind wechselarm, es fehlt ihnen die chemische Wärmeregulation. Im allgemeinen ist die thermische Breite nach oben begrenzt durch die höchste Temperatur der Ozeane, also etwa 28°, die tiefste Temperatur sinkt etwa auf —2° herab. In manchen fischreicheren Gegenden der Polarmeere bewegt sich Wassertemperatur und Körpertemperatur nur von —2° bis wenige Grade über Null. Von den Besonderheiten der Stellen, wo der Laich abgesetzt wird, soll nicht hier weiter gesprochen werden.

Im Durchschnitt sind alle Lebensfunktionen, besonders auch die Muskelleistungen selbst bei den niedrigsten Temperaturen, nicht eingeschränkt mit Ausnahme weniger Spezies, die bei niedriger Temperatur in eine Art Dämmerzustand verfallen. Bei Variation der Körpertemperatur, z. B. Ansteigen um 1°, nimmt auch nach meinen Versuchen der Energieverbrauch um 8—10 Prozent zu. Eigenartig ist die Körperbeschaffenheit der sogenannten Magerfische, die so wenig Fett zeitlebens anlagern, als ein Säuger nur im verhungernden Zustande zeigt. Alle Lebensvorgänge außer der Arbeitsleistung scheinen sehr langsam. Ein Fisch von 300 g. verhungert bei 16° erst in etwa 160 Tagen. Der Stoffwechsel zeigt dabei aber keine anderen Erscheinungen, als wir sie auch beim Warmblüter kennen; bei der Magerkeit der Tiere drängt sich natürlich das Eiweiß im Stoffwechsel mehr in den Vordergrund als bei den Warmblütern.

Die Wuchsform der Tiere ist sich im allgemeinen sehr ähnlich, mit den beiden Abweichungen der Schlangenformen bei den Aalen und den flachen, schollenartigen Tieren. Die beiden letzteren kommen für das Nachfolgende nicht in Betracht. Im großen und ganzen sind die Untersuchungen über den Energieverbrauch bisher spärlich gewesen und haben in ihrer Ausführung nicht immer experimentell ganz befriedigt, und da man meist Tiere von nicht sehr erheblichen Größenunterschieden benutzt hat, wobei kleine Tiere häufig eben junge Tiere waren, so kam man über die allgemeine Annahme eines größeren Stoffwechsels bei Kleinheit der Tiere nicht hinaus, wobei dann offengelassen werden mußte, was in dem Einzelfall beim Energieverbrauch etwa auf das ungleiche Alter ungleich großer Tiere zur Rechnung zu stellen wäre.

Um erst das Fundament sicherzustellen, habe ich eigene Untersuchungen meist mittels des Kalorimeters ausgeführt und für die Schleie, Goldfische und Stichlinge die Beziehungen zwischen Masse und Energieverbrauch gemessen. Das Ergebnis war, daß in der Tat mit der Masse des Tierkörpers der relative Energieverbrauch sinkt. Außerdem habe ich dann die Oberflächenbildung für Fische festgestellt und verglichen, wieviel Energieverbrauch auf 1 qm Oberfläche zu finden ist. Diese Berechnung ergibt weiteres, daß dann die pro Kilo errechneten großen Unterschiede fast wegfallen und auch zwischen den einzelnen Spezies die Werte pro 1 qm Wärmebildung sich sehr nahekommen, wenn schon die Übereinstimmungen so weitgehend nicht sind wie bei den Warmblütern, zum Teil wohl auch deshalb, weil man den Ernährungszustand dieser Tiere nicht beherrscht, zum Teil deshalb, weil Tiere nicht in völligem Ruhezustand gehalten werden können.

Trotz des Abgleichs des verschiedenen Energieverbrauchs pro Kilo Tier bei Umrechnung auf die Oberfläche läßt sich in keiner Weise behaupten, daß ein kausaler Zusammenhang zwischen Oberfläche und Wärmebildung besteht. Doch wird man die Möglichkeit. Massenunterschiede durch Rechnung abzugleichen, immerhin als eine wertvolle Tatsache buchen können.

Was die absoluten Größen des Energieverbrauchs bei den Fischen anlangt, so erhalte ich im Mittel der untersuchten Spezies pro 16° Wasserwärme pro Tag und Quadratmeter rund 33.08 kg/cal. Die Oberflächenberechnung läßt die Wärmeproduktion bisher nicht untersuchter Fische

schätzen; auf diesem Wege finde ich für das Hausen, wohl den größten Fisch, pro Kilo und Tag nur 0.26 kg/cal., während ein kleiner Stichling von 1 g pro Kilo und Tag 35 kg/cal. bildet, also 100mal so viel. Im Vergleich zu den Säugern, die bei einer Bluttemperatur von 38—39° bei 15° Luftwärme über 1000 kg/cal. in 24 Stunden liefern, beträgt die Wärmeproduktion der Fische, auf dieselbe Einheit bezogen, bei 16° Wasserwärme nur etwa 3 Prozent.

Man darf aber nicht annehmen, daß ein charakteristischer Unterschied zwischen Kalt- und Warmblütern in der Wärmeproduktion pro Kilo Tier bestände. Es überrascht vielleicht, wenn z. B. ein Pferd pro Kilo Tier nur 15 kg/cal. pro Tag an Energieverbrauch, also wenig mehr Wärme produziert als ein kleiner Goldfisch (12.7 kg/cal. pro Kilo). Der Einfluß ungleicher Masse der Tiere führt eben zu derartigen etwas überraschenden Ergebnissen. Rechnen wir, wieviel das gleiche Gewicht verschiedener Organismen an Energie verbraucht (pro Kilo), so steht der Stichling mit 35 kg/cal. derselben Gewichtsmenge von Hefezellen (bis 15°) mit 729 kg/cal., und der einer Maus mit 977 kg/cal. (bei 38—39° Blutwärme) weit nach.

Der Zusammenhang, welcher sich bei den Fischen mit ihrer Oberflächenentwickelung ergeben hat, kann unter Umständen den Tieren zum Vorteil gereichen. Sie kommen ausnahmsweise (z. B. in manchen subtropischen und tropischen Meeresteilen) unter solche Bedingungen des Lebens, daß ihre Körperwärme durch eigene Wärmeproduktion sehr gesteigert wird, so daß sie sich sogar warm anfühlen. Unter diesen Umständen wird die Entwärmung für groß und klein gleich günstig oder gleich schwierig sein. Es ist auch anzunehmen, daß die Fische über eine Art primitiver physikalischer Regulation verfügen, indem sie große Mengen Kiemenwasser aufnehmen. Diese Wassermenge ist, wie ich nach Versuchen von Winterstein berechnet habe, so groß, daß sie sehr wohl eine erhebliche Kühlung des Körpers herbeiführen kann, wenn die Haut, besonders bei sonst ruhendem Wasser, ihre Zwecke der Entwärmung nicht mehr voll erfüllt.

b. Amphibien und Reptilien.

Verhältnissen, die von jenen der Fische schon sehr wesentlich verschieden sind, begegnen wir bei Amphibien und Reptilien. Ihre Lebensmöglichkeiten sind durch den zeitweiligen oder dauernden Landaufenthalt sehr erweitert. Niedere Temperaturen bringen sie meist im Dämmerzustand zu, wie bei uns die Wintermonate. Die Lungenatmung und bei anderen dazu noch die feuchte Haut, bieten einen Weg für die Verdunstung und damit zur Entwärmung, also haben wir die Möglichkeit einer physikalischen Regulation von erheblicher Spannweite.

In welchem Umfange und zu welchen Zwecken eine solche Einrichtung dient, muß näher festgestellt werden. Leider lassen sich über diesen Punkt mangels umfassender experimenteller Untersuchungen keine allzu genauen Angaben machen. Bei manchen in trockenem Wüstenklima sich aufhaltenden Tieren hat man im Laboratoriumsexperiment eine außerordentlich geringe

Wasserverdunstung gefunden, man weiß aber nicht, wie sich diese Tiere bei starker Erwärmung in der Sonne verhalten.

Dagegen zeigt sich in anderen Fällen, z. B. bei Fröschen und Schildkröten, nach meinen Versuchen eine ganz enorme Verdunstung bei Temperaturen, bei welchen nach der sonstigen Erfahrung die Tiere noch weitestens von einer Ueberwärmung entfernt sind. Schon bei 15—20° ist die Verdunstung so gewaltig, daß sie Herabsetzungen der Körpertemperatur unter die umgebende Temperatur veranlassen muß. Bei den Fröschen wird die Verdunstung von der feuchten Haut vor sich gehen, bei den Schildkröten kommt es zu einer Polypnöe, die ganz jener bei den Warmblütern bei hoher Lufttemperatur ähnlich ist. Offenbar handelt es sich bei dieser Verdunstung um die Erhaltung niederer Leibestemperaturen der sonst meist an niedrige Wassertemperatur gewöhnten Tiere, wie sie ja auch tatsächlich Erwärmungen auf 30—35° nur schlecht und vorübergehend ertragen. Für die vorliegende Frage der Beziehung von Masse zum Energieverbrauch kommen diese Ergebnisse insofern in Betracht, als Leibestemperatur und umgebende Temperatur bei diesen Tieren nicht immer übereinstimmen werden. Untersuchungen, aus denen man die Größe des Energieverbrauchs ableiten kann, gibt es im Hinblick auf die Mannigfaltigkeit dieser Geschöpfe nicht gerade in erheblicher Zahl, manches fällt wegen mangelhafter Angaben überhaupt aus. Die Messungen beziehen sich zum Teil auf Respirationsmessungen, zum Teil auf Messungen mittels Kalorimeter. Brauchbare Werte lassen sich für Kröten und Frösche, Eidechsen, Alligatoren, Uromastix und die Ringelnatter angeben. Gerade für die Schlangen ist das Material aber äußerst dürftig. Bekanntlich glaubt man, daß manche von diesen Geschöpfen ungemein alt werden können. Vielleicht haben aus diesem Grunde manche der älteren Experimentationen junge und erwachsene Tiere verglichen, wobei sich immer herausstellte, daß die alten Tiere relativ weniger Energieverbrauch zeigen.

Tatsächlich kommt es aber bei diesen Versuchen nicht auf Jugend und Alter an, sondern auf die ungleiche Größe, denn in der Tat stimmen die Werte für jung und alt ziemlich gut überein, wenn man sie nach den Oberflächen untereinander vergleicht. Nimmt man andere Tiere, so verhält es sich dabei auch wieder so, daß die ungleich schweren Tiere einer Spezies einen verschiedenen Energieverbrauch pro Kilo besitzen, nur muß man, um diese Regelmäßigkeit zu finden, Vergleiche bei großen Verschiedenheiten des Gewichts anstellen. Dann läßt sich der gefundene Unterschied wieder bei Umrechnung auf gleiche Oberfläche beseitigen. Man wird aber bald erkennen, daß verschiedene Spezies untereinander nicht mehr auf diesem Wege der Oberflächenrechnung zur Übereinstimmung zu bringen sind. Hiermit tritt uns also eine wichtige neue Tatsache entgegen.

Daß dies mit den Besonderheiten der Amphibien und Reptilien zusammenhängt, ist leicht zu verstehen. Bei Amphibien und Reptilien ist die Körperform außerordentlich verschieden, neben den plump gebauten Fröschen und Kröten haben wir die Eidechsenarten mit starker Schwanzentwicklung und den Schlangentyp mit lang ausgezogenem Körper. Bestimmt man ihre Oberflächen, so

sieht man, daß die Natur aus derselben Organmasse Tiere bildet, deren Oberfläche um das Vierfache für die gleiche Gewichtsmenge verschieden ist.

Bei Tieren derselben Spezies läßt sich also auch hier zeigen, daß Unterschiede zwischen groß und klein verschwinden, wenn man statt der Masse die Oberfläche zugrunde legt. Damit ist nicht gesagt, daß ein innerer Zusammenhang zwischen Wärmebildung und Oberfläche wie bei den Warmblütern besteht, vielmehr könnte wohl auch ein andrer Einfluß der Masse auf den Energieverbrauch gegeben sein, der ähnlich geordnet ist, wie etwa mit der Masse die Oberflächen sich ändern.

Wie schon gesagt, findet man beim Vergleich des Energieverbrauchs verschiedene Spezies pro 1 qm nicht dieselbe Zahl, wie das bei den Warmblütern der Fall ist, sondern verschiedene Werte.

Rechnet man aber aus, wieviel Wärme ein Tier beliebig gewählter Größe und bestimmter Form erzeugt, wenn man Fische, Amphibien und Reptilien darauf umrechnet, so erhält man für den gewählten Fall annähernd dieselbe Wärmemenge. Das lehrt uns, daß alle diese Tiere von verschiedener Wuchsform ein Protoplasma als Grundlage besitzen, das die gleichen biologischen Eigenschaften besitzt. Die Wuchsform der Tiere ist aber anscheinend noch gleichgültig. Die Bedeutung der Oberfläche als kausales Moment wird erst durch das Warmblütertum erworben. Ich komme also hier zu demselben Ergebnis, das ich vor Jahren schon für Bakterien und Hefen, also für Einzellige, ausgesprochen hatte. Trotz der näheren Beziehungen dieser Mikroben läßt sich irgendein Zusammenhang der Wärmebildung mit ihrer Oberfläche nicht nachweisen. Die Bakterien haben trotz ihrer enormen Oberflächenentwicklung nur einen Energieverbrauch, der einer gleichen Gewichtsmasse von Protoplasma bei den Hefen entspricht.

Erklärung der Beziehung zwischen Masse und Energieverbrauch.

Wenn manche Autoren ohne weitere Begründung das Oberflächengesetz auch auf Kaltblüter übertragen zu können glaubten, so beruhte das auf einem objektiven Irrtum. Und ebenso unrichtig war es, aus wenigen Beobachtungen an Kaltblütern, bei denen anscheinend Energieverbrauch und Oberfläche im Zusammenhang schienen, den Schluß zu ziehen, daß Oberfläche und Energieverbrauch beim Warmblüter nicht in einem thermisch begründeten kausalen Zusammenhange ständen.

Wir stehen nun vor der Lösung einer allerdings fundamentalen Frage für die Entwicklung der ganzen organischen Welt gegenüber; wie es kommt, daß man überall und anscheinend auch außerhalb der Wirbeltierreihe mit Zunahme der Masse einen relativ geringeren Energieverbrauch findet.

Die Lösung dieses Problems ist heute aber durchaus nicht so schwierig, wir sind nur zu einer allgemeinen Auffassung nicht gekommen, weil wir das Wachstum und seine Begleiterscheinungen immer nur vom Standpunkt des Säugetieres betrachtet haben. Historisch ist es ja selbstverständlich, daß wir uns zuerst den Säugetieren zugewandt haben. Unsere ganze Erfahrung über die Vorgänge beim Wachstum sind relativ jungen Datums. Ich bin selbst dabei zunächst von der Kindesernährung ausgegangen und von da zum Studium des Wachstums der

Säugetiere übergegangen. So interessant auch diese Verhältnisse waren, so bedeuteten sie, wie jetzt klar liegt, einen störenden Umweg zur Lösung der größeren Probleme, weil die intrauterinen Vorgänge uns einen wichtigen Teil des Wachstumsprozesses in einer verwickelten Form bieten, welche der Aufklärung lange im Wege gestanden hat. Vor allem ist eine auch von E. Pflüger vertretene Meinung einer vita minima beim Wachstum, die in potenzierter Form beim Studium der Bakterien sich eingelebt hatte, der wichtigen Erkenntnis hinderlich gewesen. Meine Untersuchungen am Säuger wie bei Hefen und Bakterien haben mich zur entgegengesetzten Anschauung geführt. Es gibt kein Wachstum ohne gleichzeitigen Betriebstoffwechsel, beide hängen eng miteinander zusammen. Legen wir diese experimentell erwiesenen Tatsachen unseren weiteren Betrachtungen zugrunde, so klärt sich die Beziehung von Masse und Energieverbrauch in einfacher Formel. Es unterliegt für mich keinem Zweifel, daß das Leben eines neuen Individuums mit einer vita maxima beginnt. Die Gründe dafür sind folgende:

1. In den Anfängen des Wachstums zeigen sich rasche Zellteilungen. Letztere bedeuten Zunahme der Masse des Wachstums. Niemals kann aber großes Wachstum ohne einen intensiven Energieverbrauch der wachsenden Zellen gedacht werden. Weil ein großer Energieverbrauch und Umsatz vorhanden ist, besteht auch die Möglichkeit eines großen Wachstumsansatzes.

2. Bei bebrüteten Eiern ist der relative Energieverbrauch (Abbau) in der ersten Zeit viel größer als in der späteren Zeit der weiteren Ausbildung.

3. Das Wachstum können wir uns vorstellen als sich wiederholende Akte der Verdopplung der ersten Zelle. Daher kann man auch für die Säugetiere sagen, wenn man das Gewicht des Neugeborenen kennt, eine wie oftmalige Verdopplung vorausgegangen sein muß. Außerdem sind uns bekannt die Tragzeiten, d. h. die Dauer des intrauterinen Wachstums. Ein Vergleich der Verdopplungshäufigkeit und der Wachstumszeit ergibt, daß die ersten Verdopplungen viel rascher erfolgen wie die späteren.

4. Die erste Verdopplungsdauer in der extrauterinen Zeit ist um so länger, je größer ein Neugeborenes ist.

5. Aus dem Energieverbrauch frühgeborener Kinder ergibt sich, daß dieser genau dem entspricht, wie er aus der kleineren Gewichtsmenge der Frühgeborenen zu erwarten ist.

6. Von der Geburt des Säuglings beginnend, fällt der Energieverbrauch pro Kilo mit zunehmender Masse (Oberfläche).

7. Die ersten Zellteilungen bei den Eiern von Kaltblütern erfolgen mindestens ebenso rasch wie Teilungen einzelliger Wesen (Hefe, Bakterien).

8. Wachsende Kaltblüter, welche noch so jung sind, daß sie dem intrauterinen Aufenthalt der Säuger entsprechen, haben einen großen Energieverbrauch, der, nach der Oberfläche berechnet, mit dem der erwachsenen Tiere übereinstimmt, wie sich aus meinen Untersuchungen ergibt.

Wenn ein einzelliges Wesen sich teilt und so fortpflanzt, so ist jede neue Einheit der teilenden Zelle im Energieverbrauch gleich. Mag eine Teilung noch so oft eingetreten sein, eine Veränderung der energetischen Leistung auch einer großen Zellmasse kann man nicht nachweisen. Diese Tatsache ist bei der Hefe

durch meine Untersuchungen absolut sichergestellt, es handelt sich dabei wie auch bei Bakterien usw. um Vermehrung durch einfache Teilung.

Anders liegt die Sache offenbar dort, wo Geschlechtsprodukte den Ausgangspunkt für den Aufbau eines vielzelligen Wesens vermitteln. Hier können wir nach meinen theoretischen Voraussetzungen, zu deren Begründung ich eine Reihe von Tatsachen angeführt habe, stets die vita maxima zu Beginn des Aufbaues eines neuen Wesens beobachten, welche allmählich unter Verringerung des Stoffwechsels zum elterlichen Energieverbrauch führt.

Meine Darstellung hat sich an den Vorgang der Verdoppelung der Zellen angeschlossen, und es ist, wie es scheint, die Wahl dieser Darstellung wohl auch dem maßgebenden und bestimmenden Einfluß dieses Vorganges angemessen. Bei der Schaffung neuer Zellmassen vollzieht sich aller Wahrscheinlichkeit nach die Reduktion des Energieverbrauches. Wenn sich z. B. bei einer Verdoppelung der Masse des Energieverbrauchs der Ausgangsmasse zur Neuerzeugten wie 100 zu 160 verhält, so kann man sich vorstellen, wenn wir das Ausgangsmaterial mit dem Energieverbrauch = 100 bezeichnen, daß die 100 g neu hinzukommender Zellmasse nur die Wirkung von 60 hat, in Summa also 160, und wenn diese Masse sich verdoppelt und auf dieselbe Art die Abschwächung eintritt, so würde zu 160 noch 60 Prozent von 160 = 96 hinzukommen, der Effekt im ganzen dann 225 sein, sonach das gleiche Verhältnis bei der ersten wie zweiten Verdoppelung gegeben sein usw. Im Bestreben, den Energieverbrauch des elterlichen Organismus zu erreichen, ergibt sich eine Intensitätsreduktion des Energieverbrauchs, die annähernd den Verhältniszahlen der Oberflächenverminderung entspricht. Demnach scheint ein prinzipieller Unterschied zwischen Einzelligen und Mehrzelligen vorzuliegen. Möglicherweise ist das aber eine Täuschung, denn die Sache könnte sich so verhalten, daß bei der Teilung eines Einzelligen die Teilstücke zunächst einen relativ höheren Energieverbrauch haben. Die Teilung erfolgt ja auch bei Bakterien z. B. so, daß zuerst die Trennungswand auftritt und die jungen Zellen kleiner wie die Mutterzelle sind, worauf ein »Wachsen« bis zur Normalgröße der Einzelligen, wobei das neu hinzutretende Protoplasma von geringerer Wirkung sein könnte wie der durch Teilung abgesprengte Teil. Die Normierung der Größe ist schließlich bei den Einzelligen nichts anderes wie die Größenregulation bei den Vielzelligen. Da die Teilung hier aber die Bildung von Geschlechtsprodukten ersetzt, so muß doch in der Zusammensetzung solcher sich teilenden Zellen der Einzelligen gegenüber den Mehrzelligen ein Unterschied darin bestehen, daß immer wieder neuer Zellinhalt mit allen seinen Möglichkeiten zu einer endlosen Teilungszahl hinzukommt. Bei den Mehrzelligen, wenigstens bei jenen, die nicht auf einer allzu primitiven Form stehenbleiben, kommt als neuer Faktor die Differenzierung der Zellen hinzu. Sie sind gar nicht zum Dauerleben bestimmt, das besorgen nur die Geschlechtsprodukte. In ihnen vereinigt sich alles, was der Beginn neuen Lebens erforderlich macht.

Da bei der Entwickelung eines Tieres der Lebensprozeß mit einer vita maxima beginnt, d. h. pro Kilo Tier mit einem sehr großen Energieverbrauch, die Erhaltung der Spezies aber erfordert, daß schließlich das neuentstandene

Individuum mit den Eigenschaften der Eltern übereinstimmt, so verläuft im Wachstum eine allmähliche Reduktion der vita maxima bis zu normalen Verhältnissen. Das ausgewachsene Tier hat das entsprechende Speziesgewicht, dieselbe Form wie die Eltern, folglich steht Energieverbrauch und Oberfläche wieder in gleichen Verhältnissen wie bei den Eltern. Die Verringerung des relativen Energieverbrauchs pro Kilo kommt zustande, indem bei der jedesmaligen Verdoppelung der Masse der Energieverbrauch um denselben Prozentsatz geringer wird, wobei die Anwendung irgend einer Formel für die Berechnung der Oberfläche etwa die gleichen Zahlenverhältnisse ergibt wie die gesetzmäßige Änderung im natürlichen Wachstumsverlauf.

Über die Art des Mechanismus, der die Reduktion des Energieverbrauchs mit Zunahme der Masse herbeiführt, läßt sich schwer eine Meinung äußern. Die einfachste Annahme ist die Einwirkung einer Regulation etwa auf dem Wege einer hormonalen Sekretion. Wir verlegen die »Unbekannte« dabei in irgendeines der Wachstumsorgane mit innerer Sekretion. Es könnte sogar vielleicht derselbe Eingriff sein, der auch die Relation Wachstum : Betriebstoffwechsel ändert. Wenn es sich so verhält, haben wir allerdings für das innere Verständnis nicht viel mehr erreicht als mit der einfachen Behauptung der zahlenmäßigen Reduktion des Betriebstoffwechsels mit zunehmender Masse. Vielleicht liegen aber die Verhältnisse auch einfacher. Es kann ein mehr mechanisch und automatisch wirkendes Element darin gesucht werden, daß während jedesmaliger Verdoppelung der Masse sozusagen eine Art Absättigung von »Affinitäten« eintritt, welche den Energieverbrauch besorgen.

In der Entwickelung des Säugers oder Warmblüters überhaupt kommen die grundsätzlichen Veränderungen zustande wie bei Kaltblütern und wahrscheinlich auch bei den Wirbellosen. Nur bringt der Warmblüter seine hohe Temperatur mit auf die Welt und die Anlage zur chemischen Wärmeregulation, die mehr oder minder bald nach der Geburt einsetzen kann.

Das Wachstum setzt sich demnach in seiner Wesenheit nur aus zwei ernährungsphysiologischen Prozessen zusammen.

1. Aus der gesetzmäßig verlaufenden Reduktion des Betriebstoffwechsels mit zunehmender Masse.

2. Aus der Regulation des Wachstumsgewinnes, die, wie ich in der vor einiger Zeit hier publizierten Abhandlung nachgewiesen habe, mit einer Veränderung des kolloidalen Zustandes der Zellen Hand in Hand geht.

Sekundäre Erscheinungen sind vielfach mit der Geschlechtsreife (Pubertät) zusammenhängende Prozesse, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.

Die schematische Darstellung, die sich nunmehr über das Wachstum der Tiere geben läßt, bedarf in Zukunft einer weitgehenden Durcharbeitung in ihren Einzelheiten, weil das uns vorliegende Material durchaus nicht allen Anforderungen entspricht, die man vom experimentellen Standpunkt in Zukunft fordern muß. Aber der Gesichtspunkt, auf welchen es ankommt, ist vorläufig wenigstens allgemein verständlich.

Eine wichtige Tatsache wäre noch anzufügen, nämlich, daß der Wachstumsprozeß beim Kaltblüter (Fisch) in der Hinsicht der Quantität der Nahrung, dem Nutzeffekt für den Gewinn an Leibesmasse in den Perioden der Entwicklung, welche gleichen relativen Entwicklungszeiten beim Warmblüter entspricht, zahlenmäßig nicht anders verläuft als bei ihm, nur sind die Zeiten für die gleiche »physiologische Arbeit« außerordentlich lange.

Über den Zusammenhang zwischen Kaltblüter und Warmblüter.

Außerhalb der großen Masse von Warmblütern, die durch ihre sinnreichen Regulationseinrichtungen Herren über alle Klimata geworden sind, dauernd mit derselben Lebensfähigkeit auf gleicher Höhe ihrer Funktionen ihr Dasein dahinbringen, haben wir in vorstehendem die wesentlichen Eigentümlichkeiten der Kaltblüter betrachtet. Nicht so ganz der Spielball der Umgebung allerdings, wie man annimmt, aber immerhin etwas Unvollendetes und Mangelhaftes.

Eine Differenzierung des Protoplasmas in seinen Leistungen haben wir bei ihnen nicht feststellen können, sowenig das auch unter den Spezies der Warmblüter gegeben ist.

Aus der Masse des Unvollkommenen muß sich durch relativ einfache Umformungen auf dem Wege über das Lungenatmen ein Zusammenhang mit dem Warmblüter finden. Den Zusammenhang darf man zweifellos nur auf dem Wege des Vergleiches der Warmblüter mit solchen Kaltblütern suchen, welche bei Blutwärme der ersteren zu leben vermögen, was nur bei bestimmten Spezies, wie schon oben gesagt, der Fall ist.

Eine wichtige Vorbedingung zur Existenz als Warmblüter besitzen in ihren Uranfängen wenigstens doch schon die Amphibien durch ihre Lungenatmung, welche, vorausgesetzt, daß eine Spezies die der hohen Blutwärme der Warmblüter sich anzupassen vermag, nach oben hin das Wärmegleichgewicht zu erhalten imstande wäre. Es bedarf weiterer Untersuchungen auch bei den Reptilien, ob sich nicht tatsächlich solche gut regulierende Spezies für hohe Temperaturen finden, wobei man zunächst an Tropentiere denken wird.

Freilich fehlt den Amphibien und Reptilien diejenige thermische Eigenschaft der Hautbedeckung der Warmblüter durch Haare oder Federn, welche bei letzteren den kritischen Punkt zum Einsetzen der chemischen Regulation herabdrückt, und wahrscheinlich auch der Fettreichtum, welcher für den Mangel eines Feder- oder Haarkleides eintreten kann. Zur weiteren Voraussetzung des Werdegangs zum Warmblüter gehört dann vor allem die chemische Wärmeregulation. Diese kann temporär ausgeschaltet werden, wie das bei den winterschlafenden Säugern der Fall ist, bei den Heterothermen, deren Zellen aber noch die weitere Eigenschaft besitzen, daß ihnen die zeitweilige starke Abkühlung der Leibestemperatur nicht schadet, während eine solche mit der Natur echter Homöothermen unvereinbar ist. Wie bekannt, ist beim Menschen die Grenze sehr enge gezogen, und Abkühlungen auf 23—25° sind von tödlicher Wirkung.

Für die Möglichkeit eines Vergleichs hinsichtlich der Intensität des Energieverbrauchs zwischen Kalt- und Warmblüter kann man drei Wege

wählen, entweder die direkte Erwärmung des Kaltblüters auf die Temperatur des Warmblüters; dieser Weg ist aber bei den für Laboratoriumszwecke verwendbaren Tieren nicht gut gangbar. Ein anderer Weg ist die Abkühlung eines Warmblüters mit durchschnittenem Halsmark auf die Temperatur, die auch von Kaltblütern gut ertragen werden. Einen solchen Vergleich habe ich vor Jahren angestellt, wobei sich herausstellte, daß der künstlisch abgekühlte Warmblüter jedenfalls nicht nennenswert von der Intensität des Energieverbrauchs der Kaltblüter sich unterscheidet. Der dritte Weg besteht in dem Vergleich eines heterothermen Tieres bei starker Abkühlung (im Winterschlaf) mit einem Kaltblüter. Diesen dritten Weg habe ich neuerdings begangen und aus Angaben in der Literatur den Energieverbrauch der Murmeltiere bei 16° berechnet und gefunden, daß etwa pro Tag 78 kg/cal. pro 1 qm Oberfläche treffen, eine Zahl, die man auch bei einigen Amphibien wenigstens unter denselben Temperaturverhältnissen gleichfalls beobachten kann.

Daraus folgt, daß für die Umwandlung von Kaltblütern zu Warmblütern irgendwelche tiefgreifende Eingriffe in den Chemismus und die Größe der relativen Intensität des Energieverbrauchs nicht notwendig sind, was ich schon früher vermutet hatte. Auch in dem Warmblüter leben in seiner Entwicklung die einfachen Grundsätze des Wachstums, der Massenbildung, des Stoffwechsels und Energieverbrauchs weiter, denen wir schon bei tieferstehenden Tieren begegnet sind. Des Warmblüters Eigenart ist nur die thermische Einstellung durch die chemische Wärmeregulation und durch die Hilfsmittel physikalischer Regulation, deren eine das Sinken der Wärme, die andere die Variation der Eigenwärme nach oben ausschließt, im kritischen Punkt die Existenz ohne weitere Hilfsmittel erlaubt.

Die Gleichmäßigkeit der Leistungen des Protoplasmas wird zur Eigenart der Warmblüter, die Akkommodationsfähigkeit dieser Organismen eröffnet die Möglichkeit ihrer Ausbreitung über alle Breiten.

Wechselnde Zusammensetzung der Masse beim Wachstum.

Da der Masse eine so große Bedeutung für die Beurteilung des Energieverbrauchs zukommt, ist es notwendig, noch auf die Frage der Berechtigung des Begriffs »Körpergewicht« einzugehen.

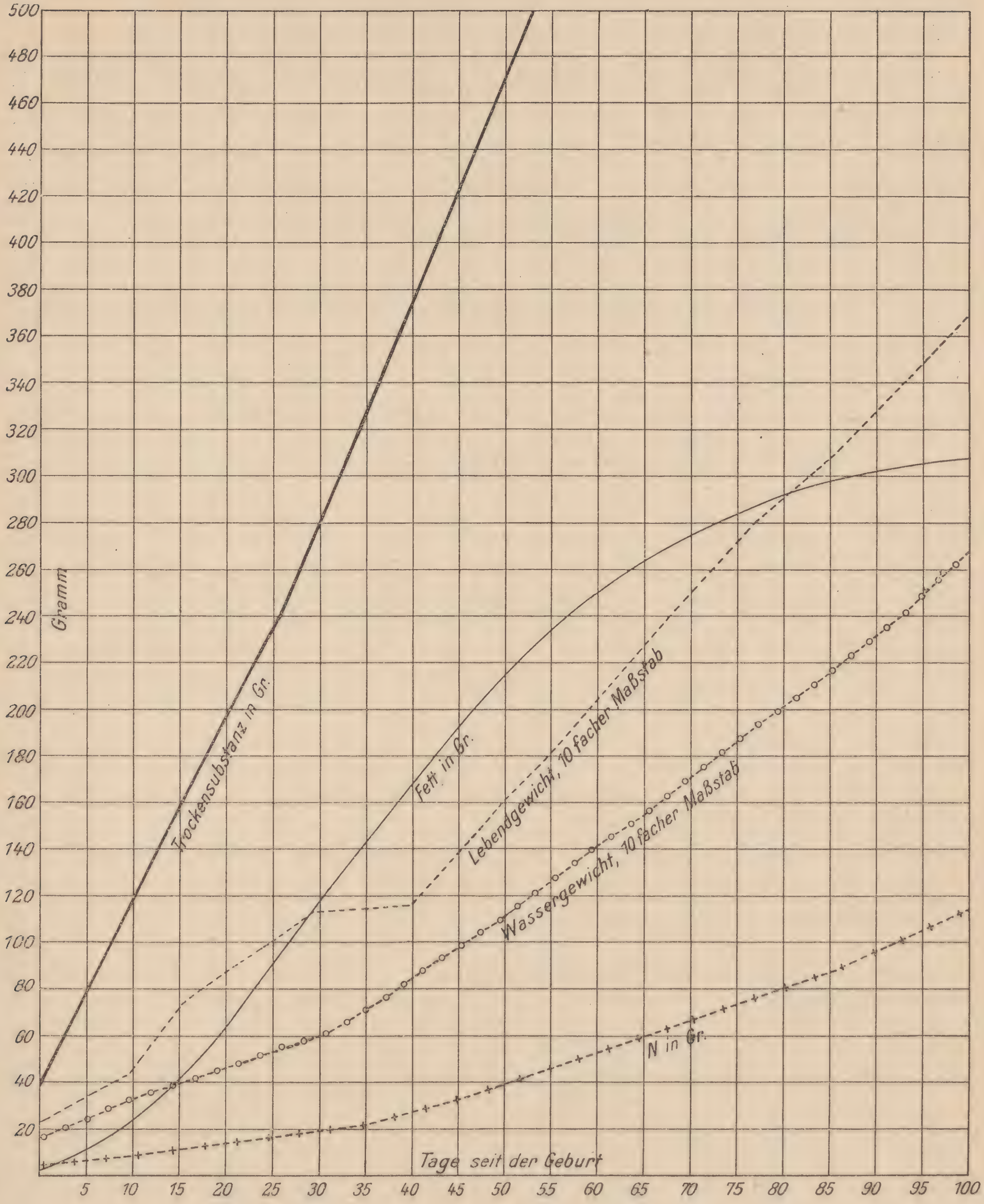
Es ist heutzutage uns wohl bewußt, daß, wenn wir von 1 kg Lebendgewicht als Vergleichsmasse sprechen, dieser Maßstab gerade kein idealer und exakter ist. Ja nirgendwo bringt er eigentlich so große Fehlerquellen als gerade bei Vergleichen der Fragen des Wachstums. Allein ich habe mich vorläufig an diesen Maßstab halten müssen, da sonst nahezu alles vorliegende Material ganz brach hätte liegen müssen.

Aber in Zukunft wird man für exaktere Lösungen sich einer andern Vergleichsbasis bedienen müssen. Es läßt sich heute sehr leicht zeigen, daß das Wachstum nicht nur zur Differenzierung der Organe führt, zu einer Wandelbarkeit des Körpers in anatomischem Sinne, sondern daß auch physiologisch-chemische Veränderungen eintreten, was ich an einem Beispiel einer exakten Untersuchung einer Wachstumsreihe belegen will. Das Wachstum verfolgen wir in seinem Verlaufe im allgemeinen auf Grund von Körpermessungen, also das

Längenwachstum, oder auch auf Grund von Gewichtsbestimmungen. Genaueres wissen wir nur über den Menschen. Untersuchungen an Tieren sind äußerst selten ausgeführt, und ganze Gruppen selbst unter den Wirbeltieren hat man völlig unbeachtet gelassen. In graphischer Darstellung spricht man von Wachstumskurven, man hat versucht, aus ihnen einen Verlauf, der sich in Formeln ausdrücken läßt, abzuleiten. Das wird nur berechtigt sein, wenn man ein sehr großes Material von Beobachtungen als Ausgangspunkt benutzen kann. Dies trifft bis zu einem gewissen Grade für den Menschen zu. Das Wachstum verläuft aber nur in den Mittelwerten regelmäßig mit Streuungen nach oben und unten. Bei vielen Tieren wie beim Menschen setzt mit dem Ende des Wachstums eine mehr oder minder beträchtliche Fettmast ein. Deshalb kann zur Bestimmung des Wachstumsabschlusses besser die Längenmessung als die Massenbestimmung sein.

Andererseits hat die Körpermasse ihre große Bedeutung für alle Zusammenhänge mit dem Problem des Stoffwechsels und Energieverbrauchs. Und Massenbildung bedeutet auch einen Maßstab für normale und gesunde Entwicklung. Deshalb kann man auf die Forderung, genauere Gewichtsangaben festzustellen, doch nicht verzichten.

Bis jetzt hat man aber noch nie unternommen, die Entwicklung des Körpers analytisch zu verfolgen. Das erste brauchbare Material dieser Art betrifft Katzen und Hunde (Carl Thomas). An einem Wurf wurde der Gewichtszuwachs bei normaler Ernährung bestimmt und nach je einer Verdoppelung des Gewichts ein Tier getötet und auf Wassergehalt, Fettgehalt, N-Gehalt untersucht. Daraus lassen sich verschiedene Wachstumskurven ableiten, jene für das Lebendgewicht, für das Trockengewicht, für das Fett und das Eiweißwachstum und für den Wassergehalt (s. nachstehende Figur). Die Tafel läßt für den Hund Trockensubstanz, Fettmenge, N-Menge aus den Ordinaten in Gramm ersehen, für Lebendgewicht und Wassermenge müssen die Werte der Abszisse verzehnfacht werden. Die Gewichtskurve entsteht, wie man sieht, aus einer Reihe von Faktoren, die eben zu ersterer gar nicht parallel verlaufen, sondern sozusagen ihre eigenen Wege gehen. Ein Tier formt sich allmählich innerlich um, nicht nur im morphologischen Sinne, durch Änderung der relativen Verhältnisse der inneren Beziehungen der Organe zueinander (Abnahme der Drüsen, Zunahme der Muskeln, Verschwinden der Thymusdrüsen, Ausbau der Geschlechtsdrüsen), sondern auch im physiologischen chemischen Sinne des inneren Gewebsaufbaues. Der Gewichtszuwachs verteilt sich also den Wachstumsgesetzen des anatomischen Aufbaues entsprechend in verschiedenen Wachstumsabschnitten auf verschiedene Organe. Das Lebendgewicht steigt anfänglich rasch, hält sich zwischen dem 3. bis 4. Tage fast gleich und steigt dann gleichmäßig. Das Tier war nach 100 Tagen noch nicht erwachsen und hätte eine nochmalige Verdopplung seines Gewichts notwendig gehabt. Ganz regelmäßig ist die Zunahme der Trockensubstanz, sie steigt proportional der Wachstumszeit; die Wassermenge des Körpers und N-Anwuchs zeigen ganz analogen Verlauf, bei näherer Durchsicht findet man aber, »daß doch die Zunahme des Wassers« langsamer steigt als der Zellenaufbau. Das erklärt sich aus der



von mir aufgedeckten relativen Abnahme des Wassergehalts der Zellen, der schließlich zum Stillstand des Wachstums führt.

Das Wichtigste und Maßgebendste für das Wachstum ist die N-Kurve, sie zeigt eine leicht gebogene Linie.

Die Einlagerung von Fett geht ihre besonderen Wege, sie setzt nach der Geburt mit steilem Anstieg ein und hält sich so bis zum 50. bis 60. Tage.

Die Fetteinlagerung kompensiert den anfänglich niedrigen Eiweißansatz und bedingt den linearen Verlauf des Anwuchses der Trockensubstanz.

Was uns also einheitlich scheint, die Massenzunahme, ist demnach nur eine Resultante einzelner unter sich verschiedener Wachstumsprozesse. Wenn wir also in Zukunft auf diesem Gebiete Fortschritte machen wollen, so ist beim Wachstum die Analyse des Körpers als unbedingt notwendig heranzuziehen.

Die Fettablagerung im Körper ist, was besonders hervorgehoben sein mag, kein einfacher Vorgang einer zufälligen Mast, sie steht vielmehr mit der Ausbildung der Wärmeregulation in engem Zusammenhang.

Die zukünftige Wachstumsforschung wird wesentlich ergebnisreicher werden, wenn dem chemischen Aufbau der Organismen eine eingehendere Betrachtung gewidmet wird.

Ausgegeben am 12. Juni.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1924 XVIII—XXV

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Library of Congress
DEC - 5 1924
Smithsonian Deposit

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 22. Mai. (S. 235)
Klassensitzung am 5. Juni. (S. 236)
Gesamtsitzung am 19. Juni. (S. 237)
Adresse an Hrn. Hugo Bücking zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 30. Mai 1924. (S. 238)
Klassensitzung am 26. Juni. (S. 240)
Gesamtsitzung am 10. Juli. (S. 241)
Penck: Das Hauptproblem der physischen Anthropogeographie. (S. 242)
Heider: Vom Zahnwechsel bei polychäten Anneliden. (S. 258)
Einstein: Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. (S. 261)
Klassensitzung am 17. Juli. (S. 268)
Gesamtsitzung am 24. Juli. (S. 269)
Klassensitzung am 31. Juli. (S. 271)
Keibel: Über die Gefäße von Petromyzonten. (S. 272)

BERLIN 1924

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XVIII. Gesamtsitzung. 22. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

*1. Hr. Heider sprach über das Nervensystem der Polychaeten und über seine Bedeutung für die Systematik dieser Gruppe.

Der Vortragende erörtert die systematischen Aufstellungen von Hatschek (1893) und O. Storch (1912). Da auch bei Amphicteniden Podialganglien vorzukommen scheinen (D. Nilsson 1912) und jedenfalls die Podialnerven durch Längsstränge verbunden sind, so wird man erwägen müssen, ob nicht auch die Verbindungen zwischen den Podialganglien der Amphinomiden sekundärer Natur sind. Der Vortragende führt an einigen Beispielen die Bedeutung der Innervationsverhältnisse für die Feststellung der Homologien der Kopfanhänge aus.

2. Hr. Stumpf legte einen kurzen Vorbericht von dem a. o. Professor der Universität Berlin Dr. Curt Sachs über »Die Entzifferung einer babylonischen Notenschrift« vor.

Diese Notenschrift besteht aus Keil-Ideogrammen mit Silbenbedeutung, die sich auf einer Tontafel aus Assur im Berliner Museum neben einer sumerischen Dichtung und ihrer assyrischen Übersetzung fanden. Die Musik, die wohl dem 2. Jahrtausend v. Chr. entstammt, ist großstufig-herb und sehr entwickelt. Sie meidet den Halbtonschritt, verwendet aber vier ineinandergeschachtelte Fünftonleitern. Die begleitende achtzehnsaitige Harfe benutzt reichlich Doppelgriffe. In seiner ganzen Art erinnert das Stück auffallend an chinesische Musik. Seine besondere Bedeutung liegt darin, daß es nicht nur die erste Kunde von babylonischer Tonkunst gibt, sondern überhaupt von der Musik eines nichtgriechischen Altertumsvolkes und einer vorgriechischen Zeit.

3. Vorgelegt wurde das 85. Heft (IV 147) des Werkes »Das Pflanzenreich«: IV 147, XVI: *Euphorbiaceae-Crotonoideae-Acalypheae-Acalyphinae* von F. Pax und K. Hoffmann; IV 147, XVII: *Euphorbiaceae*, Additamentum VII von F. Pax und K. Hoffmann (Leipzig 1924).

4. Ferner das mit Unterstützung der Akademie herausgegebene Werk von Adolf Naef, Die Cephalopoden, I. Teil, 1. Band, 2. Lieferung (Fauna e flora del Golfo di Napoli, pubblicata dalla Stazione Zoologica di Napoli, 35. Monografia) (Berlin 1923).

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. H. H. Hildebrandsson übersandte seine Schrift »Sur quelques transformations des nuages« (Sonderabdr. 1924).

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Johan Nordal Fischer Wille in Christiania am 4. Februar durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 20. September.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1924

XIX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 5. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

*1. Hr. Haber sprach über die Entmischung in Flammen.

Die Ätherluftflamme und die Benzolluftflamme zeigen über der Spitze des Innenkegels einen höheren Gehalt an Kohlensäure plus Kohlenoxyd als dicht an der Mantelfläche des Innenkegels. Beim Wasserstoff-Luftgemisch tritt umgekehrt ein Unterschied auf, der einer Verarmung des aufsteigenden Gases an Wasserstoff im Mittelstrahl gleichkommt. Diese Erscheinungen werden durch eine Abschätzung verständlich, welche die Diffusionsverhältnisse dicht an der Brennfläche betrifft.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. Güllstrand überreichte seine Werke »Die reelle optische Abbildung« (Uppsala und Stockholm 1906), »Die optische Abbildung in heterogenen Medien und die Dioptrik der Kristallinse des Menschen« (ebenda 1908), »Das allgemeine optische Abbildungssystem« (ebenda 1915), »Über asphärische Flächen in optischen Instrumenten« (ebenda 1919), »Optische Systemgesetze zweiter und dritter Ordnung« (ebenda 1924).

Ausgegeben am 20. September.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XX. Gesamtsitzung. 19. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Stutz las über: Die päpstliche Diplomatie unter Leo XIII. nach den Denkwürdigkeiten des Kardinals Domenico Ferrata. (Abh.)

Nach einer allgemeinen Würdigung des Memoirenwerks und seines Verfassers wurden dessen Missionen in die Schweiz zum Zwecke der Neuordnung der Basler und Tessiner Bistumsverhältnisse, seine Nuntiaturen in Belgien und Frankreich, insbesondere aber seine Tätigkeit im Dienste des Ralliements besprochen und wurde an einigen Hauptaktionen, vor allem an den französischen Bistumsbesetzungen und Kardinalskreationen der Jahre 1891—1896, dargetan, wie seine Wirksamkeit im einzelnen sich gestaltete.

2. Hr. Stutz überreichte das 100. und 101. Heft der von ihm herausgegebenen »Kirchenrechtlichen Abhandlungen«: Johannes Heckel, Die evangelischen Dom- und Kollegiatstifter Preußens, insbesondere Brandenburg, Merseburg, Naumburg, Zeitz. Eine rechtsgeschichtliche Untersuchung (Stuttgart 1924).

3. Hr. Burdach überreichte seine Gedächtnisrede »Rudolf Hildebrands Persönlichkeit und wissenschaftliche Wirkung« (Sonderabdruck 1924).

4. Hr. Wilcken überreichte sein Buch »Griechische Geschichte im Rahmen der Altertumsgeschichte« (München und Berlin 1924).

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. Hugo Bücking in Heidelberg feierte am 30. Mai sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum. Die Akademie überreichte ihm eine Adresse, die in diesem Stück abgedruckt ist.

Adresse an Hrn. Hugo Bücking zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 30. Mai 1924.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Zu dem Ehrentage, den Sie heute feiern, bringt Ihnen die Preußische Akademie der Wissenschaften herzliche Glückwünsche dar. Dabei würdigt sie mit dankbarer Anerkennung Ihre wissenschaftlichen Leistungen, deren erste Keime wohl fraglos dem Bergbau Ihres Geburtsortes Bieber im Spessart und dem bergmännischen Berufe Ihres Vaters entsprangen. So haben Sie dort den metasomatischen Eisensteinlagern eine erfolgreiche Untersuchung gewidmet und das Blatt Bieber geologisch kartiert. Darüber hinaus durchforschten Sie mente et malleo den ganzen Spessart, dessen permische Schichten und kristalline Schiefer Sie schon in den siebziger Jahren gegliedert und bis zum Rande von Vogelsberg, Wetterau und Rhön, ja teilweise bis zum Thüringer Wald verfolgt haben. In der Rhön erschlossen sich neben Basalten auch Phonolithe, Tephrite und Rosenbuschs neuer Limburgit-Typus Ihrem petrographisch-geologischen Blick. Zugleich ergab sich, was Branca für seine 125 schwäbischen Vulkanembryonen und deren tufferfüllte Ausbruchsröhren gefunden hatte, die häufige Unabhängigkeit der Eruption von Spalten und Verwerfungen; diese stellten sich Ihrem scharfen Augenmerk als Umrandung von Gebieten dar, die, durch Daubrées Diatremen siebartig durchlöchert und gelockert, nachträglich eingesunken sind. — Überdies gelang Ihnen in der Rhön wie im Werragebiet eine Berechnung des Ausmaßes der Denudationen, die sich seit dem Abklingen des dortigen Vulkanismus bis auf heute vollzogen haben.

Durch eingehendes Studium der »gemischten Gänge« des Thüringer Trusetals verliehen Sie der damals modernen Lehre von magmatischer Differenzierung starke Stützen und fruchtbare Anregungen. Ihr den kristallinen Schiefern und dem Metamorphismus von jeher zugewandtes Interesse betätigte sich besonders auch in Attika und lieferte manchen Baustein für das bekannte Werk von Lepsius. — Die zahlreichen geologischen Kartierungen, die Sie teils im Auftrage der Preußischen Landesanstalt, teils als langjähriger Leiter der gleichartigen Einrichtung Elsaß-Lothringens ausgeführt haben, zeugen von einer Sorgfalt des Beobachtens, deren Mustergültigkeit selbst von denen anerkannt wird, die sich Ihren Deutungen nicht anschließen konnten. Ihre ungewöhnliche Vielseitigkeit und eine unübertroffene Mineralkenntnis zeitigten neben den petrographisch-stratigraphischen Leistungen auch rein mineralogische und kristallographische Früchte.

So dürfen Sie, hochgeehrter Herr Kollege, heute mit größter Befriedigung auf ein reiches Lebenswerk zurückblicken. Trauern Sie auch mit uns allen um den Verlust des schönen Straßburg, wo Sie 35 Jahre lang bis zum Kriegsende gewirkt haben, so wird Sie jetzt in Heidelberg der Blick auf das ehrwürdige Schloß und auf das unsichtbare Denkmal unseres verewigten Meisters Rosenbusch erquicken und erheben.

Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 20. September.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XXI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 26. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Correns berichtete über die Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Geschlechtsbestimmung bei *Melandrium*. (Ersch. später.)

Es werden die thelygenen Männchen, die Änderung in der Beschaffenheit der männlichen Keimzellen durch das Alternlassen und sekundäre Unterschiede zwischen den Geschlechtern besprochen; endlich wird die Frage erörtert, ob die Stellung der Blüte an der weiblichen Pflanze einen Einfluß auf das Zahlenverhältnis der männlichen und weiblichen Nachkommen hat.

2. Vorgelegt wurde »Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik« Band 46, Jahrgang 1916—1918, Heft 4 (Berlin und Leipzig 1924).

Ausgegeben am 20. September.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Penck sprach über das Hauptproblem der physischen Anthropogeographie.

Es besteht in den Beziehungen zwischen Erdoberfläche und Mensch, welche durch dessen Ernährungsbedürfnis hergestellt werden. Zur Befriedigung desselben steht eine Anbaufläche von ziemlich enger Begrenzung zur Verfügung. Unter den besten heutigen Produktionsverhältnissen könnten 8—9 Milliarden Menschen auf der Erde existieren, welche Zahl nach der jetzigen Vermehrungsrate der Menschheit in 300 Jahren erreicht wird.

2. Hr. von Harnack legte eine Abhandlung vor: »Die Reden Pauls von Samosata an Sabinus (Zenobia?) und seine Christologie.«

In seiner soeben (Leipzig 1924) erschienenen großen Monographie über Paul von Samosata erklärt Hr. Loofs, einen echten Kern anerkennend, die überlieferten Fragmente aus den »Reden an Sabinus« für unecht, läßt sie bei seiner Feststellung der Christologie des häretischen Bischofs fast ganz beiseite und stellt es in Abrede, daß diese Christologie eine dynamistische bzw. adoptianische sei. Demgegenüber wird in dieser Abhandlung die Echtheit der Fragmente und die bisher gültige Auffassung der Christologie Pauls verteidigt.

3. Hr. Heider sprach über den Zahnwechsel bei polychäten Anneliden.

Er bezieht sich auf eine Beobachtung von Ehlers über Kieferersatz bei »*Eunice harassii*« und knüpft daran allgemeine Bemerkungen über Zahnersatz, Borstenersatz und Häutungsvorgänge bei Polychäten.

4. Hr. Einstein legte einen Aufsatz vor: »Quantentheorie des einatomigen idealen Gases.«

Die Methode, auf Grund welcher Hr. Bose die Plancksche Strahlungsformel abgeleitet hat, läßt sich auch auf ideale Gase anwenden. Man findet so eine Abweichung von der klassischen Zustandsgleichung idealer Gase bei tiefen Temperaturen (Entartung). Am Schlusse wird ein Paradoxon angegeben, das die Gültigkeit der gefundenen Gesetze als zweifelhaft erscheinen läßt.

5. Hr. Norden legte den Bericht der Kommission für den Thesaurus linguae Latinae über die Zeit vom 1. April 1922 bis 31. März 1924 vor.

Das Hauptproblem der physischen Anthropogeographie.

Von Albrecht Penck.

Friedrich Ratzel hat 1882 durch Herausgabe des ersten Bandes seiner Anthropogeographie der Pflege der Geographie des Menschen einen so starken Impuls gegeben, daß nicht nur der von ihm geprägte Ausdruck gang und gäbe geworden ist, sondern daß auch die Erörterung anthropogeographischer Probleme vielfach eingetreten ist. Was Ratzel unter der von ihm in den Vordergrund gerückten Disziplin verstand, brachte er im Untertitel des Werkes: »Grundzüge der Anwendung der Erdkunde auf die Geschichte« zum Ausdruck. Er stellte sich auf denselben Boden, den Karl Ritter einnahm, als dieser durch Sammlung seiner Akademie-Abhandlungen »zur Begründung einer mehr wissenschaftlichen Behandlung der Erdkunde« den Titel seiner allgemeinen Erdkunde »im Verhältnis zur Natur und zur Geschichte des Menschen« rechtfertigen wollte[1]. 1891 hat Ratzel sein Programm durch den zweiten Band seiner Anthropogeographie wesentlich bereichert, dem er den Untertitel »Die geographische Verbreitung des Menschen« gab. Spätere Auflagen haben hieran nichts gerüttelt; als 1899 der erste Band in einer gänzlich umgearbeiteten Auflage erschien, blieb er der Anwendung der Geographie auf die Geschichte gewidmet.

Die Untertitel von Ratzels Anthropogeographie kennzeichnen deren doppelte Zielsetzung. Aber der zweite Band trägt einen kaum weniger historischen Einschlag als der erste. Auch in der gegenwärtigen Verbreitung des Menschen erblickt Ratzel in erster Linie das Ergebnis einer geschichtlichen Entwicklung. Das geht so weit, daß er im Abschnitt »Spuren und Werke des Menschen auf der Erdoberfläche« nicht bloß die Städte als geschichtliche Mittelpunkte, sondern auch die Ruinen behandelt. Aber vergebens sucht man in diesem Abschnitte, der hauptsächlich den Wohnplätzen und Wegen des Menschen gewidmet ist, auch nur einen Hinweis auf die wichtigste Beeinflussung der Erdoberfläche durch den Menschen, nämlich auf die Schaffung des Kulturlandes, welches großen Teilen der Erdoberfläche das eigenartige Gepräge aufdrückt. Zwar erwähnt Ratzel im Abschnitte »Über das statistische Bild der Menschheit« die Kulturlandschaft. Aber rasch geht er über sie weg; so sehr sieht er in ihr das Gewordene, daß er sie umfassender und treffender historische Landschaft nennen möchte. Nach ihm werden Beziehungen zwischen Wärme und Dichtigkeit der Bevölkerung zwar am wirksamsten durch die Bodenkultur vermittelt[2], aber an der fundamentalen Frage

[1] Einleitung zur allgemeinen vergleichenden Geographie und Abhandlungen zur Begründung einer mehr wissenschaftlichen Behandlung der Erdkunde. Berlin 1852.

[2] Anthropogeographie II, 1891, S. 181 und 261.

geht er vorüber, unter welchen natürlichen Voraussetzungen sich die Kulturlandschaft überhaupt entwickeln kann und welche Triebkräfte zu ihrer Entstehung führen. Gewiß, Ratzel kennt den Einfluß der Naturbedingungen auf die Menschheit. Er widmet ihm ein ganzes Kapitel in der ersten Auflage des ersten Bandes der Anthropogeographie. Hier spricht er von Wirkungen auf den Zustand, die durch Physiologie und Psychologie, und von Wirkungen auf die Handlungen, die vornehmlich durch die Geschichte zu erforschen sind (S. 60). Aber von dem großen Zwange, den seine eigene Natur auf den Menschen ausübt, sich zu ernähren, spricht er nicht. Nur ganz flüchtig streift er diesen wichtigsten Punkt in der zweiten Auflage (S. 69). Er erkennt zwar eine Fülle von Wirkungen in dem ersten und dringendsten Bedürfnis der Ernährung, tut jedoch den Gegenstand dann mit den Worten ab: »Man braucht, um das einzusehen, nicht mit Lacombe eine théorie d'urgence.« Auch in Hettners[1] anregendem Vortrage über die Geographie des Menschen wird hierauf kaum eingegangen. Gerade aber die Nahrungsfrage ist diejenige, welche Biogeographie und Anthropogeographie gemein haben und welche die festeste Anknüpfung der Anthropogeographie an die Physiogeographie ermöglicht. Sehr mit Recht schreibt Ratzel 1899[2]: »Die Anthropogeographie wird nicht eher auf eine feste wissenschaftliche Basis gestellt sein, als bis die allgemeinen Gesetze der Verbreitung alles Lebens auf der Erde die Ecksteine ihres Fundamentes bilden.« Aber diese Ecksteine läßt er in seinem Gebäude aus. Die von ihm begründete Anthropogeographie bedarf noch eines wesentlichen Ausbaus nach der biologischen und physischen Seite hin; zur historischen Anthropogeographie müssen wir eine physische gesellen, in der die vitalen Fragen des Menschen zu ihrem Rechte kommen.

Ich will hier das Hauptproblem einer solchen physischen Anthropogeographie behandeln, nämlich die Beziehungen zwischen Erdoberfläche und Mensch, welche durch dessen Nahrungsbedürfnis hergestellt werden. Ich bediene mich zunächst, um den rein physikalischen Charakter der einschlägigen Untersuchungen auch äußerlich hervortreten zu lassen, der Sprache sehr einfacher mathematischer Formeln. Zwischen Nahrungsproduktion (N) und Zahl der Menschen auf der Erde (Z) besteht die Grundgleichung

$$N = Zn,$$

worin n das durchschnittliche Nahrungsbedürfnis des einzelnen bedeutet. Die gesamte Nahrungsproduktion aber ergibt sich aus der gesamten Nahrung liefernden Oberfläche (O) und der mittleren Produktion der Flächeneinheit (p); wir erhalten daher folgende wichtige Beziehung zwischen der Größe der Erdoberfläche und der Zahl der Menschen:

$$Op = Zn.$$

Nun kommt von der gesamten Erdoberfläche O im wesentlichen nur die Landoberfläche L als Nahrungsmittellieferer in Betracht; unbeschadet der nicht geringen Bedeutung, welche Küsten- und Hochseefischerei für die Ernährung

[1] Geographische Zeitschrift XIII, 1907, S. 401.
[2] Anthropogeographie I, 2. Aufl. S. 9.

sehr vieler haben, dürfen wir bei einer ersten Näherungsrechnung statt O in unsere Formel L einsetzen und die Zahl der Menschen wie folgt ausdrücken:

$$Z = \frac{Lp}{n}.$$

Es ist die Zahl der Menschen auf der Erde gleich der Landoberfläche multipliziert mit deren mittlerer Produktion auf der Flächeneinheit, dividiert durch das mittlere Nahrungsbedürfnis des einzelnen. Alle die letztgenannten Größen sind endliche, und da das Nahrungsbedürfnis des Menschen nicht gleich Null werden kann, so ist die Zahl der Menschen auf der Erde beschränkt.

Die Produktion auf der Flächeneinheit ist eine Funktion der Produktionskraft von Klima und Bodenbeschaffenheit sowie der Intensität der Bodenkultur oder der Wirtschaft. Das Nahrungsbedürfnis n des Menschen wechselt von Ort zu Ort. Aber nach den Untersuchungen von Rubner[1] schwankt es innerhalb ziemlich enger Grenzen, und es wechselt weniger die Summe des benötigten Eiweiß und Fettes sowie der benötigten Kalorien als die Zusammensetzung der Nahrung, welche diese Summe liefert. Diese Zusammensetzung zeigt bemerkenswerte örtliche Anpassungen; jedes Gebiet einer bestimmten Nahrungsproduktion hat eine charakteristische Nahrungskonsumption des einzelnen von ziemlich gleicher Größe. Wir können daher die Zahl z der Menschen eines Gebietes l durch die Formel

$$z = \frac{lKi}{n}$$

ausdrücken, wenn K dessen durch die Kraft von Klima und Boden bedingte Höchstproduktion auf der Flächeneinheit ist, die durch die wechselnde Intensität i der Bodenkultur mehr oder weniger zur Geltung gebracht wird; K ist eine Quantität, i ist eine bloße Zahl. Die Bewohnerzahl eines Gebietes mit der Volksdichte d ergibt sich aber auch aus der Formel:

$$z = ld.$$

Nehmen wir nun an, das Gebiet sei ein geschlossenes Wirtschaftsgebiet, es exportiere und importiere nichts, so ergibt sich:

$$d = \frac{Ki}{n},$$

d. h. die Volksdichte eines sich selbst erhaltenden, Nahrung weder importierenden noch exportierenden Gebietes ist gleich seiner Höchstproduktion nach Klima und Bodenbeschaffenheit auf der Flächeneinheit, nämlich seiner natürlichen Produktionskraft, multipliziert mit einem Faktor, der die Intensität der Bodennutzung darstellt (i), dividiert durch das Nahrungsbedürfnis des einzelnen. Solange wir dieses nun als in engen Grenzen schwankend ansehen dürfen, können wir die Volksdichte eines Gebietes propor-

[1] Die kommende Friedensernährung. Zeitschr. f. ärztliche Fortbildung, XVII, 1920, Nr. 10 und 11.

tional seiner natürlichen, durch Klima und Boden bestimmten Produktionskraft, multipliziert mit einem die Intensität des Bodenbaus wiedergebenden Faktor setzen. Letzterer ist ganz wesentlich von der Kulturhöhe abhängig, und so wird ohne weiteres klar, in welch hohem Maße die Volksdichte eines Gebietes durch seine Kulturhöhe bestimmt wird.

Dies ist von Ratzel[1] mehrfach sehr mit Recht betont worden; aber indem er fruchtbaren Boden mit dünner, armen Boden mit dichter Bevölkerung eigens würdigte, war er sich völlig inne, daß die Volksdichte nicht bloß von der Kulturhöhe, sondern namentlich auch von natürlichen Faktoren abhängt. Ausdrücklich hat er hervorgehoben, daß in den großen Zügen der Verteilung der Bevölkerung über die Erde zuförderst die klimatischen Ursachen sichtbar werden[2]. Wir müssen eben immer beides, Gunst der natürlichen Bedingungen und Kulturhöhe, in Betracht ziehen, wenn wir die Volksdichte eines Gebietes erklären wollen. Mit ihrer Hilfe können wir durch den Vergleich verschiedener Gebiete den einen oder anderen Faktor ausschalten. Haben wir Gebiete gleicher Kulturhöhe, so können wir aus deren verschiedenen Volksdichten auf verschiedene Produktionskräfte schließen und so zu einer Bonitierung der Erdoberfläche gelangen.

Dies gilt aber nur für geschlossene Wirtschaftsgebiete und nicht für Länder mit Export und Import von Nahrungsmitteln. Der Handel ermöglicht, daß an der einen Stelle Menschen von der Nahrung leben, die an der andern gewonnen wird, und die klare Beziehung zwischen Volksdichte, Produktionskraft und Intensität der Bodenkultur wird verwischt; aber nur ausnahmsweise geht sie gänzlich verloren. Länder mit Einfuhr von Nahrungsmitteln steigern ihre Volksdichte auf Kosten der Ausfuhrländer. Sei E die Einfuhr von Nahrungsmitteln eines Einfuhrlandes, bezogen auf die Einheit seiner Fläche, so ergibt sich die natürliche Volksdichte, die es haben würde, wenn kein Handel bestünde, aus der Gleichung:

$$\delta = \frac{Ki - E}{n}$$

und die eines Landes mit der Ausfuhr A von Lebensmitteln, wiederum auf die Einheit seiner Fläche bezogen, ist:

$$\delta = \frac{Ki + A}{n}.$$

Unsere beiden Formeln veranschaulichen auf das deutlichste, daß der Welthandel die natürlichen Volksdichten der einzelnen Länder mehrt oder mindert, aber er ruft keine allgemeine Steigerung der Zahl der Menschen auf der Erde hervor; diese ist und bleibt ausschließlich abhängig von der Größe und Produktionskraft der Erde und der Höhe der Bodenkultur (i) sowie von dem Nahrungsbedürfnis des einzelnen.

Von diesen Faktoren können die beiden ersteren für die geologische Gegenwart als konstant angesehen werden; variabel sind nur die Intensität

[1] Anthropogeographie II, 1891, S. 255. 279.
[2] Ebenda S. 204.

der Bodenkultur und, in beschränkterem Umfange, das Nahrungsbedürfnis des einzelnen. Solange dieses unveränderlich bleibt, schwankt die mögliche Zahl der Menschen auf der Erde lediglich mit der Höhe der Bodenkultur, aber diese kann über ein gewisses Maximum hinaus nicht zunehmen. Sobald allenthalben auf der Erde eine Höchstkultur des Bodens erreicht ist, kann die Zahl der Menschen nicht mehr zunehmen. Die so bestimmte Höchstzahl der Bevölkerung nennen wir die potentielle Bevölkerung, der eine potentielle Volksdichte D und die Kapazität der Länder entspricht.

Die größtmögliche Zahl der Menschen auf der Erde hat E. G. Ravenstein[1] im Jahre 1890 auf der Versammlung der British Association for the advancement of Science zu Leeds zu schätzen versucht. Er teilte die Landfläche in fruchtbare Gebiete, Steppen und Wüsten. Die fruchtbaren Gebiete decken sich mit den natürlichen Waldgebieten; er schreibt ihnen eine höchstmögliche Volksdichte von 83, den Steppen eine solche von 4, den Wüsten von 0.4 Einwohnern auf 1 qkm zu und berechnet daraus mit Hilfe der von ihm geschätzten Areale von Waldland, Steppe und Wüste die potentielle Bevölkerung der Erde zu 5994 Millionen. Freiherr von Fircks[2] hält die von Ravenstein angenommenen Volksdichten für zu gering, er kommt zu 9000 Millionen, indem er den fruchtbaren Regionen eine größte mittlere Volksdichte von 100, den Steppen eine solche von 50, den Wüsten von 5 zuschreibt. Stellen wir einen von Hermann Wagner[3] bemerkten Rechenfehler richtig, so ergibt sich unter den von Fircks gemachten Voraussetzungen nur eine Kapazität der Erde für 7800 Millionen Menschen.

Einen anderen Weg schlug Ballod ein[4]. Er schätzte die anbaufähige Fläche der Erde zu 55.6 Millionen qkm, wovon 28 Millionen qkm Ackerland sein könnten. Wenn nun in den Vereinigten Staaten von Amerika zur Ernährung eines Menschen 1.2 ha nötig seien, so könnten nach diesem Standard of life 2333 Millionen Menschen auf der Erde leben, nach dem deutschen (0.5 ha) wären es 5600 Millionen, nach dem japanischen (0.125 ha) 22400 Millionen. Den deutschen Standard of life als einigermaßen menschenwürdig bezeichnend, hält Ballod die Zahl von 5600 Millionen vorläufig für richtig. Daß die zur Ernährung des Menschen nötige Fläche nicht bloß vom Standard of life, sondern auch von der wechselnden Produktionskraft abhängt, erwägt er nicht. Ratzel[5] meinte, daß die $^6/_7$ der Erde außerhalb Europas, Indiens und Chinas mindestens 55 Millionen qkm von solcher Güte umschlössen, daß sie noch einige Milliarden zu ernähren imstande wären. Hermann Wagner hingegen wirft die Frage auf, ob die Erde die doppelte Zahl von Menschen, die sie heute trägt, zu ernähren vermöchte.

---

[1] Lands of the Globe still available for European Settlement. Proceedings R. Geographical Society XIII, 1891, S. 27.

[2] Bevölkerungslehre und -politik. Leipzig 1898, S. 295.

[3] Lehrbuch der Geographie, 10. Auflage 1923, S. 889.

[4] Wieviel Menschen kann die Erde ernähren? Schmollers Jahrb. f. Gesetzgebung, Verwaltung und Volkswirtschaft XXXVI, 2, 1912, S. 81.

[5] Anthropogeographie II, 1891, S. 228.

Unsere Darlegungen eröffnen die Möglichkeit, die angeführten auseinandergehenden Schätzungen, deren Unsicherheit aus der Unsicherheit ihrer Grundlagen ohne weiteres erhellt, in Zukunft durch genauere Berechnungen zu ersetzen. Sobald aus den wechselnden faktischen Volksdichten die potentiellen der einzelnen Teile der Landoberfläche errechnet sein werden, wird man die Höchstzahl der Menschen mit leidlicher Genauigkeit ermitteln können. Aber jene Grundlage fehlt noch und wir können die Höchstzahl der Menschheit, die bei intensivster Bodennutzung nach besten heutigen Methoden möglich ist, lediglich roh schätzen. Dabei leitet uns die Erwägung, daß das Klima sichtlich einen ganz maßgebenden Einfluß auf die Produktion menschlicher Nahrung ausübt und damit die Volksmenge bestimmt. Wir setzen voraus, daß einem bestimmten Klima bei sonst gleichen Bedingungen eine bestimmte maximale Volksdichte zukommt, und wählen daher eine Klimaeinteilung zum Ausgange der Schätzung. Dafür empfiehlt sich die Köppens[1] um so mehr, als Hermann Wagner[2] sich der Mühe unterzogen hat, deren einzelne Gebiete auszumessen. Nun kommen in jedem Klima besonders dicht besiedelte Landstriche vor, welche zwar gewiß nicht die höchste denkbare, aber wenigstens eine sehr hohe Kultur aufweisen. Denken wir uns das gesamte Klimagebiet mit der zugehörigen höchsten Volksdichte belastet, so erhalten wir jedenfalls einen Höchstwert seiner möglichen Einwohnerzahl; denn die Gebiete, die besonders dicht besiedelt sind, erfreuen sich in der Regel auch einer besonderen Gunst des Bodens. Doch dürfen wir nicht annehmen, daß jedes Klimagebiet ganz gleichmäßig besiedelbar sei, denn dann müßten sich die Grenzen der einzelnen Klimagebiete als scharfe Trennungslinien von Gebieten verschiedener Volksdichten zu erkennen geben. Es ist auch klar, daß Köppens feuchttemperiertes Klima im südlichen Irland nicht dieselbe Volksdichte haben kann wie im wärmeren Japan. In jedem Klimagebiete gibt es Abstufungen, die den allmählichen Übergang von einem Klimagebiete zum benachbarten vermitteln. Weitere Abstufungen ergeben sich notwendigerweise aus den verschiedenen Bodenverhältnissen. Ein heißfeuchtes Urwaldklima wird auf Laterit eine viel geringere Produktionskraft entfalten als auf vulkanischem Boden. Alles in allem dürften die dichtest besiedelten Teile der einzelnen Klimagebiete nicht bloß durch besonders hohe Bodenkultur, sondern auch durch besonders gute Bodenbeschaffenheit sich auszeichnen. Aus verschiedenen Gründen sind ihre Volksdichten für das einzelne Klimagebiet auch als optimale zu hoch. Wollen wir die potentielle Volksdichte eines größeren Klimagebietes ermitteln, so müssen wir sie geringer als die höchste vorkommende ansetzen. Doch ist dies nicht ganz unserer Willkür überlassen; denn das Pflanzenkleid des Landes gibt einen guten Anhalt zur Schätzung der Abstufungen der Produktionskraft von Boden und Klima. Es

---

[1] Klassifikation der Klimate nach Temperatur, Niederschlag und Jahreslauf. Petermanns Mitteilungen LXIV, 1918, S. 193. Die Klimate der Erde. Berlin 1923. Hier wird auf Wagners Anregung hin der Name subarktische Klimate durch boreale ersetzt.

[2] Die Flächenausdehnung der Köppenschen Klimagebiete der Erde. — Petermanns Mitteilungen LXVII, 1921, S. 215. Auf Köppens Karte sind 1918 in der Farbenerklärung die Namen wintertrockenkalte und feuchtwinterkalte Klimate vertauscht worden, was auch in Wagners Tabelle III geschehen ist.

ermöglicht uns, plausible Werte für die mittlere potentielle Volksdichte eines Klimagebietes aufzustellen, aus dessen von Wagner bestimmten Fläche wir die wahrscheinliche größtmögliche Bewohnerzahl herleiteten. Im einzelnen wurde wie folgt verfahren:

I. Im feuchtwarmen Urwaldklima ragt die hochkultivierte Insel Java durch ihre Volksdichte von 266 Einwohnern auf 1 qkm besonders hervor; diese steigert sich im westlichen Teile der Insel auf 350. Dabei ist die Insel nur teilweise in Kultur genommen, und Woeikof[1] hält eine mittlere Volksdichte von 800 für möglich. Danach glaubt er, daß die ganze Tropenzone zwischen 15° N und 15° S durchschnittlich 400 Einwohner auf dem Quadratkilometer und 10 Milliarden im ganzen nähren könne. Wir bleiben hinter dieser Schätzung weit zurück, indem wir die höchste potentielle Volksdichte in feuchtheißem Klima zu 400 veranschlagen; denn die Verhältnisse auf Java sind außergewöhnlich günstige. Die vulkanischen Aschenregen düngen den Boden immer aufs neue und hindern dessen Erschöpfung. Aber wir wissen durch Thorbecke[2], daß in Kamerun, dicht außerhalb des Urwaldgebietes trotz Einschaltung einer zweijährigen Brache zwischen den einzelnen Jahren des Anbaus 200 Menschen vom Quadratkilometer ernährt werden könnten. Würde man durch entsprechende Düngung die Brache ausschalten können, so könnten im Graslande am Urwaldsaume 600 Menschen auf dem Quadratkilometer leben. Diese Zahlen sollen nur veranschaulichen, wie hoch die Produktionskraft des feuchten tropischen Klimas werden kann. Wir überschätzen sie daher wohl nicht, wenn wir sie im Durchschnitt durch die Volksdichte 200 ausdrücken.

2. Das periodisch trockene Savannenklima muß eine erheblich geringere Produktionskraft haben, da die Trockenzeit die Vegetation unterbricht. Aber zur feuchten Jahreszeit, also während der Hälfte des Jahres, ist sie wohl so groß wie in den feuchtwarmen Tropen. In der Tat finden wir in ihrem Bereiche nirgends so hohe Volksdichten wie in jenen. Sie erheben sich in der Präsidentschaft Madras auf 115 trotz des Exports von Reis. Die natürliche Volksdichte würde hier 120 überschreiten. Wir nehmen als Mittelwert der potentiellen für das ganze Gebiet 90.

3. Die Steppenklimate liegen nur zu rund $^1/_4$ in den Tropen, zu $^3/_4$ in den beiden gemäßigten Zonen. Hier wie da ist ihre Produktionskraft gering, wird aber stark, wo durchfließende Flüsse Bewässerung ermöglichen. Am Rande gegen das wintertrockene kalte Klima finden wir im Dongebiete eine Volksdichte von 21, höher noch ist die benachbarter Gouvernements an der Wolga. Doch wagen wir nicht, diese Randlagen zur Berechnung der höchsten denkbaren Einwohnerzahl der Steppengebiete heranzuziehen und wählen dafür die Volksdichte 10; die wahrscheinliche potentielle Volksdichte veranschlagen wir zu 5, weil die ostasiatischen Steppen Bewässerung großenteils ausschließen.

4. Das Wüstenklima ist theoretisch produktionsunfähig und sollte unbevölkert sein. Aber sobald Flüsse in sein Gebiet eintreten und dessen Bewässerung ermöglichen, gibt es Erträgnisse für eine große Bevölkerung.

---

[1] De l'influence de l'homme sur la terre. Annales de géographie X, 1901, S. 97 (211).

[2] Das Hochland von Mittel-Kamerun II, S. 60. Abhandlungen des Hamburgischen Kolonialinstituts XXXVI, 1916.

Ägypten ist das Schulbeispiel dafür. Seine 13 Millionen Bewohner und die der indischen Wüsten am Indus würden, auf alle Wüsten der Erde verteilt, denselben bereits eine Volksdichte von 1 geben. Diese wollen wir in unsere Rechnung einsetzen, obwohl auch einige Millionen in den Oasen Zentralasiens und des westlichen Nordamerika wohnen. Zur Berechnung der höchsten denkbaren Einwohnerzahl benutzen wir nicht den Wert von Ägypten, da dieser für einen ganz willkürlichen Ausschnitt des Landes gilt, sondern nehmen als höchste Dichte 3. Gleich dem Steppenklima liegt das Wüstenklima nur mit rund 5 Millionen Quadratkilometern in den Tropen, sonst außerhalb.

5. Köppens warmes wintertrockenes Klimagebiet umfaßt die die dichtest bevölkerten, sich selbst versorgenden größeren Länder, nämlich Bengalen und das südliche China. Im letzteren, von den großen Ebenen bis zum gebirgigen Szetschwan, leben auf 2 Millionen Quadratkilometern rund 320 Millionen Menschen, also 160 auf 1 qkm. In Bengalen steigert sich die Volksdichte auf 228, obwohl sich die Präsidentschaft von der Gangesebene bis tief in den Himalaja erstreckt. Aber wir dürfen kaum erwarten, daß bei ähnlich intensiver Bodenkultur wie in Vorderindien und China das gesamte warmtrockene Klimagebiet ähnlich große Volksdichten zu nähren vermöchte. Jene Länder genießen die Vorteile des Monsuns, der anderen fehlt. Als mittlere potentielle Volksdichte des Gebietes nehmen wir nur 110, vermutlich zu wenig, an.

6. Das warme, sommertrockene Klima ist bezeichnend für die Uferländer des Mittelmeeres. Das Italiens wird gewöhnlich als ein Musterbeispiel eines hierher gehörigen Landes angeführt. Sein intensiver Anbau bringt die Produktionskraft seines Klimas vorzüglich zur Geltung, seine Volksdichte von 125 mag daher zur Berechnung der höchsten denkbaren Bevölkerung dienen, obwohl es Nahrung importiert und aus dem Mittelmeerklima herausgreift; diesem schreiben wir insgesamt nur eine potentielle von 90 zu.

7. Die feucht-temperierten Klimate Köppens weisen in Japan, soweit sie es einschließen, also mit Ausnahme des Nordens, eine sehr hohe Volksdichte von nicht weniger als 220 auf. Auch in Europa sind sie dicht besiedelt. Freilich die Volksdichte des Deutschen Reiches (125) ist, wie sich im Kriege erwiesen hat, größer, als durch das Land ernährt werden kann, während die Frankreichs (71) höher sein würde, wenn die Bodenkultur dort die Ödländereien mehr einschränken würde. 100 scheint uns die größtmögliche in Europa zu sein; sie wurde selbst in Irland erreicht, bevor die starke Auswanderung die Bevölkerung der grünen Insel auf die Hälfte minderte. Damit dürfte wohl auch ein Mindestmaß für die mögliche Volksdichte für die Südoststaaten der Union gegeben sein. Amerikanische Gelehrte sind darin einig, daß die Vereinigten Staaten viel mehr Menschen bergen könnten als gegenwärtig, und, wie Brigham[1] richtig bemerkt, werden sie dabei leicht enthusiastisch. Aber er selbst wurde es nicht. Er schreibt dem Lande östlich der großen Ebenen, das in das feucht-temperierte Klima fällt, nur eine mögliche Volksdichte von 40 zu. Das ist entschieden viel zu wenig. Die Ver-

[1] Capacity of the United States for population. Popular Science Monthly. 1909. S. 209.

hältnisse Japans machen hier eine sehr viel größere Dichte einer sich selbst versorgenden Bevölkerung wahrscheinlich, die allerdings genügsamer leben müßte als die heutigen Amerikaner. Wir überschätzen die potentielle Dichte der feucht-temperierten Klimate mit 100 gewiß nicht.

8. und 9. Die subarktischen oder borealen Klimate Köppens umfassen weite Gebiete in der alten und neuen Welt, die sich vom Bereiche der feucht-temperierten Länder und der Steppen bis zur Tundra ziehen. Ihre Produktionskraft ist an der Grenze der ersteren ansehnlich, wie trotz rückständiger Bodenkultur die Volksdichte (106) jenes Teiles von Polen lehrt, der bislang als Kongreßpolen bezeichnet wurde, und wie jene der chinesischen Provinz Tschili (96) ohne Peking lehrt. Aber gegen die Tundra hin ist die Produktionskraft naturgemäß gering. Indes leben, allerdings nicht als reine Selbstversorger, in Finnland noch beinahe 10 Menschen auf 1 qkm, und eine Steigerung des Anbaus scheint dort immer noch möglich. Die produktionskräftigen subarktischen Gebiete sind die der ziemlich hohen Sommertemperatur, die Dfa-, Dfb- und Dwa-Klimate Köppens. Hier erscheinen Volksdichten von 80 noch möglich, in den Dfc- und Dfw-Gebieten durchschnittlich aber nur solche von 10. Im Mittel schreiben wir den borealen Klimaten Köppens, sowohl den feuchtwinter- als auch den trockenwinterkalten, eine potentielle Volksdichte von 30 zu.

10. Das Tundrenklima spendet nur indirekt Nahrung durch Vermittlung der Tiere, namentlich der Renntiere, sowie animalische Nahrung an den Küsten. Seine produktive Kraft ist äußerst gering, wenn auch Vilhjámur Stefánsson von einer freundlichen Arktis spricht[1]. Schon südlich von ihm finden sich in den nördlichsten Dörfern Finnlands kaum 0.1 Einwohner auf 1 qkm. Die 700000 qkm eisfreien Landes in Grönland ernähren nur 13000 Menschen. Es hängt die Zahl der Menschen in diesen Gebieten nicht ab von ihrem Fleiß, den Boden zu bebauen, sondern der Menge des jagdbaren Wildes. Verbesserte Jagdmethoden, namentlich die Anwendung von Feuerwaffen, vermögen das Erträgnis der Jagd zu steigern, mindern aber zu leicht dauernd die Menge des Wildes. Nur wenn das Abschießen nicht größer als die natürliche Vermehrung ist, kann der Mensch sich hier dauernd halten; das Beste, was er tun kann, um seine Existenz hier zu sichern, ist die Bekämpfung der Raubtiere, des Eisbären und des Wolfes, die seine Nahrung, Seehund und Renntier, mindern. Mit 0.01 setzen wir die mögliche Volksdichte in diesen Gebieten kaum zu niedrig an.

11. Köppens Klima des ewigen Frostes deckt sich mit dem Bereiche der Inlandeismassen des hohen Nordens und Südens, die natürlich menschenfrei sind.

In folgender Tabelle stellen wir die 11 Klimagebiete Köppens mit ihren von Hermann Wagner bestimmten Flächeninhalten zusammen; wir führen ihre dichtest besiedelten Gebiete an und die Volksdichten, nach denen wir die höchste mögliche Einwohnerzahl berechnen; endlich geben wir ihre wahrscheinliche potentielle Volksdichte und die daraus hergeleitete wahrscheinliche potentielle Einwohnerzahl an.

[1] The friendly arctic. New York 1922 (Länder der Zukunft. Leipzig 1923).

Klimate	I Flächeninhalt (Millionen qkm)	II Dichtest besiedelte Länder darin mit ihrer Volksdichte sowie angenommene größte Volksdichte (Einw. auf 1 qkm)		III Höchste denkbare Einwohnerzahl (Millionen)	IV Wahrscheinliche mittl. Volksdichte (Einw. auf 1 qkm)	V Wahrscheinliche größtmögliche Einwohnerzahl (Millionen)
1. Feuchtheiße Urwaldklimate	14.0	Westjava (400)	350	5600	200	2800
2. Periodisch trockene Savannenklimate	15.7	Madras	115	1806	90	1413
3. Steppenklimate	21.2	Dongebiet (10)	21	212	5	106
4. Wüstenklimate	17.9	Ägypten (3)	14	54	1	18
5. Warme wintertrockene Klimate	11.3	Bengalen	228	2576	110	1243
6. Warme sommertrockene Klimate	2.5	Italien	125	312	90	225
7. Feuchttemperierte Klimate	9.3	Südjapan	220	2046	100	930
8. Winterfeuchte kalte Klimate	24.5	Kongreßpolen	106	2597	30	735
9. Wintertrockene kalte Klimate	7.3	Tschili	96	701	30	219
10. Tundraklimate	10.3	Grönland	0.02	0.	0.01	0.
11. Klimate ewigen Frostes	15.0	Antarktika	0	0	0	0
Gesamte Landoberfläche	149.0		(107)	15904	51	7689

Aus unserer Tabelle erhellt, daß die höchste denkbare Einwohnerzahl der Erde 15.9 Milliarden ist, welche eine mittlere Volksdichte von 107 voraussetzen würde. Diese Zahlen erscheinen uns als ein äußerster Grenzwert, welcher schwerlich erreicht werden dürfte. Die wahrscheinlich größte Einwohnerzahl der Erde ergibt sich nur halb so groß, zu 7.689 Milliarden, also unwesentlich anders als nach der berichtigten Schätzung von Fircks. Wir beleuchten die Genauigkeit dieser Zahl, indem wir die Klimagebiete der Erde ins Auge fassen, deren potentielle Volksdichte wir vermutlich zu niedrig angesetzt haben. Nehmen wir sie im periodisch trockenen Savannenklima (2), im warmwintertrockenen Klima (4), im feuchttemperierten (7) um 10 höher an, nämlich zu 100, 120 und 110, und geben wir den Wüstenklimaten 2 Bewohner auf 1 qkm, so erhalten wir bereits 381 Millionen mehr als errechnet. Es ist also unser Schlußergebnis bereits in den Hunderten der Millionen unsicher, und wir dürfen es unbedenklich auf 8 Milliarden aufrunden. Aber auch diese Zahl erscheint noch keineswegs gesichert. Sie erhöht sich um 1.4 Milliarden, wenn wir als potentielle Dichte des feuchtheißen Urwaldklimas das Mittel aus Woeikofs und unserer Schätzung annehmen. Es dürfte sich die potentielle Bevölkerung der Erde zwischen 8 und 9 Milliarden bewegen. Dem

steht eine faktische von rund 1.8 Milliarden gegenüber. Es ist also der Lebensraum der Menschen nur etwa zu $^1/_5$ erfüllt. Sind nicht wenige Länder relativ übervölkert, d. h. übertrifft ihre faktische Bevölkerung ihre natürliche, sind einige absolut übervölkert, d. h. überschreitet ihre faktische Bevölkerung ihre potentielle, so ist das gesamte Land noch ziemlich weit von Übervölkerung entfernt. Diese würde nach unserer Berechnung erst eintreten, wenn 50—60 Menschen, und nicht bloß wie heute deren 12 im Durchschnitt auf 1 qkm wohnen würden.

Köppens tropische Regenklimate, nämlich die Urwald- und die Savannenklimate, fallen ganz in das Bereich der Tropen, die dünn besiedelten Steppen- und Wüstengebiete nur teilweise mit je 5 Millionen qkm, ebenso die warmen wintertrockenen Gebiete mit 7 Millionen qkm. Von den 8 Milliarden potentieller Bevölkerung der Erde entfallen $^5/_8$ auf die Tropen und $^3/_8$ auf die gemäßigte Zone. Hier wäre die größtmögliche Volksdichte 34, in den Tropen 107. Nicht nennenswert ist die Zahl der Menschen, die sich in den Polargebieten ernähren könnten. In der Tatsache, daß die Tropen mehr als dreimal so dicht besiedelt werden könnten als die gemäßigten Zonen, spiegelt sich die starke Beeinflussung der Produktionskraft der Erde durch das Klima. Nehmen wir die potentielle Bevölkerung der Erde zu 9 Milliarden an, so tritt dies noch deutlicher hervor, dann ergibt sich die Bewohnerschaft der Tropen zu $^2/_3$ der ganzen Menschheit, und die größtmögliche Volksdichte wird hier 128. Heute ist es anders. Von den rund 1.8 Milliarden, die gegenwärtig die Erde bewohnen, entfallen 1.3 Milliarden (72 Prozent) auf die gemäßigten Zonen, nur 0.5 Milliarden (28 Prozent) auf die Tropen[1].

Die Tropen sind, wie namentlich auch Woeikof[2] ausgesprochen hat, das Gebiet der großen Menschenanhäufungen der Zukunft, während es heute die gemäßigten Zonen sind. Die faktische Verteilung der Menschheit auf der Erde bringt den Einfluß des Klimas weit weniger zum Ausdruck als die potentielle. Wie eng die Beziehungen der letzteren zum Klima sind, erhellt, wenn wir die von Köppen unterschiedenen Klimagebiete nach den Gesichtspunkten gruppieren, die ich früher entwickelt habe[3]. Es ergibt sich folgende Reihe:

Klimagebiete (Penck).	nival	seminival	humid (temperiert)	humid (tropisch)	semihumid	semiarid	arid
» (Köppen)	(11)	(10. 9. 8)	(7)	(1)	(6. 5. 2)	(3)	(4)
Potent. Volksdichte ..	0	23	100	200	98	5	1
Anteil der Menschheit.	0	12.4 %	12.2 %	36.3 %	37.5 %	1.4 %	0.2 %

Wir sehen die warmfeuchten Klimate mit stärkster potentieller Volksdichte. Letztere sinkt mit abnehmender Temperatur zum nivalen Klima und mit abnehmendem Niederschlage zum ariden Klima. Nivales, seminivales, temperiert und tropisch humides Klima bilden den aufsteigenden, semihumides,

---

[1] Sapper gibt 569 Millionen an, rechnet aber ganz Britisch-Indien zu den Tropen, was wirtschaftsgeographisch zulässig ist, hier aber nicht getan werden kann. (Die Tropenländer in ihrer Bedeutung für deutschen Kolonialbesitz und Weltwirtschaft. Geogr. Zeitschr. XXIV, 1918, S. 385.)

[2] Verteilung der Bevölkerung auf der Erde unter dem Einfluß der Naturverhältnisse und der menschlichen Tätigkeit. Petermanns Mitteilungen 1906, S. 241 (247).

[3] Versuch einer Klimaklassifikation auf physiogeographischer Grundlage. Sitzungsber. d. phys.-math. Kl. d. Preuß. Akad. d. Wissensch., Berlin 1910, S. 236.

semiarides und arides den absteigenden Teil der Reihe. Die von uns vorausgesetzte enge Beziehung zwischen Produktionskraft des Klimas und potentieller Volksdichte wird in dieser Reihe erwiesen.

So weit wir heute noch von einer Übervölkerung der Erde entfernt sind, so ist doch kein Zweifel, daß wir ihr entgegengehen, und zwar mit Riesenschritten, wenn die Vermehrung der Menschheit in den nächsten Jahrhunderten so rasch geschieht wie im Laufe der letzten 50 Jahre. Während dieses Zeitraumes schätzt Hermann Wagner die Zunahme der Bevölkerung der Erde zu 425 Millionen Menschen[1]; dem entspricht eine jährliche Zunahme von 0.57 Prozent. Geht es in diesem Tempo weiter, so ist der Lebensraum der Menschen in weniger als 300 Jahren erfüllt, und der der gemäßigten Zonen bereits in etwa 150 Jahren. Viel eindringlicher als das Gesetz von Malthus lehrt uns unsere Betrachtung, daß die Zahl der Menschen auf der Erde eng begrenzt ist, und zwar nicht deswegen, weil die Vermehrung der Bevölkerung in anderer Proportion erfolgt als die Vergrößerungsmöglichkeit der Nahrung, sondern weil die letztere wegen der Beschränktheit der Nährfläche begrenzt ist. Hier liegt das große Problem der Wirtschaftsgeographie. Solange sich die Menschheit auf der Erde vermehrt, ist unausbleiblich, daß einmal die Erfüllung der Erde erfolgt, früher oder später.

Die von Malthus empfohlene Selbstbeschränkung in der Vermehrung der Menschheit scheint uns aber so lange nicht geboten, als noch Raum für viele vorhanden ist. Daß dies der Fall ist, ergab sich bisher aus unserer Untersuchung. Ob der Raum sich auf die Dauer so rasch füllt wie in den letzten 50 Jahren, kann billig bezweifelt werden. Die große Ausdehnung des Verkehrs im letzten Halbjahrhundert erschloß weite Gebiete der Erde der Kultur, die vorher brach lagen und die mühelos besetzt werden konnten. Solcher leicht benutzbarer Boden begünstigt die Vermehrung der Menschheit. Sobald wieder mit Mühe unter Widerwärtigkeiten Gebiete erobert werden müssen, wird so mancher Arbeiter erliegen; namentlich wird die Rodung des tropischen Urwaldes große Opfer an Menschen erheischen. Eine Verlangsamung in der Vermehrung der Bevölkerung der Erde wird dabei von selbst eintreten und braucht nicht durch eine Selbstbeschränkung erstrebt zu werden, welche vielleicht das Geborenwerden der Tüchtigsten hindert. Aber an die bevorstehende Erfüllung der Erde muß die Wirtschaftsgeographie immer denken, es gibt kein Land der unbegrenzten Möglichkeiten, und ihre Aufgabe besteht in erster Linie darin, auf die Hilfsmittel der Natur hinzuweisen, welche dem Menschen auf der Erdoberfläche zur Verfügung stehen. Die Art ihrer Nutzung ist Aufgabe der Wirtschaftslehre. Nicht durch Betrachtung der geographischen Verbreitung menschlicher Arbeit erschöpft die Wirtschaftsgeographie ihre Aufgabe. Sie ist eine Wissenschaft von natürlichen Gegebenheiten und deren örtlicher Ausnutzung. Im Mittelpunkte steht für sie die begrenzte Möglichkeit der Nahrungsbeschaffung für die ewig hungrige Menschheit. Die Agrargeographie ist der eigentliche Kern der Wirtschaftsgeographie, und diese erscheint berufen, bei einem großen Plane über die rationellste Bewirtschaf-

[1] Lehrbuch der Geographie, 10. Auflage, 1923, S. 739.

tung der Erde ein entscheidendes Wort mitzureden. Erfreulicherweise beginnt sie mehr und mehr die Landbauzonen zu würdigen und nicht bloß mehr statistische Tabellen über Verkehr und Produktion zu paraphrasieren.

Nicht weniger bedeutungsvoll wie für die Wirtschaftsgeographie ist das hier behandelte Hauptproblem der physischen Anthropogeographie für die politische Geographie. Sobald wir die potentielle Volksmenge derselben ins Auge fassen, werden wir sie besser würdigen, als wenn wir sie bloß nach Flächeninhalt und Einwohnerzahl klassifizieren, denn wir sehen nicht bloß Vorhandenes, sondern auch Mögliches, das die Zukunft erschließen kann. Fassen wir die auf zusammenhängender Landfläche sich dehnenden Staaten ins Auge, so ist heute Sowjetrußland der größte und das chinesische Reich der an Einwohnern reichste. Brasilien aber erscheint als derjenige mit der größten potentiellen Bevölkerung; es kann nahezu 1200 Millionen bergen. Groß sind trotz starker Bevölkerung auch die potentiellen Möglichkeiten in China; ich schätze dessen größtmögliche Bevölkerung auf mehr denn 600 Millionen Einwohner und halte sie für größer als die von den Vereinigten Staaten und Rußland mit rund 600 Millionen. Aber auch für das britische Weltreich mit den Gebieten, wo die weiße Bevölkerung herrscht, nämlich in dem absolut übervölkerten Stammlande mit einer potentiellen Bevölkerung von 30 Millionen, mit Canada (60 Millionen), der südafrikanischen Union (60 Millionen) und der Commonwealth von Australien (450 Millionen), ergibt sich nur eine mögliche Bevölkerung von 600 Millionen. Die beiden großen anglo-amerikanischen Mächte bieten zusammengenommen nur ebenso viel Raum für weiße Bevölkerung wie die Vereinigten Staaten von Brasilien für ihre zukünftige Bewohnerschaft und wie die hispano-amerikanischen Staaten zusammengenommen (1200 Millionen). Man sieht, welche gewaltigen Zukunftsmöglichkeiten bei den portugiesisch und spanisch redenden Völkern liegen, und daß sie — gleiche Grenzen für ihre Staaten auch in Zukunft vorausgesetzt —, das anglo-amerikanische Element von seiner gegenwärtigen dominierenden Stellung verdrängen können. Welche Verschiebungen in der Bevölkerung der einzelnen Erdteile denkbar sind, erhellt aus folgender Tabelle:

	Erde	Eurasien	Afrika	Australien	Nord-amerika	Süd-amerika
Faktische Bevölkerung 1920.....	1.8 Milliarden	80%	7%	0.5%	9%	3.5%
Potentielle Bevölkerung.....	8.0 »	26%	29%	6%	14%	25%

Unsere Tabelle läßt ahnen, daß große geschichtliche Umwälzungen die zunehmende Erfüllung der Erde mit Menschen begleiten werden. Eurasien kann seine führende Rolle als Hauptherd der Menschheit an Afrika verlieren, denn es vermag schließlich nicht viel mehr als $^1/_4$ der Menschen zu nähren, während es heute $^4/_5$ derselben beherbergt. Nordamerika, das sich seit mehr als einem Jahrhundert rasch mit Menschen füllte und heute einen großen Teil der Menschheit mit Nahrung versorgt, kann bei maximaler Leistung kaum mehr als halb soviel wie sein südlicher Nachbar produzieren und wird bei Erfüllung der Erde mit Menschen an vorletzter Stelle unter den Erd-

teilen stehen. Aber es muß im Auge behalten werden, daß nur die Summe der Menschen und nicht unbedingt die Verteilung der Menschen auf der Erde durch die Produktionskraft des Landes bestimmt werden. Wie heute kann auch in Zukunft der Verkehr ermöglichen, daß die Menschen an einer Stelle der Erde die Früchte verzehren, die eine andere hervorgebracht hat. Das ist die große Frage, ob die Tropen, wenn sie das Hauptproduktionsgebiet menschlicher Nahrung geworden sind, auch zugleich Sitz der größten Menschenmenge geworden sein werden, oder ob sie, wie Friedrich List meinte, bloß die Kornkammern für die Länder der gemäßigten Breiten sein werden, wo nach Huntington der Sitz der größten Arbeitsenergie und dementsprechend der Zivilisation ist. Für Entscheidung dieser wichtigen Zukunftsfrage kommt in Betracht, ob der Verkehr, der im letzten Jahrhundert so manche Schranke zwischen den Ländern zum Fallen brachte und durch seine neuen Mittel sich von den durch die Natur vorgezeichneten Bahnen vielfach frei machte, seine gegenwärtige Bedeutung auch für alle Zukunft beibehalten kann. Beruht er doch auf der Ausbeute der Schätze von Kohle und Eisen in der Erde, die ebenso begrenzt sind, wie die für die Nahrungsmittelproduktion verfügbare Fläche. Was nun aber auch eintreten möge, sicher bleibt das eine: es spielt sich das menschliche Leben auf einer beschränkten Fläche ab, und es kann die Zahl der Menschen über ein gewisses Maß nicht hinauswachsen. Diese wichtigste Grundlage für die geschichtliche Betrachtung des Menschengeschlechtes liefert die Erdkunde: Es läuft die menschliche Entwicklung, solange sie fortschreitet, einem bestimmten Ziele zu. Geographisch bedingt ist die Ausbreitung der menschlichen Kultur. Sie beginnt dort, wo die Bodenkultur leicht ist, wo der Boden nur bewässert zu werden braucht, um Erträgnisse zu liefern. In Wüsten und Steppen liegen die Wurzeln der alten Kultur Ägyptens und Mesopotamiens. Sie schreitet von hier zu den sommertrockenen Ländern des Mittelmeeres und zu den Monsunländern Asiens. Dann erst beginnt die große Kulturarbeit in der Rodung der Wälder an der Grenze der feuchttemperierten und kalten Klimate durch germanische Völker, erst in der alten Welt, zuletzt in der neuen. Hier wieder dringt sie mehr und mehr in die kalten Gebiete und hat hier die Grenzen des Möglichen noch nicht erreicht. In den Tropen hat sie bisher lediglich auf den Hochländern Fuß gefaßt, am frühsten in Dekkan, aber auch in Abessinien und in Amerika, in Mexiko und in Peru. In die feuchtheißen Urwälder ist sie jedoch noch nicht herabgestiegen. Hier bleibt noch die größte Kulturarbeit der Menschheit zu lösen. Die entgegenstehenden Hindernisse sind so groß, daß es der stärksten Notwendigkeit bedarf, sie zu überwinden. Das Nahrungsbedürfnis der wachsenden Menschheit wird dazu zwingen. Der Hunger, die kräftigste Ursache instinktiven menschlichen Handelns, wird es bewirken.

Gegenüber der hohen potentiellen Bevölkerung der Erde bleibt die faktische weit zurück. Darf das ferne zu erreichende Ziel bei keiner geographischen oder historischen Betrachtung außer acht gelassen werden, so steht doch das momentan erreichte im Vordergrund geographischen Interesses. Zu einer vollen Würdigung der Bedeutung der faktischen Volksdichte gehört nicht bloß der Vergleich mit der natürlichen, durch den Verkehr gemehrten

oder geminderten, sondern zugleich auch das Defizit, das die natürliche gegenüber der größtmöglichen aufweist. Erst dieses Bevölkerungsdefizit gibt uns das wahre Verständnis der Gesamtbevölkerung eines Landes, ob sie der Auffüllung rasch entgegengeht oder noch weit davon entfernt ist.

Nach unserer früheren Aufstellung hängt die faktische Bevölkerung eines Gebietes von dessen Produktionskraft und der Intensität der Bodenkultur ab. Das Bevölkerungsdefizit eines Landes erscheint hiernach als ein Defizit seiner Bodenkultur und, sofern man letztere als den Ausdruck seiner Kulturhöhe ansieht, als ein Kulturdefizit. Das trifft für viele Fälle entschieden zu. Alle die Länder, die wir in unserer Tabelle S. 251 als dichtest besiedelte der einzelnen Klimagebiete zur Schätzung von deren Kapazität für Menschen genommen haben, sind Gebiete mehr oder weniger hoher Kultur. Aber voll trifft nicht zu, daß die andern Länder jener Gebiete deswegen von niederer Kultur seien. Es gibt darunter viele, die eine wenig dichte natürliche Bevölkerung besitzen und doch hohe Kultur haben; ein U.-S.-Amerikaner würde wegen der geringen Volksdichte der Oststaaten gewiß nicht zugeben, daß er kulturell dem dichter wohnenden Japaner unterlegen sei. Das Bevölkerungsdefizit eines Landes hängt sowohl von der geringen Intensität der Bodenkultur wie auch vom Alter der Gesamtkultur daselbst ab. Was mehr oder weniger maßgebend ist, ist von Fall zu Fall zu untersuchen, wobei besonders im Auge zu behalten ist, daß die junge Kultur, möchte sie auch noch so hoch sein, in der Regel mit einer geringen Intensität der Bodenkultur Hand in Hand geht. Hier eröffnen sich für zukünftige Forschungen weite Perspektiven. Hier bietet sich ein Weg zur Gewinnung von Maßstäben für die Kulturhöhe von Völkern.

Unser Hauptproblem der Anthropogeographie hat mit allen Zweigen derselben Fühlung, welche sich nach Nachbarwissenschaften strecken, sowohl mit der Wirtschaftsgeographie als auch mit der politischen Geographie, mit der historischen Anthropogeographie und der Kulturgeographie im engeren Sinne des Wortes. Es knüpft alle diese Disziplinen eng an die Physiogeographie, mit der sie bisher zu wenig Fühlung hatten. Darin wurzelt ihr vielfach unbefriedigender Zustand, der hinsichtlich der Wirtschaftsgeographie nicht bloß vom Weltwirtschaftler beklagt wird[1], der aber nicht beseitigt wird, wenn man sie bloß mit den Nachbarwissenschaften in engere Berührung bringt, ohne ihre Beziehungen zur Geographie im engeren Sinne zu stärken. Nur wenn man in allen jenen Disziplinen von der Erdoberfläche ausgeht, wird man ihren geographischen Inhalt völlig zur Geltung bringen. Geht man, wie bisher vielfach geschehen, vom Menschen aus, so zieht man sie zu den Nachbarwissenschaften hinüber und bringt diesen nicht das, was sie brauchen und sich nicht selbst zu beschaffen in der Lage sind, nämlich die Fühlung mit der Erdoberfläche, dem Schauplatze der menschlichen Wirtschaft und Staatenbildung, der Weltgeschichte und Kultur.

Wie die Ermittlung der Eisen- und Kohlenvorräte eine Aufgabe der praktischen Geologie ist, welche damit der Wirtschaftslehre wichtige Grund-

[1] Bernhard Harms, Volkswirtschaft und Weltwirtschaft. Versuch der Begründung einer Weltwirtschaftslehre. Probleme der Weltwirtschaft VI, 1912, S. 407.

lagen geliefert hat, so ist die Bestimmung des dem Menschen zur Verfügung stehenden kulturfähigen Landes eine Hauptaufgabe der Geographie. Was in der vorliegenden Arbeit in dieser Hinsicht unternommen wurde, ist ein Versuch, Dinge zu schätzen, die gegenwärtig noch nicht erfaßt worden sind. Sollen die angeschnittenen Aufgaben näher verfolgt werden, so muß eine Bonitierung der Erdoberfläche vorgenommen werden, bei welcher viel kleinere Gebiete, als hier geschehen, in bezug auf ihre Produktionskraft ins Auge gefaßt werden müssen, wenn es auch nicht praktisch durchzuführen wäre, dabei so ins einzelne zu gehen wie bei den Bonitierungen unserer Gemeinden. Gewiß kann man dieselben auch bei einzelnen Untersuchungen heranziehen, aber fürs erste ist es nötig, ansehnlichere Flächen nach Klima und Bodenbeschaffenheit näher zu erforschen. Nur ein Physiogeograph, der mit Boden und Klima näher vertraut ist, kann eine solche Aufgabe lösen. Er wird dabei wesentlich gefördert werden, wenn er, wie es A. K. Cajander[1] bei Bonitierung der finnischen Forste tut, dem Auftreten charakteristischer Pflanzengemeinschaften volle Aufmerksamkeit schenkt. Will er dann, wie es rätlich ist, die Produktionskraft des Bodens gleich durch die Zahl der Menschen ausdrücken, die von der Flächeneinheit ernährt werden können, dann muß er Standardwerte über die Produktionskraft an gewissen Stellen zur Verfügung haben, die auf Musterwirtschaften zu gewinnen oder aus dem Ergebnis von Ernteerträgen herzuleiten wären. Weiter wäre der Konsumptionsbedarf des einzelnen zu bestimmen, und zwar nicht bloß nach dem ortsüblichen Verbrauch von Lebensmitteln, sondern auch auf dem Wege streng physiologischer Forschung.

Es ist selbstverständlich, daß nicht alles Land der Erde, und möchte es von noch so guter Beschaffenheit sein, ausschließlich für Gewinnung der menschlichen Nahrung verwendet werden kann. Kleidung, Holzbedarf, Verkehr und Wohnstätten beanspruchen ansehnliche Teile der Oberfläche, und zwar wegen Kleidung und Erwärmung in den höheren Breiten viel größere als in niederen. Aufgabe einer geographisch orientierten Weltwirtschaft wird sein, diese Flächen so auszuwählen, daß das Gesamterträgnis der Erde an Nahrung, Kleidung und Holz ein Maximum wird und ein Minimum von Kräften für den Transport vom Orte der Gewinnung zum Orte des Gebrauchs erheischt. Von einer solchen idealen Weltwirtschaft sind wir allerdings noch sehr weit entfernt. Noch steht die Volkswirtschaft in erster Linie des Interesses, und sie hat noch nicht einmal in den bestkultivierten Staaten eine streng rationelle Gliederung der Bodenproduktion durchsetzen können. Noch müht sich der Bauer auf kargem Boden zu ernten, während der beste daneben aus Gründen der historischen Entwicklung manchmal noch vom Walde eingenommen wird. Noch fehlt vielfach die zwingende Notwendigkeit, mit dem Überlieferten zu brechen. Aber diese Notwendigkeit wird kommen in dem Maße, als sich die Erde mit Menschen füllt.

---

[1] Über Waldtypen. Acta forestalia fennica. I. Helsingfors 1913, S. 155. Über Waldtypen. II. Ebenda XX. 1922, S. 11.

Vom Zahnwechsel bei polychäten Anneliden.

Von Karl Heider.

Als ich im Jahre 1922 meine kleine Mitteilung über den Zahnersatz bei *Staurocephalus*[1] veröffentlichte, war mir nicht gegenwärtig, daß eine Beobachtung von Ehlers[2] vorliegt, welche notwendigerweise in diesem Zusammenhange erwähnt werden muß. Ich hole jetzt das Versäumte nach.

Ehlers beschreibt an einer Form, die er als *Eunice harassii* Aud. et Edw. bezeichnet und eingehend in mustergültiger Weise darstellt, welche aber den Gesetzen der Priorität folgend als *Eunice* (*Leodice*) *fasciata*[3] Risso bezeichnet werden muß, ein Exemplar, an welchem die dunklen, stark chitinisierten Kiefer abgeworfen waren und nur die blasse, weichhäutige, zelluläre, innere Ausfüllungsmasse dieser Hohlgebilde vorlag. Also offenbar ein Exemplar, welches die stark chitinisierte Innenwand des Kiefersackes mit allen ihren Anhangsgebilden durch einen Häutungsprozeß verloren hatte und im Begriffe stand, neue Kieferbildungen von der erhalten gebliebenen Matrix aus abzuscheiden. Ehlers schreibt auf Seite 321:

»Unter dieser Chitinhaut liegt als Matrix die feinkörnige Subcuticularschicht, unter den derben Chitinmassen der Kieferstücke in größerer Anhäufung. Nach meinem Befunde an einem Exemplar können die Kiefer wie andere Chitinbildungen abgeworfen werden, dann aber nicht einzeln, sondern wahr-

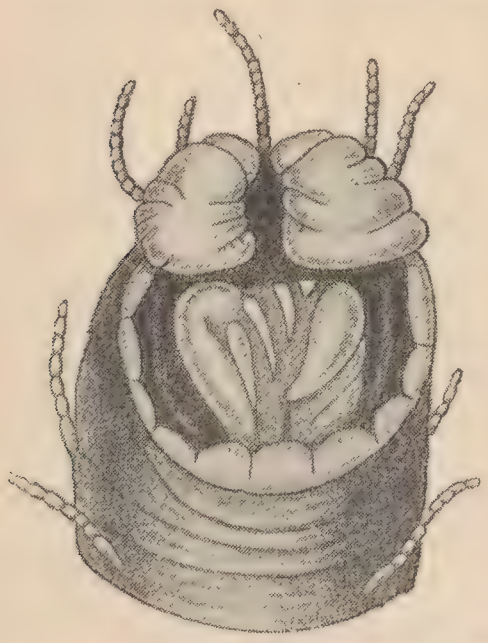
---

[1] K. Heider, Über Zahnwechsel bei polychäten Anneliden. Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1922. Phys.-math. Klasse. S. 488.

[2] E. Ehlers, Die Borstenwürmer. Leipzig 1864—68. S. 321.

[3] Im Mittelmeer kommen zwei nahe verwandte Arten der Gattung *Eunice* vor, welche vielfach verwechselt und miteinander zusammengeworfen wurden. Schon Risso hat 1826 in seiner Histoire Nat. des Principales Productions de l'Europe Méridionale (Paris) die beiden durch Unterschiede der Färbung und Zeichnung im Leben gut gekennzeichneten Arten auseinandergehalten und S. 421 als *Leodice fasciata* Risso und *Leodice punctata* Risso kenntlich beschrieben. *Leodice fasciata* hat eine dunkler weinrote bis lederbraune Färbung und eine weiße Querbinde am 4. Segmente. Weiße Flecken fehlen am Rücken der Segmente im vorderen Körperdrittel. *Leodice punctata* Risso hat einen helleren Grundton, mehr fleischrot, keine weiße Querbinde am 4. Segmente und vom 2. Körpersegmente ab eine ungemein charakteristische Anordnung von weißen Flecken in drei Längsreihen. An konservierten Stücken, an denen diese Merkmale nicht mehr kenntlich sind, erkennt man, daß die fünf Fühler am Kopfe bei *Leodice fasciata* deutlich rosenkranzförmig kurz geringelt sind, und ähnlich verhalten sich die Dorsalcirren der vorderen Segmente, während bei *Leodice punctata* Risso die Fühler langgegliedert sind und an den Dorsalcirren die Gliederung undeutlich wird. *Eunice* (*Leodice*) *fasciata* Risso ist synonym mit *Eunice claparedii* Qtrfgs. (Hist. Nat. d. Annél. Paris 1865. Bd. II, 2. S. 652) und der *Eunice torquata* Qtrfgs. nahestehend. Dagegen ist die *Eunice* (*Leodice*) *punctata* Risso die echte *Eunice harassii* von Aud. und Edw., von welcher De Saint Joseph 1888 eine neue Beschreibung geliefert hat.

scheinlich der ganze Apparat ziemlich gleichmäßig; und von der Matrix des Chitins erfolgt durch erneute Ausscheidung die Neubildung einer jungen Schlundbewaffnung. So wenigstens muß ich meinen Fund deuten, wo bei einer sehr großen *Eunice harassii* aus der Mundöffnung nicht die dunklen Kieferspitzen, sondern weiße, weiche Wülste hervorragten (Tafel XIV, Fig. 2, im beifolgenden als unsere Figur reproduziert) und wo bei der Zergliederung sich im Innern des Kiefersackes vollständige Vorsprünge fanden, welche den Formen der Zangen und Zähne fast gleichkamen, aber ebenfalls weich und weiß waren. Alle diese Wülste und Vorsprünge waren von einem feinen, irisierenden Chitinhäutchen bekleidet und nichts anderes als die Kieferfalten, welche nach dem Verluste der ausgebildeten erhärteten Kieferstücke im Anfang einer Neubildung desselben standen.«



Kopie der Ehlersschen Fig. 2 auf Tafel XIV. Vorderende von *Eunice harassii* mit abgeworfenen Kiefern.

Ehlers ist sonach der erste, welcher einen Kiefer- und Zahnersatz bei Polychäten erkannt hat. Dieser schöne Fund ist von allgemeinerer Bedeutung. Wenn ich früher überlegte, ob der Zahnwechsel bei *Staurocephalus* eine singuläre, nur dieser Gattung zukommende Erscheinung sei, oder ob sich Ähnliches auch bei den mit größeren Kieferstücken versehenen Eunicidengattungen findet, so sagte ich mir, daß bei dem Anwachsen der Tiere sich naturgemäß auch der Kieferapparat entsprechend vergrößern müsse. Ein solches Anwachsen der Kieferstücke konnte ich mir aber nur unter dem Bilde einer Häutung denken. Da die Beobachtung von Ehlers vorliegt, welche meine an *Staurocephalus* gemachten in wünschenswerter Weise ergänzt, so dürfen wir verallgemeinernd aussprechen, daß ein solcher Zahnwechsel allen Euniciden zukommt und allgemein wohl für alle jene Polychäten, denen überhaupt Kieferstücke zukommen, wahrscheinlich ist.

Im einzelnen besteht zwischen dem Zahnersatz bei *Staurocephalus* und bei *Eunice* der Unterschied, daß bei ersterer Form die neuen Zähnchen in förmlichen Zahnsäckchen unter den alten Zähnen ausgebildet werden, nach deren Verlust sie offenbar sofort emporrücken, während bei *Eunice* nach der Abwerfung der alten Kiefer die neuen erst gebildet werden müssen. Hier finden wir keinerlei Zahnsäckchen. Derartige Bildungen würden in dem Gewebe des Kiefersackes auch kaum Platz finden. Der bei *Staurocephalus* realisierte Typus des Zahnersatzes ist für das Tier der günstigere, weil in diesem Falle die kritische Periode des Wechsels auf ein Minimum eingeschränkt ist, während bei *Eunice* das Tier in der Zeitspanne zwischen dem Verlust der alten Kiefer und ihrem Ersatz durch Neubildung offenbar verteidigungsunfähig und einer Hungerperiode ausgesetzt ist.

Wir wissen durch Ehlers, daß der ganze Kieferapparat mit allen seinen Bestandteilen im selben Zeitpunkt abgeworfen und erneuert wird. Das gleiche nehme ich jetzt auch für *Staurocephalus* als wahrscheinlich an. Ob in dem Falle von *Eunice* die ganze kutikulare innere Auskleidung des Schlundsackes mit allen ihr angehörigen Hohlgebilden, wie Zangen, Zähne, Sägeplatten usw., als ein einziges Stück in continuo abgeworfen wird, oder ob sie vorher in

mehrere Stücke zerbröckelt, muß dahingestellt bleiben. Es wäre wohl von Interesse, eine solche Exuvie zu Gesicht zu bekommen. Mir will es wahrscheinlich vorkommen, daß die Innenauskleidung des Schlundsackes als Ganzes abgestoßen wird, weil mir scheint, wie wenn in diesem Falle das Ablösen und Herausziehen der weichen zellulären Füllmasse aus den kutikularen Hohlgebilden sich leichter und mit größerer Sicherheit bewerkstelligen ließe. Aber das kann wohl auch anders sein. Nicht Überlegungen sondern Beobachtungen entscheiden.

Die Erneuerung des Kieferapparates erinnert an das Abwerfen der Borsten und ihren Ersatz durch neue nachgebildete. Man findet in der Literatur viele zerstreute Angaben, welche sich auf den Borstenwechsel, auf ihren Ersatz durch neue Borsten, welche eventuell auch von anderer Gestalt sein können, usw. beziehen. Man hat neben der vollentwickelten Azikula eine zweite, im Werden begriffene Ersatz-Azikula beobachtet usf.

Zahnersatz und Borstenersatz bei polychäten Anneliden sind nur Teilerscheinungen eines Häutungsphänomens. Dieses führt zur Frage nach der Art der Abstoßung der allgemeinen, die ganze Körperoberfläche bedeckenden Kutikula. Daß sie in bestimmten Zeiten abgestoßen und neu gebildet wird, kann bei dem Heranwachsen der Tiere nicht in Frage gestellt sein. Denn bei Tieren mit kutikularer Bedeckung vollzieht sich das Körperwachstum unter Häutungserscheinungen. Aber ich betrete ein etwas unsicheres Gebiet, wenn ich von Häutung bei polychäten Anneliden spreche. Aus der Literatur sind mir nur ziemlich unbestimmt lautende Angaben bekannt. Ich selbst habe niemals in Aquarien eine abgestoßene Haut eines Polychäten zu Gesicht bekommen. Ich habe mich deshalb mit der Annahme beruhigt, daß hier — wie man dies auch für Regenwürmer angenommen hat — die allgemeine Kutikula nicht in continuo, sondern in einzelnen Stückchen abgeworfen wird.

Quantentheorie des einatomigen idealen Gases.

Von A. EINSTEIN.

Eine von willkürlichen Ansätzen freie Quantentheorie des einatomigen idealen Gases existiert bis heute noch nicht. Diese Lücke soll im folgenden ausgefüllt werden auf Grund einer neuen, von Hrn. D. BOSE erdachten Betrachtungsweise, auf welche dieser Autor eine höchst beachtenswerte Ableitung der PLANCKschen Strahlungsformel gegründet hat[1].

Der im folgenden im Anschluß an BOSE einzuschlagende Weg läßt sich so charakterisieren. Der Phasenraum eines Elementargebildes (hier eines einatomigen Moleküls) in bezug auf ein gegebenes (dreidimensionales) Volumen wird in »Zellen« von der Ausdehnung h^3 eingeteilt. Sind viele Elementargebilde vorhanden, so ist deren für die Thermodynamik in Betracht kommende (mikroskopische) Verteilung durch die Art und Weise charakterisiert, wie die Elementargebilde über diese Zellen verteilt sind. Die »Wahrscheinlichkeit« eines makroskopisch definierten Zustandes (im PLANCKschen Sinne) ist gleich der Anzahl der verschiedenen mikroskopischen Zustände, durch welche der makroskopische Zustand realisiert gedacht werden kann. Die Entropie des makroskopischen Zustandes und damit das statistische und thermodynamische Verhalten des Systems wird dann durch den BOLTZMANNschen Satz bestimmt.

§ 1. Die Zellen.

Das Phasenvolum, welches zu einem gewissen Bereich der Koordinaten x, y, z und zugehörigen Momente p_x, p_y, p_z eines einatomigen Moleküls gehört, wird durch das Integral

$$\Phi = \int dx\, dy\, dz\, dp_x dp_y dp_z \qquad (1)$$

ausgedrückt. Ist V das dem Molekül zur Verfügung stehende Volumen, so ist das Phasenvolumen aller Zustände, deren Energie $E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ kleiner ist als ein bestimmter Wert E, gegeben durch

$$\Phi = V \cdot \frac{4}{3}\pi (2mE)^{\frac{3}{2}}. \qquad (1a)$$

[1] Erscheint nächstens in der »Zeitschr. für Physik«.

Die Zahl Δs der Zellen, welche zu einem bestimmten Elementargebiet ΔE der Energie gehört, ist folglich

$$\Delta s = 2\pi \frac{V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} \Delta E . \qquad (2)$$

Bei beliebig klein gegebenen $\frac{\Delta E}{E}$ kann man V stets so groß wählen, daß Δs eine sehr große Zahl ist.

§ 2. Zustands-Wahrscheinlichkeit und Entropie.

Wir definieren nun den makroskopischen Zustand des Gases.

Es seien nun im Volumen Vn Moleküle von der Masse m vorhanden. Δn derselben mögen Energiewerte zwischen E und $E+\Delta E$ besitzen. Dieselben verteilen sich unter die Δs Zellen. Unter den Δs Zellen sollen enthalten

$p_0 \Delta s$ kein Molekül,
$p_1 \Delta s$ 1 Molekül,
$p_2 \Delta s$ 2 Moleküle
usw.

Die zur $s$ten Zelle gehörigen Wahrscheinlichkeiten p_r sind dann offenbar Funktionen der Zellenzahl s und des ganzzahligen Index r, und sie sollen daher im folgenden ausführlicher mit p_r^s bezeichnet werden. Es ist offenbar für alle s

$$\sum_r p_r^s = 1 . \qquad (3)$$

Bei gegebenen p_r^s und gegebenem Δn ist die Anzahl der möglichen Verteilungen der Δn Moleküle über das betrachtete Energiegebiet gleich

$$\frac{\Delta s!}{\prod_{r=0}^{r=\infty} (p_r^s \Delta s)!},$$

was nach dem Stierlingschen Satze und der Gleichung (3) durch

$$\frac{1}{\prod_r p_r^{s \Delta s p_r^s}}$$

ersetzt werden kann, wofür man auch das über alle r und s laufende Produkt

$$\frac{1}{\prod_{rs} p_r^{s p_r^s}} \qquad (4)$$

setzen kann. Erstreckt man die Produktbildung über alle Werte von s von 1 bis ∞, so stellt (4) offenbar die Gesamtzahl der Komplexionen bzw. die Wahrscheinlichkeit im Planckschen Sinne eines durch die p_r^s definierten (makroskopischen) Zustandes des Gases dar. Für die Entropie S dieses Zustandes liefert der Boltzmannsche Satz den Ausdruck

$$S = -\varkappa \lg \sum_{sr} (p_r^s \lg p_r^s) . \qquad (5)$$

§ 3. Thermodynamisches Gleichgewicht.

Beim thermodynamischen Gleichgewicht ist S ein Maximum, wobei außer (3) den Nebenbedingungen zu genügen ist, daß die Gesamtzahl n der Atome sowie deren Gesamtenergie $\overline{E}$ gegebene Werte besitzen. Diese Bedingungen drücken sich offenbar in den beiden Gleichungen aus[1]

$$n = \sum_{sr} r p_r^s \tag{6}$$

$$\overline{E} = \sum_{sr} E^s r p_r^s , \tag{7}$$

wobei E^s die Energie eines Moleküls bedeutet, welches zur $s$ten Phasenzelle gehört. Aus (1a) folgert man leicht, daß

$$\left.\begin{aligned} E^s &= c s^{\frac{2}{3}} \\ c &= (2m)^{-1} h^2 \left(\frac{4}{3}\pi V\right)^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}\right\} . \tag{8}$$

Durch Ausführung der Variation nach den p_r^s als Variabeln findet man, daß bei passender Wahl der Konstanten β^s, A und B

$$\left.\begin{aligned} p_r^s &= \beta^s e^{-\alpha^s r} \\ \alpha^s &= A + B s^{\frac{2}{3}} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

sein muß. Gemäß (3) muß hierbei sein

$$\beta^s = 1 - e^{-\alpha^s} . \tag{10}$$

Hieraus ergibt sich zunächst für die mittlere Zahl der Moleküle pro Zelle

$$= \sum_r r p_r^s = \beta^s \sum_r r e^{-\alpha^s r} = -\beta^s \frac{d}{d\alpha^s}\left(\sum e^{-\alpha^s}\right) = -\beta^s \frac{d}{d\alpha^s}\left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha^s}}\right) = \frac{1}{e^{\alpha^s} - 1} . \tag{11}$$

Die Gleichungen (6) und (7) nehmen also die Form an

$$n = \sum_s \frac{1}{e^{\alpha^s} - 1} \tag{6a}$$

$$\overline{E} = c \sum \frac{s^{\frac{2}{3}}}{e^{\alpha^s} - 1} , \tag{7a}$$

welche Gleichungen zusammen mit

$$\alpha^s = A + B s^{\frac{2}{3}}$$

die Konstanten A und B bestimmen. Damit ist das Gesetz der makroskopischen Zustandsverteilung für das thermodynamische Gleichgewicht vollständig bestimmt.

---

[1] $n^s = \sum_r r p_r^s$ ist nämlich die im Mittel auf die $s$te Zelle entfallende Zahl von Molekülen.

Durch Einsetzen der Ergebnisse dieses Paragraphen in (5) ergibt sich für die Gleichgewichtsentropie der Ausdruck

$$S = -\varkappa\left\{\sum_s [\lg(1-e^{-\alpha^s})] - An - \frac{B}{c}\overline{E}\right\}. \qquad (12)$$

Wir haben nun die Temperatur des Systems zu berechnen. Zu dem Zweck wenden wir die Definitionsgleichung der Entropie auf eine unendlich kleine isopyknische Erwärmung an und erhalten

$$d\overline{E} = TdS = -\varkappa T\left\{\sum_s \frac{d\alpha^s}{1-e^{\alpha^s}} - ndA - \frac{\overline{E}}{c}dB - Bd\left(\frac{\overline{E}}{c}\right)\right\},$$

was mit Rücksicht auf (9), (6) und (7) ergibt

$$d\overline{E} = \varkappa TBd\left(\frac{\overline{E}}{c}\right) = \varkappa T\frac{B}{c}d\overline{E}$$

oder

$$\frac{1}{\varkappa T} = \frac{B}{c}. \qquad (13)$$

Damit ist auch die Temperatur indirekt durch die Energie und die übrigen gegebenen Größen ausgedrückt. Aus (12) und (13) folgt noch, daß die freie Energie F des Systems gegeben ist durch

$$F = \overline{E} - TS = \varkappa T\left\{\lg\sum_s (1-e^{-\alpha^s}) - An\right\}. \qquad (14)$$

Für den Druck p des Gases ergibt sich hieraus

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = -\varkappa T\frac{\overline{E}}{c}\frac{\partial B}{\partial V} = -\overline{E}\frac{\partial \lg c}{\partial V} = \frac{2}{3}\frac{\overline{E}}{V}. \qquad (15)$$

Es ergibt sich also das merkwürdige Resultat, daß die Beziehung zwischen der kinetischen Energie und dem Druck genau gleich herauskommt wie in der klassischen Theorie, wo sie aus dem Virialsatz abgeleitet wird.

§ 4. Die klassische Theorie als Grenzfall.

Vernachlässigt man die Einheit gegenüber e^{α^s}, so erhält man die Ergebnisse der klassischen Theorie; aus dem folgenden wird sich bald ergeben, unter was für Bedingungen diese Vernachlässigung berechtigt ist. Gemäß (11), (9), (13) ist dann die mittlere Zahl n^s der Moleküle pro Zelle gegeben durch

$$n^s = e^{-\alpha^s} = e^{-A}\cdot e^{-\frac{E^s}{\varkappa T}}. \qquad (11a)$$

Die Zahl der Moleküle, deren Energie in dem Elementarbereich dE^s liegt, ist also gemäß (8) gegeben durch

$$\frac{3}{2}c^{-\frac{3}{2}}e^{-A}e^{-\frac{E}{\varkappa T}}E^{\frac{1}{2}}dE, \qquad (11b)$$

im Einklang mit der klassischen Theorie. Gleichung (6) liefert demnach bei Anwendung derselben Vernachlässigung

$$e^A = \pi^{\frac{3}{2}} h^{-3} \frac{V}{n} (2 m \varkappa T)^{\frac{3}{2}} . \qquad (16)$$

Für Wasserstoffgas von Atmosphärendruck ist diese Größe etwa gleich $6 \cdot 10^4$, also sehr groß gegen 1. Hier liefert also die klassische Theorie noch eine recht gute Näherung. Der Fehler nimmt aber mit wachsender Dichte und mit sinkender Temperatur erheblich zu und ist für Helium in der Gegend des kritischen Zustandes recht beträchtlich; allerdings kann dann von einem idealen Gase durchaus nicht mehr die Rede sein.

Wir berechnen nun aus (12) die Entropie für unseren Grenzfall. Indem man in (12) $\lg (1 - e^{-\alpha s})$ durch $-e^{-\alpha s}$ und dies durch $-\frac{1}{e^{\alpha s} - 1}$ ersetzt, erhält man unter Berücksichtigung von (6a)

$$S = \nu R \lg \left[e^{\frac{5}{2}} \frac{V}{h^3 n} (2 \pi m \varkappa T)^{\frac{3}{2}} \right] , \qquad (17)$$

wobei ν die Anzahl der Mole, R die Konstante der Zustandsgleichung der idealen Gase bedeutet. Dies Ergebnis über den Absolutwert der Entropie steht im Einklang mit wohlbekannten Ergebnissen der Quantenstatistik.

Nach der hier gegebenen Theorie ist das NERNSTsche Theorem für ideale Gase erfüllt. Zwar lassen sich unsere Formeln auf extrem tiefe Temperaturen nicht unmittelbar anwenden, weil wir bei ihrer Ableitung vorausgesetzt haben, daß die p_r^s sich nur relativ unendlich wenig ändern, wenn s sich um 1 ändert. Indessen erkennt man unmittelbar, daß die Entropie beim absoluten Nullpunkt verschwinden muß. Denn dann befinden sich alle Moleküle in der ersten Zelle; für diesen Zustand gibt es aber nur eine einzige Verteilung der Moleküle im Sinne unserer Zählung. Hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung.

§ 5. Die Abweichung von der Gasgleichung der klassischen Theorie.

Unsere Ergebnisse bezüglich der Zustandsgleichung sind in folgenden Gleichungen enthalten:

$$n = \sum_\sigma \frac{1}{e^{\alpha s} - 1} \qquad (18) \quad \text{(vgl. (6a))}$$

$$\overline{E} = \frac{3}{2} pV = c \sum_\sigma \frac{s^{\frac{2}{3}}}{e^{\alpha s} - 1} \qquad (19) \quad \text{(vgl. (7a) und (15))}$$

$$\alpha^s = A + \frac{c s^{\frac{2}{3}}}{\varkappa T} \qquad (20) \quad \text{(vgl. (9) und (13))}$$

$$c = \frac{E^s}{s^{\frac{2}{3}}} = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{4}{3} \pi V \right)^{-\frac{2}{3}} . \qquad (21) \quad \text{(vgl. (8))}$$

Diese Ergebnisse wollen wir nun umformen und diskutieren. Aus den Überlegungen des § 4 geht hervor, daß die Größe e^{-A}, welche wir mit λ bezeichnen wollen, kleiner als 1 ist. Sie ist ein Maß für die »Entartung« des Gases. Wir können nun (18) und (19) in Form von Doppelsummen so schreiben

$$n = \sum_{s\tau} \lambda^\tau e^{-\frac{cs^{\frac{2}{3}}\tau}{\varkappa T}} \tag{18a}$$

$$\overline{E} = c \sum_{s\tau} s^{\frac{2}{3}} \lambda^\tau e^{-\frac{cs^{\frac{2}{3}}\tau}{\varkappa T}}, \tag{19a}$$

wobei über τ für alle σ von 1 bis ∞ zu summieren ist.

Wir können die Summation über s ausführen, indem wir sie durch eine Integration von 0 bis ∞ ersetzen. Dies ist gestattet wegen der langsamen Veränderlichkeit der Exponentialfunktion mit σ. Wir erhalten so:

$$n = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{\varkappa T}{c}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_\tau \tau^{-\frac{3}{2}} \lambda^\tau \tag{18b}$$

$$\overline{E} = c\frac{9\sqrt{\pi}}{8}\left(\frac{\varkappa T}{c}\right)^{\frac{5}{2}} \sum_\tau \tau^{-\frac{5}{2}} \lambda^\tau . \tag{19b}$$

(18b) bestimmt den Entartungsparameter λ als Funktion von V, T und n, (19b) hieraus die Energie und damit auch den Druck des Gases.

Die allgemeine Diskussion dieser Gleichungen kann so geschehen, daß man die Funktion aufsucht, welche die Summe in (19b) durch die Summe in (18b) ausdrückt. Allgemein erhält man durch Division

$$\frac{\overline{E}}{n} = \frac{3}{2}\varkappa T \frac{\sum_\tau \tau^{-\frac{5}{2}} \lambda^\tau}{\sum_\tau \tau^{-\frac{3}{2}} \lambda^\tau} . \tag{22}$$

Die mittlere Energie des Gasmoleküls bei der Temperatur (sowie der Druck) ist also stets geringer als der klassische Wert, und zwar ist der die Reduktion ausdrückende Faktor desto kleiner, je größer der Entartungsparameter λ ist. Dieser selbst ist gemäß (18b) und (21) eine bestimmte Funktion von $\left(\frac{V}{n}\right)^{\frac{2}{3}} mT$.

Ist λ so klein, daß λ^2 gegen 1 vernachlässigt werden darf, so erhält man

$$\frac{E}{n} = \frac{3}{2}\varkappa T\left[1 - 0.0318 h^3 \frac{n}{V}(2\pi m \varkappa T)^{-\frac{3}{2}}\right]. \tag{22a}$$

Wir überlegen nun noch, in welcher Weise die Maxwellsche Zustandsverteilung durch die Quanten beeinflußt wird. Entwickelt man (11) unter Berücksichtigung von (20) nach Potenzen von λ, so erhält man

$$n^s = \text{konst}\, e^{-\frac{E^s}{\varkappa T}}\left(1 + \lambda e^{-\frac{E^s}{\varkappa T}} + \cdots\right). \tag{23}$$

Die Klammer drückt den Quanteneinfluß auf das MAXWELLsche Verteilungsgesetz aus. Man sieht, daß die langsamen Moleküle gegenüber den raschen häufiger sind, als es gemäß MAXWELLS Gesetz der Fall wäre.

Zum Schluß möchte ich auf ein Paradoxon aufmerksam machen, dessen Auflösung mir nicht gelingen will. Es hat keine Schwierigkeit, nach der hier angegebenen Methode auch den Fall der Mischung zweier verschiedener Gase zu behandeln. In diesem Falle hat jede Molekülsorte ihre besonderen »Zellen«. Daraus ergibt sich dann die Additivität der Entropien der Komponenten des Gemisches. Jede Komponente verhält sich also bezüglich Molekülenergie, Druck und statistischer Verteilung, wie wenn sie allein vorhanden wäre. Ein Gemisch von den Molekülzahlen n_1, n_2, dessen Moleküle erster und zweiter Art sich beliebig wenig (im besonderen bezüglich der Molekülmasse m_1, m_2) voneinander unterscheiden, liefert also bei gegebener Temperatur einen anderen Druck und eine andere Zustandsverteilung als ein einheitliches Gas von der Molekülzahl $n_1 + n_2$ von praktisch derselben Molekülmasse und demselben Volumen. Dies erscheint aber so gut wie unmöglich.

Ausgegeben am 20. September.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1924

XXIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 17. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

*1. Hr. Schmidt sprach über die Bestimmung eines Systems Hencky-Prandtlscher Gleitlinienscharen plastischer Körper im rotationssymmetrischen Falle.

Es werden diejenigen Gleitlinienscharen bestimmt, welche eine konforme Abbildung der Meridianebene auf die Ebene der Kurvenparameter vermitteln.

2. Hr. Bieberbach legte vor: Leonhard Eulers und Johann Heinrich Lamberts Briefwechsel, aus den Manuskripten herausgegeben von Prof. Dr. Karl Bopp in Heidelberg. (Abh.)

18 Stücke des Briefwechsels aus den Jahren 1758—1772.

Ausgegeben am 20. September.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XXIV. Gesamtsitzung. 24. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Wilhelm Schulze sprach über die Stellung des Tocharischen im Kreis der indogermanischen Sprachen und überreichte eine Mitteilung über die reduplizierten Präterita des Tocharischen und des Germanischen.

1. Die ursprünglich labiovelare Natur bestimmter *k*-Laute scheint sich in A durch die *u*-Färbung des vorausgehenden oder folgenden Vokals zu verraten. Vgl. u. a. *kumnässi* »kommen« mit dem Imperativ *pu-kmäs* »kommt« (im Gegensatz zu *pä-klyoṣ* »höre«), *kukäl* »Wagen« (eig. »Rad«, κύκλος), *kuryar* »Handel« (zu ai. *krī*?). Auch das Kasussystem mit seiner deutlichen Gliederung in primäre Kasus (Nom., Obl., Gen.) und sekundäre (durch Anhängung von Postpositionen an den Obliquus entstandene Pseudokasus) stimmt zu dem, was man nach Jacobsohn von einer, später unter fremden Einfluß geratenen *centum*-Sprache zu erwarten hat.

2. Die A-Präterita *cacäl paprutäk wawik* verhalten sich zu den B-Formen *cāla prautka yaika* fast genau wie urgerm. *hehait stestaut* zu as. *hēt steot.*

2. Hr. Roethe legte vor »Deutsche Texte des Mittelalters« Band XXXI: Konrad von Helmsdorf, Der Spiegel des menschlichen Heils, herausgeg. von Axel Lindquist (Berlin 1924).

3. Hr. Eduard Meyer überreichte sein Werk »Kleine Schriften«, Bd. I (2. Auflage) und II (Halle a. S. 1924).

4. Hr. Engler legte vor das 86. Heft (IV. 105) des Werkes »Das Pflanzenreich«: *Cruciferae — Sisymbrieae*, von O. E. Schulz (Leipzig 1924).

5. Die Preußische Akademie der Wissenschaften hat bewilligt

durch ihre physikalisch-mathematische Klasse 1375 Mark zur Fortführung der Arbeiten am Nomenclator animalium generum et subgenerum, 980 Mark zur Fortführung des Unternehmens »Das Tierreich«, 150 Mark zur Fortführung des Unternehmens »Das Pflanzenreich«, 400 Mark für die Euler-Ausgabe, 150 Mark zur Fortführung der Untersuchungen des Dr. Fritz Levy in Berlin zur Zellteilungsphysiologie;

durch ihre philosophisch-historische Klasse 3750 Mark für die Fortführung der Arbeiten der Orientalischen Kommission, 1500 Mark für die Fortführung der Arbeiten am Wörterbuch der Ägyptischen Sprache, 375 Mark für die

Fortführung der Kant-Ausgabe, 5705 Mark für die Fortführung der Arbeiten der Preußischen Kommission, 150 Mark zur Bestreitung der laufenden Unkosten für die Kirchenväter-Kommission, 330 Mark dem ordentlichen Mitgliede Hrn. Burdach für die Photographierung einer Handschrift.

Die Akademie hat den ordentlichen Professor an der Universität Hamburg Hrn. Dr. Hans Lohmann zum korrespondierenden Mitgliede ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Ausgegeben am 20. September.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1924

XXV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 31. Juli.

Vorsitzender Sekretar: i. V. Hr. Planck.

1. Hr. Fick bespricht einige Punkte der geltenden Vererbungslehren. (Abh.)

Er betont dabei die Unsicherheit der Grundlagen der Morganschen Austauschlehre der Erbeinheiten.

2. Hr. Keibel berichtet über eigentümliche Verhältnisse an den Arterien von Petromyzonten.

Er fand dort besondere Klappeneinrichtungen am Abgange der Segmentalarterien und an den Darmarterien. Außerdem weist er auf die verschiedene Dicke der Aortenwand hin, die offenbar durch die verschiedene mechanische Beanspruchung bewirkt wird.

Über die Gefäße von Petromyzonten.

Von F. Keibel.

Bei einer Untersuchung, die mit anderen Zielen unternommen wurde, und über die ich hoffe, später berichten zu können, machte ich am Gefäßsystem von Petromyzonten und ihren Larven, den Querdern, höchst eigenartige Beobachtungen. An den Ursprüngen der Segmentalarterien aus der Aorta fand ich Klappen, die der Richtung des Stromes, wie man sie annimmt, entgegen

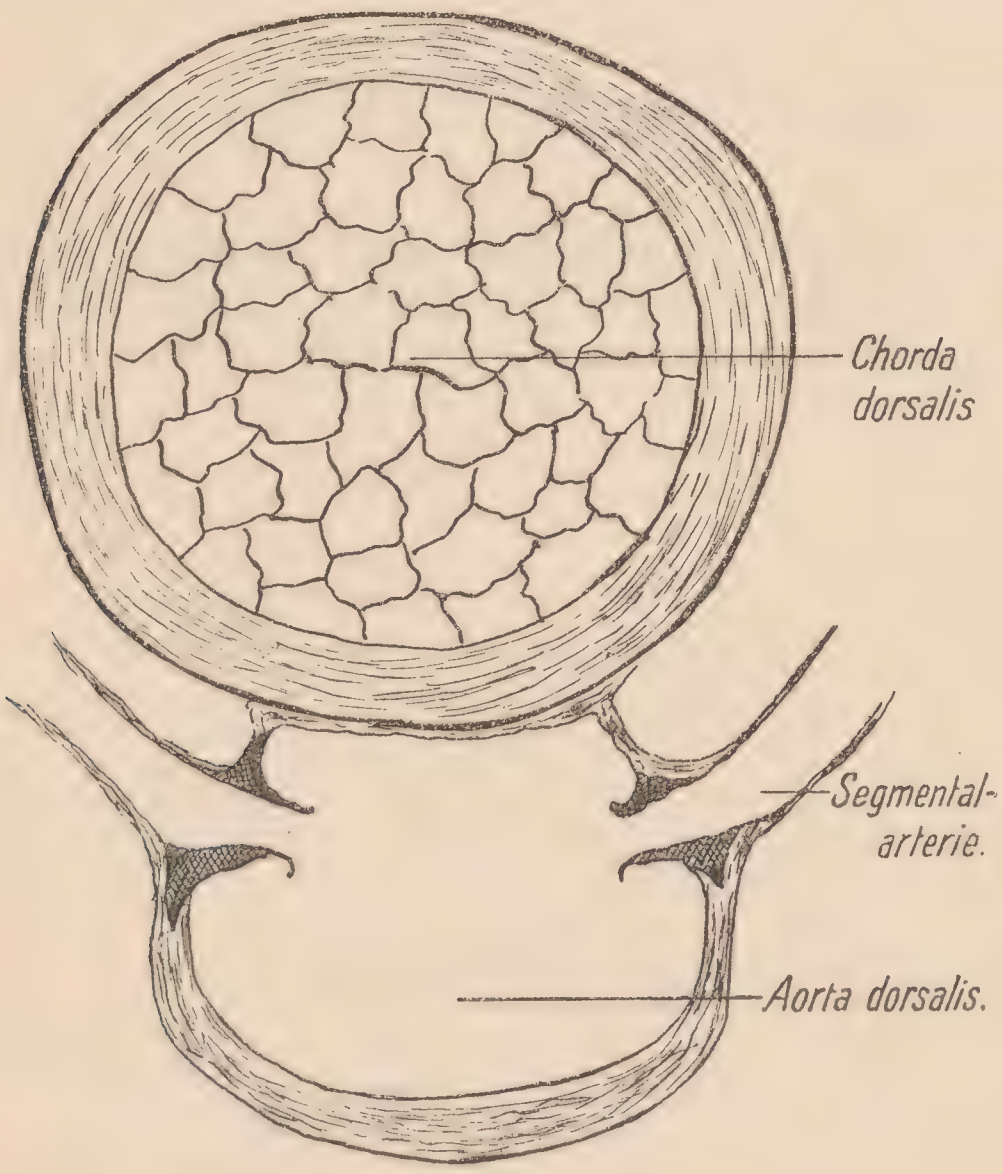


Fig. 1.

Fig. 2.

gerichtet sind. Ebensolche Klappen fand ich in den Arterien der Leber und des Darms bis in sehr kleine Äste hinein. An den Vornierenarterien fehlten sie. Bei anderen Wirbeltieren hat Dragendorff (Anatom. Hefte Bd. 42, 1911) Bildungen beschrieben, die wohl teilweise einen Vergleich zulassen; Petromyzon hat er nicht untersucht.

Der Aufbau der Klappen ist von einer höchst eigentümlichen Art, über die ich später berichten will.

Die Anordnung der Klappen am Ursprung der Segmentalarterien gibt Fig. 1 schematisch wieder; Fig. 2 zeigt den Aufbau der Klappen am Ursprung

der Segmentalarterien, auch schematisch, bei stärkerer Vergrößerung. Die Klappen sind von Endothel überzogen; ihre Substanz läßt sich durch färberische Reaktionen sehr scharf abgrenzen.

Eine andere Beobachtung sei hier kurz angeschlossen. Die Wanddicke der Aorta ist auf dem gleichen Querschnitt sehr verschieden. Dort, wo sich die Aortenwand an die Chordascheide anlegt, ist sie ganz dünn, oft kaum nachweisbar; gegenüber hat sie das Vielfache an Durchmesser. Es hängt das mit den mechanischen Verhältnissen zusammen, und ich hoffe, auch darauf später in größerem Zusammenhange genauer eingehen zu können; inzwischen verweise ich auf Argaud (Journ. Anat. et Physiol. Année 44, 1908 und Année 45, 1909).

Ausgegeben am 20. September.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1924 XXVI. XXVII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MAY 2 8
Smithsonian

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 23. Oktober. (S. 275)
ZIMMERMANN: Die Knickfestigkeit gekrümmter Stäbe mit elastischer Einspannung. (S. 277)
Adresse an Hrn. ZIMMERMANN zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 29. Juli 1924. (S. 289)
Adresse an Hrn. FRIEDRICH TEUTSCH in Hermannstadt zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1924. (S. 291)
Klassensitzung am 30. Oktober. (S. 293)

BERLIN 1924

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XXVI. Gesamtsitzung. 23. Oktober.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

*1. Hr. Pompeckj sprach Über die Lückenhaftigkeit der paläontologischen Überlieferung.

Von mehreren Seiten (Abel, Dacqué, Hennig) ist dagegen Stellung genommen worden, daß den Lücken in der Überlieferung fossiler Lebewesen die Bedeutung zukommt, die ihr seit Darwin beigemessen wird. An verschiedenen Beispielen — mesozoische Säugetiere, Vögel, Reptilien, Amphibien, Insekten, syncaride Krebse, Acariden — und an dem Vergleich fossiler Faunen mit dem Tierleben von heute wird die ganz allgemein nicht hoch genug einzuschätzende Lückenhaftigkeit der Überlieferung dargetan, und die geologischen Ursachen hierfür werden beleuchtet.

Unter Ablehnung der Versuche, die Cuviersche Katastrophentheorie wieder aufleben zu lassen, wird in der Verbindung mit dem v. Hoff-Lyellschen Aktualitätsprinzip in der Geologie trotz der scheinbar für eine sprungweise Entwicklung des Lebens, der Arten, sprechenden lückenhaften Überlieferung der Lebewesen der Vorzeiten für die kontinuierliche Entwicklung, für die allmähliche Umprägung der Lebensformen in kleinsten Schritten eingetreten.

2. Hr. Zimmermann legte eine Arbeit vor über die Knickfestigkeit von gekrümmten Stäben, deren Enden elastisch eingespannt sind.

Es zeigt sich, daß die Aufgabe, die Knickgrenze eines solchen Stabes zu bestimmen, durch Verbindung der früher für den geraden Stab mit elastischer Einspannung und für den gekrümmten Stab ohne Einspannung entwickelten Verfahren stets in übersichtlicher Weise gelöst werden kann. Ein Beispiel wird vorgeführt.

3. Hr. Engler legte das 87. Heft (IV. 43) des Werkes »Das Pflanzenreich« vor: R. Knuth, Dioscoreaceae (Leipzig 1924); ferner sein Werk: Syllabus der Pflanzenfamilien, 9. und 10. Aufl. mit Unterstützung von Dr. Ernst Gilg (Berlin 1924).

4. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff überreichte Inscriptiones Graecae, Vol. I, editio minor: Inscriptiones Atticae Euclidis anno anteriores, hrsg. von Friedrich Hiller von Gaertringen (Berlin 1924), sowie sein Werk: Hellenistische Dichtung in der Zeit des Kallimachus, 2 Bände (Berlin 1924).

5. Vorgelegt wurde ferner: Geschichte des Fixsternhimmels, Abt. I, Bd. 3 (Karlsruhe 1924).

6. Hr. Schuchhardt überreichte sein Buch: Die frühgeschichtlichen Befestigungen in Niedersachsen (Niedersächsische Heimatbücher Bd. 3) (Salzuflen [1924]),

7. Hr. Wilcken sein Werk: Urkunden der Ptolemäerzeit (ältere Funde), I. Bd., 3. Lief. (Berlin und Leipzig 1924),

8. Hr. Bolte das von ihm herausgegebene Buch: Johannes Pauli Schimpf und Ernst, 2. Teil (Berlin 1924),

9. Hr. Wiegand das 7. Heft des I. Bandes des von ihm herausgegebenen Werkes über Milet: Hubert Knackfuss, Der Südmarkt und die benachbarten Bauanlagen (Berlin 1924).

10. Hr. Eduard Meyer legte das Werk von Ernst Herzfeld, Paikuli, Monument and inscription of the early history of the Sasanian empire, 2 Bände (Berlin 1924) vor.

11. Vorgelegt wurde ferner der von dem korrespondierenden Mitgliede Hrn. Mewaldt übersandte 2. Band des nachgelassenen Werkes von Hermann Diels, T. Lucretius Carus, De rerum natura, lateinisch und deutsch (Berlin 1924).

12. Von korrespondierenden Mitgliedern wurden folgende Veröffentlichungen übersandt:

Felix Marchand, Die örtlichen reaktiven Vorgänge (aus Krehl-Marchand, Handbuch der allgemeinen Pathologie, Bd. IV, 1);

Franz Praetorius, Die Gedichte des Amos (Halle a. S. 1924);

Sten Konow, Indiens religioner (aus Religionshistorie. Sonderabdr. o. J.).

M. Rostovtzeff, Une trouvaille de l'époque Gréco-Sarmate de Kertch au Louvre et au Musée de Saint-Germain (aus Monuments et Mémoires, publié par l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, tome XXVI) (Paris 1923);

Gerard de Geer, Description topographique de la région explorée. Géologie (aus Missions scientifiques pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg entreprises en 1899—1902 sous les auspices des gouvernements Suédois et Russe. Mission Suédoise, tome II) (Stockholm 1923).

13. Vorgelegt wurden ferner La vie de J.-B. Dumas, 1800—1884, par le Général J.-B. Dumas (hektographisch vervielfältigt, 1924); Richard Jecht, Jakob Böhme, Gedenkgabe der Stadt Görlitz (Görlitz 1924); Richard Jecht, Jakob Böhme und Görlitz, ein Bildwerk (Görlitz 1924).

14. Das ordentliche Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse Hr. Zimmermann feierte am 29. Juli, das korrespondierende Mitglied der philosophisch-historischen Klasse Hr. Friedrich Teutsch in Hermannstadt am 6. August das goldene Doktorjubiläum. Die Akademie hat beiden Jubilaren Adressen gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt sind.

15. Die Akademie hat zur Fortführung des Biographischen Jahrbuches 700 Mark bewilligt.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Alfred Bergeat in Kiel am 30. Juli, das korrespondierende Mitglied derselben Klasse Hrn. Wilhelm Roux in Halle a. S. am 15. September und das korrespondierende Mitglied der philosophisch-historischen Klasse Hrn. Klemens Baeumker in München am 7. Oktober durch den Tod verloren.

Die Knickfestigkeit gekrümmter Stäbe mit elastischer Einspannung.

Von H. ZIMMERMANN.

Auf S. 262 bis 282 der Sitzungsberichte für 1923 ist nachgewiesen worden, daß auch Stäbe mit nicht gerader Achse die Eulersche Knickgrenze erreichen können, wenn die Stabkraft S an Hebelarmen angreift, deren Lage und Größe von der Form der Stabachse abhängt. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Enden des Stabes frei drehbar gelagert seien. Auf S. 775 bis 790 der Sitzungsberichte für 1921 ist umgekehrt gezeigt, wie man die Knickfestigkeit gerader Stäbe berechnen kann, deren Enden elastisch eingespannt sind. Jetzt soll die Knickfestigkeit eines Stabes ermittelt werden, der sowohl gekrümmt wie auch an beiden Enden elastisch eingespannt ist. Als Anfangsform der Stabachse möge wieder die in dem Aufsatze über die Formänderungen gekrümmter Stäbe durch Druck (1923, S. 197, Gl. (1)) benutzte Kosinuslinie

$$Y = y_0 \cos \pi \left(\frac{x_m}{l} + \frac{x}{l} \right)$$

dienen, bei der y_0 die Scheitelhöhe, l die Wellenlänge und x_m die Verschiebung des Scheitels gegen die Mitte der Stabsehne a bedeutet.

I. Die elastischen Verdrehungen beim krummen Stab ohne Einspannung.

Die Untersuchung eines solchen Stabes ist a. a. O. mit Hilfe der elastischen Durchbiegungen δ ausgeführt worden. Wenn man den Einfluß der Einspannung der Stabenden ermitteln will, muß man die bei fehlender Einspannung auftretenden elastischen Verdrehungen oder Neigungsänderungen kennen. Diese sind also zunächst aus der Formel für die Durchbiegungen abzuleiten[1].

[1] Sie findet sich auf S. 262 und lautet:

$$\begin{aligned}
\delta &= y - f - \eta \\
&= \frac{f_2 - f_1}{2} \left(\frac{\sin \xi}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{2x}{a} \right) + y_0 \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{n^2} \frac{S}{K}} \frac{\sin \xi}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{2x}{a} \right] \sin \pi \frac{x_m}{l} \sin \frac{\pi}{2} n \\
&+ \frac{f_2 + f_1}{2} \left(\frac{\cos \xi}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 1 \right) - y_0 \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{n^2} \frac{S}{K}} \frac{\cos \xi}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 1 \right] \cos \pi \frac{x_m}{l} \cos \frac{\pi}{2} n \\
&+ y_0 \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{n^2} \frac{S}{K}} - 1 \right] \cos \pi \left(\frac{x_m}{l} + \frac{x}{l} \right).
\end{aligned}$$

Der Stab ist wagerecht liegend gedacht. Als X-Achse ist eine durch die Endpunkte der Fehlerhebel f_1 und f_2 gehende Gerade mit dem Fußpunkte eines auf sie von der Mitte der Stabsehne

Die gesuchte Neigungsänderung findet man offenbar, wenn man den Unterschied der elastischen Ausbiegungen zweier benachbarter Punkte durch ihren Abstand teilt; d. h. es ist

$$v = \frac{d\delta}{dx}.$$

Danach ergibt sich mit $\xi = x\sqrt{S:EJ}$ aus der Gleichung für δ:

$$\begin{aligned}
v = {} & \frac{f_2 - f_1}{2}\left(\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,\frac{\cos\frac{\xi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{2}{a}\right) + y_0\left[\frac{\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,\frac{\cos\frac{\xi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{2}{a}}{1 - \frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}\right]\sin\pi\frac{x_m}{l}\sin\frac{\pi}{2}n \\
& - \frac{f_2 + f_1}{2}\left(\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,\frac{\sin\frac{\xi}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right) + y_0\left[\frac{\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,\frac{\sin\frac{\xi}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{1 - \frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}\right]\cos\pi\frac{x_m}{l}\cos\frac{\pi}{2}n \\
& - y_0\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}\frac{S}{K}} - 1\right]\frac{\pi}{l}\sin\pi\left(\frac{x_m}{l} + \frac{x}{l}\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

Das ist die elastische Verdrehung gegen die Anfangslage für einen beliebigen Punkt im Abstande x von der Mitte der Stabsehne. Daraus ergeben sich die entsprechenden Werte für das

linke und das rechte Stabende

$$v = \quad v_1 \qquad v_2,$$

wenn man $x = -\frac{a}{2} \qquad \frac{a}{2}$

und $\xi = -\frac{\alpha}{2} \qquad \frac{\alpha}{2}$ setzt.

Faßt man die beiden Werte der v als Funktionen der f und von y_0 auf, so kann man schreiben

$$v_1 = v_1(f) + v_1(y_0); \quad v_2 = v_2(f) + v_2(y_0). \tag{2}$$

---

aus gefällten Lotes als Nullpunkt der x und y angenommen. Der Abstand eines zu beliebigem x gehörigen Punktes der Achse des belasteten Stabes von der X-Achse ist y; der Abstand desselben Punktes von der Stabsehne ist η, und der Abstand des entsprechenden Punktes der Stabsehne von der X-Achse ist f. Die Anfangsform der Stabachse ist ein Teil einer (als Fehlerlinie bezeichneten) durch die Endpunkte der Stabsehne gehenden Kosinuslinie mit der Scheitelhöhe y_0 und der Wellenlänge l. Die Mitte der Stabsehne hat von der Y-Achse der Kosinuslinie den Abstand x_m. Die Hebel f_1 und f_2 sind positiv gerechnet, wenn sie so liegen, daß die an ihnen angreifende Stabkraft S die Anfangskrümmung in der Mitte des Stabes vergrößert. Mit δ ist die Änderung bezeichnet, die der Abstand eines Punktes der Stabachse von der Stabsehne durch die Belastung erfährt, also die elastische Ausbiegung. Die Stablänge ist a; ferner $n = a:l$; $K = \pi^2 EJ:a^2$ die Eulersche Knicklast; $\alpha = a\sqrt{S:EJ} = \pi\sqrt{S:K}$ ein Hilfswinkel; ähnlich $\xi = x\sqrt{S:EJ}$. Vgl. Bild 1 auf S. 198 der Sitzungsberichte für 1923. Die vorstehende Formel für δ ist dort auf S. 201 bis 204 abgeleitet.

Mit $a\sqrt{S:EJ} = \alpha$ ergeben sich die Glieder

$$\nu_1(f) = \frac{f_2 - f_1}{2a}\left(\alpha\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 2\right) + \frac{f_2 + f_1}{2a}\alpha\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

$$\nu_2(f) = \frac{f_2 - f_1}{2a}\left(\alpha\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 2\right) - \frac{f_2 + f_1}{2a}\alpha\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Sie lassen sich leicht auf die Form

$$(3)\quad \begin{cases} \nu_1(f) = \left(1 - \dfrac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}\right)\dfrac{f_1}{a} + \left(\dfrac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right)\dfrac{f_2}{a} = \quad (t)\dfrac{f_1}{a} + (s)\dfrac{f_2}{a}; \\ \nu_2(f) = \left(1 - \dfrac{\alpha}{\sin\alpha}\right)\dfrac{f_1}{a} + \left(\dfrac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} - 1\right)\dfrac{f_2}{a} = -(s)\dfrac{f_1}{a} - (t)\dfrac{f_2}{a} \end{cases}$$

bringen, in der sie die bekannten Feldgleichungen für den geraden Stab mit frei drehbaren Enden darstellen[2].

Weniger einfach gestaltet sich die Entwicklung der Funktionen $\nu_1\,(y_o)$ und $\nu_2\,(y_o)$, bei der zu beachten, daß

$$(4)\quad {}^1/_2\alpha : \operatorname{tang}{}^1/_2\alpha - 1 = -{}^1/_2[(t) - (s)] \text{ und } {}^1/_2\alpha \operatorname{tang}{}^1/_2\alpha = {}^1/_2[(t) + (s)].$$

Die Weitläufigkeit der Ausdrücke nötigt dazu, abkürzende Bezeichnungen einzuführen. Wir setzen

$$(5)\quad \frac{y_o}{a}\frac{\cos\pi\left(\frac{x_m}{l} - \frac{n}{2}\right)}{1 - \frac{1}{n^2}\frac{S}{K}} = \underline{\phi_1}; \qquad \frac{y_o}{a}\frac{\cos\pi\left(\frac{x_m}{l} + \frac{n}{2}\right)}{1 - \frac{1}{n^2}\frac{S}{K}} = \underline{\phi_2};$$

$$(6)\quad \frac{y_o}{a}\frac{\frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}{1 - \frac{1}{n^2}\frac{S}{K}}\left[2\sin\pi\frac{x_m}{l}\sin\pi\frac{n}{2} - \pi n\sin\pi\left(\frac{x_m}{l} + \frac{n}{2}\right)\right] = \begin{cases}\underline{\nu_I}\\ \underline{\nu_{II}}\end{cases},$$

und erhalten damit durch eine ziemlich umfangreiche Rechnung

$$(7)\quad \nu_1(y_o) = -(t)\phi_1 - (s)\phi_2 + \nu_I; \quad \nu_2(y_o) = (s)\phi_1 + (t)\phi_2 + \nu_{II}.$$

Aus (2), (3) und (7) folgt schließlich der Gesamtwert der Neigungen ν_1 und ν_2. Um aber hervorzuheben, daß sie sich auf einen Stab mit der Einspannung Null beziehen, mögen jetzt die Zeiger 1 und 2 in **01** und **02** abgeändert werden. Dann ist

---

[2] Sitzungsberichte 1921 S. 892 u. f. — Zentralblatt d. Bauverwaltung 1922 S. 36, Gl. (7). — Bautechnik 1923 S. 12, Gl. (25). Es ist $(t) = taS$ und $(s) = saS$.

$$(8)\qquad \begin{cases} \nu_{01} = \quad (t)\left[\dfrac{f_1}{a} - \phi_1\right] + (s)\left[\dfrac{f_2}{a} - \phi_2\right] + \nu_{\mathrm{I}}; \\ \nu_{02} = -(s)\left[\dfrac{f_1}{a} - \phi_1\right] - (t)\left[\dfrac{f_2}{a} - \phi_2\right] + \nu_{\mathrm{II}}.^{3} \end{cases}$$

Diese Gleichungen sollen nun dazu benutzt werden, die Bedingungen zu ermitteln, die die Hebel f_1 und f_2 erfüllen müssen, damit der krumme Stab bei $\boldsymbol{S = K}$ die Knickgrenze erreicht. Als Kennzeichen hierfür ist in der oben an erster Stelle genannten Untersuchung das Unbestimmtwerden der elastischen Ausbiegung δ_m der Stabmitte benutzt worden. Jetzt müssen wir uns nach einem Kennzeichen umsehen, das mit der Verdrehung der Stabenden zusammenhängt. Als das zweckmäßigste Merkmal hat sich die Änderung des Winkels zwischen den Berührenden an die Stabenden, also der Unterschied

$$\nu_{01} - \nu_{02},$$

der durch (8) bestimmten elastischen Verdrehungen erwiesen, wie ihn Bild 1 andeutet. Man könnte annehmen, daß die Knickgrenze in dem Augenblick erreicht ist, wo bei zunehmender Stabkraft S der Wert dieses Winkels unbestimmt wird. Wir schlagen aber einen etwas anderen Weg ein, indem wir von der in der früheren Untersuchung festgestellten Tatsache Gebrauch machen, daß die Formänderungen eines gekrümmten Stabes bei zunehmender Belastung rückgängig werden können, wie das Bild 2 von S. 264 der Sitzungsberichte für 1923 zeigt. An die dort dazu gemachten Ausführungen schließt sich nachstehende Rechnung an.

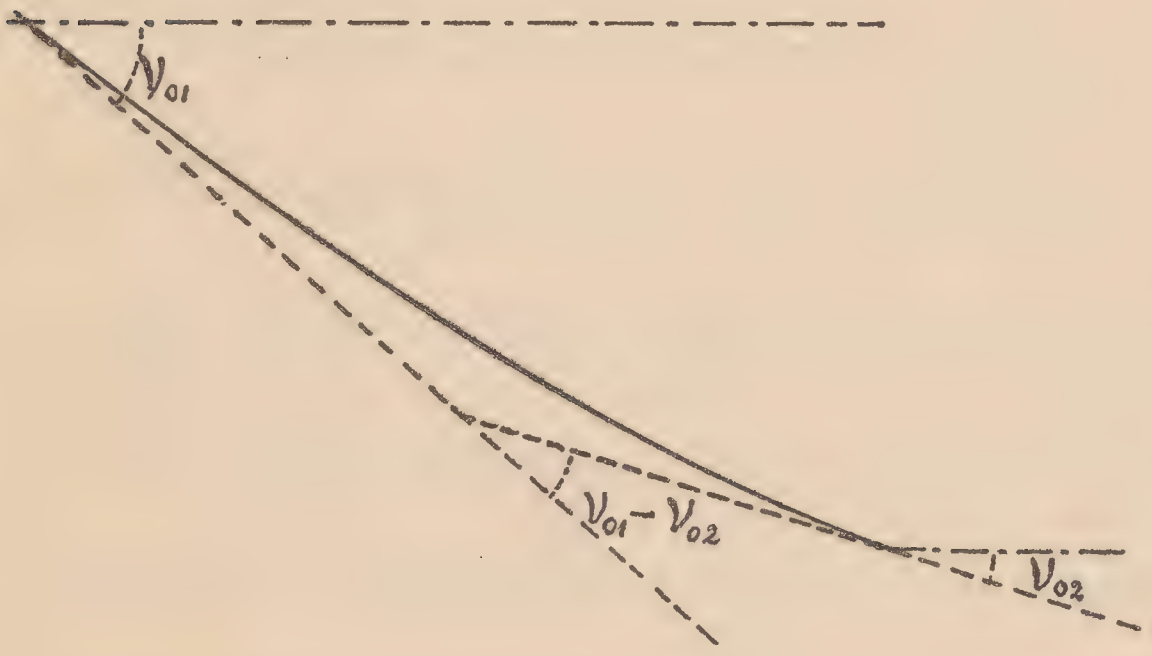


Bild 1. Schematische Darstellung des Winkels $\nu_{01} - \nu_{02}$.

Aus (8) folgt

$$\nu_{01} - \nu_{02} = [(t) + (s)]\left(\frac{f_1}{a} + \frac{f_2}{a}\right) - [(t) + (s)](\phi_1 + \phi_2) + \nu_{\mathrm{I}} - \nu_{\mathrm{II}}.$$

Setzt man für ϕ_1, ϕ_2, ν_{I} und ν_{II} ihre Werte aus (5) und (6), so ergibt sich

$$(9)\quad \nu_{01} - \nu_{02} = [(t) + (s)]\frac{f_1 + f_2}{a} + \frac{2y_0}{a}\cos\pi\frac{x_m}{l}\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{(t) + (s)}{1 - \dfrac{1}{n^2}\dfrac{S}{K}}\cos\pi\dfrac{n}{2} \\ +\dfrac{\pi n \dfrac{1}{n^2}\dfrac{S}{K}}{1 - \dfrac{1}{n^2}\dfrac{S}{K}}\sin\pi\dfrac{n}{2} \end{array}\right\}.$$

[3] Mit $\phi_1 = \phi_2 = \nu_{\mathrm{I}} = \nu_{\mathrm{II}} = 0$ ergeben sich hieraus die bekannten Feldgleichungen für den geraden Stab. S. Anmerkung 2.

Dies wird Null für

$$(10)\qquad \frac{f_1+f_2}{2a} = \frac{y_0}{a}\cos\pi\frac{x_m}{l}\left\{\frac{\cos\pi\dfrac{n}{2}}{1-\dfrac{1}{n^2}\dfrac{S}{K}} - \frac{\pi n\dfrac{1}{n^2}\dfrac{S}{K}\sin\pi\dfrac{n}{2}}{1-\dfrac{1}{n^2}\dfrac{S}{K}}\,\frac{}{(t)+(s)}\right\}.$$

Das ist die allgemeine Bedingung dafür, daß die durch (9) dargestellte Kurve der $\nu_{01}-\nu_{02}$ die $S:K$-Achse bei dem in (10) nach Belieben einzusetzenden Werte von $S:K$ schneidet. Soll das bei $S=K$ geschehen, so folgt hiermit wegen $(t)+(s)=\infty$ aus (10)

$$(11)\qquad \frac{f_1+f_2}{2} = y_0\cos\pi\frac{x_m}{l}\,\frac{n^2\cos\pi\dfrac{n}{2}}{n^2-1}.$$

Dies stimmt mit der für eine symmetrische Fehlerlinie entwickelten Gleichung (6) von S. 265 der im Eingange angeführten Untersuchung überein, wenn man (6) gemäß der Bemerkung auf S. 274 durch das bei nicht symmetrischen Fehlerlinien erforderliche Hinzufügen des Faktors $\cos\pi\,(x_m:l)$ ergänzt; denn das dort benutzte Zeichen f hat dieselbe Bedeutung wie $(f_1+f_2):2$. Da wir hier keine solche Einschränkung gemacht haben, gilt (11) für Fehlerlinien jeder Art; im Fall der Symmetrie ist nur $x_m=0$ zu setzen. Bemerkenswert ist noch, daß der Ausdruck $y_0\cos\pi\,(x_m:l)$ die Höhe der Fehlerlinie in der Mitte der Stabsehne darstellt.

In der obengenannten Untersuchung ist nachgewiesen, daß (6) eine Knickbedingung darstellt, indem damit die Größe der elastischen Ausbiegung δ_m in der Mitte des Stabes berechnet und gezeigt wurde, daß diese bei $S=K$ unbestimmt wird, bei einem nur unendlich wenig kleineren Werte von S aber einen bestimmten, endlichen Wert behält. Ähnlich soll hier der zu (11) gehörige Wert des Winkels $\nu_{01}-\nu_{02}$ benutzt werden. Durch Einführen von f_1+f_2 aus (11) in (9) ergibt sich dieser Winkel mit $S=K$ nicht zu Null, sondern unbestimmt. Es ist das eine Folge der bei $S=K$ vorhandenen Unstetigkeit der Kurve der $\nu_{01}-\nu_{02}$. Um den wahren Wert zu ermitteln, setzen wir

$$(12)\qquad \sqrt{\frac{S}{K}} = 1-u;\quad \text{also}\quad \frac{S}{K} = 1-2u+u^2,$$

wo u eine verschwindend kleine Größe bedeuten soll. Dann ist wegen $\alpha=\pi\sqrt{S:K}$:

$$(13)\qquad \begin{cases} (t) = 1-\dfrac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \dfrac{1}{u}; \\ (s) = \dfrac{\alpha}{\sin\alpha}-1 = \dfrac{1}{u}-2; \end{cases} \qquad (t)+(s) = \frac{2}{u}-2.$$

Mit diesen Werten und mit f_1+f_2 aus (11) ergibt sich aus (9) ein Ausdruck in u, der bei $u=0$ in

$$(14)\qquad (\nu_{01}-\nu_{02})_g = \frac{y_0}{a}\cos\pi\frac{x_m}{l}\left[\frac{8n^2\cos\pi\dfrac{n}{2}}{(n^2-1)^2}+\frac{2\pi n\sin\pi\dfrac{n}{2}}{n^2-1}\right]$$

übergeht. Es ist das der größte im Augenblick vor der Erreichung der Knickgrenze eintretende Wert von $\nu_{01} - \nu_{02}$. Sieht man von dem besonders zu behandelnden Falle $n = a : l = 1$ ab, so zeigt sich, daß $\nu_{01} - \nu_{02}$ stets endlich und außerdem — da y_0 die als klein vorausgesetzte Scheitelhöhe der Fehlerlinie und a die Länge des Stabes bedeutet — meist sehr klein ist. Das Unbestimmtwerden bei endlicher Größe der Formänderungen kennzeichnet aber das Knicken. Alles dies bestätigt also die Ergebnisse der früheren Untersuchung.

Wir schreiten jetzt zur Betrachtung des Falles

$$n = a : l = 1 , \tag{15}$$

d. h. einer Fehlerlinie, deren Wellenlänge l der Stablänge a gleich ist. Mit (15) folgt aus (5) und (6)

$$\phi_1 = \frac{y_0}{a} \frac{1}{1 - \frac{S}{K}} \sin \pi \frac{x_m}{l} = - \phi_2 \tag{16}$$

$$\left.\begin{matrix} \nu_I \\ \\ \nu_{II} \end{matrix}\right\} = \frac{y_0}{a} \frac{\frac{S}{K}}{1 - \frac{S}{K}} \left[2 \sin \pi \frac{x_m}{l} - \pi \left(\frac{-}{+} \cos \pi \frac{x_m}{l} \right) \right] . \tag{17}$$

Damit ergibt sich aus (8) an Stelle von (9):

$$\nu_{01} - \nu_{02} = [(t) + (s)] \frac{f_1 + f_2}{a} + \frac{2 y_0}{a} \cos \pi \frac{x_m}{l} \frac{\pi \frac{S}{K}}{1 - \frac{S}{K}} . \tag{18}$$

Dies wird Null für

$$\frac{f_1 + f_2}{2 a} = - \frac{y_0}{a} \cos \pi \frac{x_m}{l} \frac{\frac{S}{K}}{\left[1 - \frac{S}{K} \right] [(t) + (s)]} . \tag{19}$$

Soll das bei $S = K$ eintreten, so ist hierin $(t) + (s) = \infty$ zu setzen und wird die rechte Seite unbestimmt. Durch einen Grenzübergang mit den Größen aus (12) und (13) ergibt sich der wahre Wert

$$\frac{f_1 + f_2}{2} = - y_0 \cos \pi \frac{x_m}{l} \cdot \frac{\pi}{4} , \tag{20}$$

übereinstimmend mit Gleichung (7) auf S. 266 und der Bemerkung auf S. 274 der mehrfach erwähnten Untersuchung von 1923. Setzt man dies in (18), so erhält man durch einen ähnlichen Grenzübergang statt (14)

$$(\nu_{01} - \nu_{02})_g = - \frac{y_0}{a} \cos \pi \frac{x_m}{l} \cdot \frac{\pi}{2} \tag{21}$$

als den größten unmittelbar vor dem Erreichen der Knickgrenze eintretenden Wert von $\nu_{01} - \nu_{02}$.

Alle diese Gleichungen für den Fall $n = 1$ hätte man auch aus den entsprechenden früheren für $n > 1$ geltenden erhalten können durch Grenzübergänge mit $n = 1 + v$, wo v eine verschwindende Größe ist.

Hiermit ist die Aufgabe, die Knickbedingung für einen gekrümmten Stab aus den Gleichungen für die elastischen Verdrehungen der Stabenden abzuleiten, vollständig gelöst. Man gelangt natürlich zu denselben Ergebnissen wie bei Benutzung der Gleichung für die elastische Ausbiegung der Stabmitte. Es lassen sich aber aus den jetzt benutzten Gleichungen noch einige weitergehende Schlüsse ziehen, die nun kurz besprochen werden sollen.

Wir haben als Kennzeichen für den Eintritt des Knickens das Unbestimmtwerden des Winkels $v_{01} - v_{02}$ benutzt. Statt dessen hätte man auch fragen können, welche Bedingungen die Hebel f_1 und f_2 erfüllen müssen, damit die Verdrehungen v_{01} und v_{02} je für sich unbestimmt werden bei $S = K$. Die Antwort ergibt sich unmittelbar aus den Gleichungen (8). Mit $S = K$ wird

$$(t) = \infty \quad \text{und} \quad (s) = \infty .$$

Die Winkel v_{01} und v_{02} werden also unbestimmt, wenn die Ausdrücke $f_1 : a - \phi_1$ und $f_2 : a - \phi_2$ Null werden, wobei für ϕ_1 und ϕ_2 die mit $S = K$ aus (5) folgenden Werte zu setzen sind. Demgemäß lauten die gesuchten Bedingungen

$$(22) \qquad f_1 = y_0 \frac{\cos \pi \left(\frac{x_m}{l} - \frac{n}{2} \right)}{1 - \frac{1}{n^2}}; \qquad f_2 = y_0 \frac{\cos \pi \left(\frac{x_m}{l} + \frac{n}{2} \right)}{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Hieraus lassen sich zwei andere Gleichungen ableiten, nämlich

$$(23) \qquad \frac{f_1 + f_2}{2} = y_0 \cos \pi \frac{x_m}{l} \frac{n^2 \cos \pi \frac{n}{2}}{n^2 - 1}$$

und

$$(24) \qquad \frac{f_1 - f_2}{2} = y_0 \sin \pi \frac{x_m}{l} \frac{n^2 \sin \pi \frac{n}{2}}{n^2 - 1} .$$

Die erste dieser Gleichungen stimmt mit (11) überein, was beweist, daß die Gleichungen (22) in der Tat dem Zustand des Knickens entsprechen. Da aber durch eine Knickbedingung in der Regel nur eine Größe bestimmt werden kann, während die Gleichungen (22) zwei solche bestimmen, so können diese zusammen nicht die allgemeine, sondern nur eine besondere Lösung der Aufgabe darstellen, die aus der allgemeinen hervorgeht, wenn eine willkürliche Annahme hinzutritt. Letztere ist durch (24) ausgedrückt.

Die in (23) und (24) enthaltene besondere Lösung zeichnet sich durch eine gewisse Regelmäßigkeit aus. Es müssen nämlich

	nach Gleichung (23)	und (24)	
die Hebel	$f_1 = -f_2$	$f_1 = f_2$	sein,
wenn	$x_m = {}^1/_2 l$	$x_m = 0$,	also
die Fehlerlinie	gegensymmetrisch	symmetrisch	ist.

Außerdem lehren dieselben Gleichungen, daß die Hebel beide Null sein müssen, wenn entweder die Fehlerlinie symmetrisch und n eine ungerade Zahl, oder wenn die Fehlerlinie gegensymmetrisch und n eine gerade Zahl ist. Es bedeutet dann $n = a:l$ die Anzahl der auf die Stablänge a entfallenden ganzen Wellen der Fehlerlinie, wie schon in Anmerkung 1 erwähnt.

II. Die Knickfestigkeit des gekrümmten Stabes mit elastisch eingespannten Enden.

Die Gleichungen (8) des vorigen Abschnittes sind unter der Voraussetzung abgeleitet, daß auf die Stabenden nur die an den Hebeln f_1 und f_2 angreifenden Stabkräfte S wirken. Das entspricht der gleichzeitigen Wirkung von zwei Momenten

$$Sf_1 = M_1 \quad \text{und} \quad Sf_2 = M_2$$

nebst einer in die Stabsehne fallenden Achsenkraft S. Man kann dies dadurch zum Ausdruck bringen, daß man die Gleichungen in der folgenden Form schreibt

$$(25) \qquad \begin{cases} \nu_{01} = \quad (t)\left[\dfrac{M_1}{aS} - \phi_1\right] + (s)\left[\dfrac{M_2}{aS} - \phi_2\right] + \nu_1\,; \\ \nu_{02} = -(s)\left[\dfrac{M_1}{aS} - \phi_1\right] - (t)\left[\dfrac{M_2}{aS} - \phi_2\right] + \nu_2\,. \end{cases}$$

Das sind die allgemeinen Feldgleichungen für einen gekrümmten Stab ohne Endeinspannung[4]. Versteht man nun aber unter M_1 und M_2 die algebraischen Summen aus den Momenten der Achsenkraft S und aus denen etwa vorhandener elastischer Einspannungen der Enden, so erhält man aus (25) die Endneigungen eines so eingespannten Stabes, die jetzt wieder mit ν_1 und ν_2 bezeichnet werden sollen, da ja die Einspannung nicht mehr Null ist.

Mit Einführung der Spannziffern m_1 und m_2 ergeben sich die natürlich in geradem Verhältnis zur Verdrehung ν_1 und ν_2 der Stabenden stehenden Einspannungsmomente

	am linken	rechten Ende
zu	$-m_1\nu_1$	$+m_2\nu_2$,[5]

also die Gesamtmomente mit den Hebeln f_1 und f_2

$$Sf_1 - m_1\nu_1 \qquad Sf_2 + m_2\nu_2\,.$$

Setzt man noch zur Abkürzung die Werte

$$(26) \qquad \frac{m_1}{aS} = \underline{\mu'} \quad \text{und} \quad \frac{m_2}{aS} = \underline{\mu''},$$

---

[4] Vgl. Anmerkung 2.

[5] Vgl. Sitzungsberichte 1921 S. 778, Gl. (3); oder Zentralbl. d. Bauverw. 1922 S. 36, Gl. (8); Bauingenieur 1923 S. 382, Gl. (3).

wie in den früheren Untersuchungen, so folgt aus (25)

$$(27)\qquad \begin{cases} v_1 = \quad (t)\left[\frac{f_1}{a} - \phi_1 - \mu' v_1\right] + (s)\left[\frac{f_2}{a} - \phi_2 + \mu'' v_2\right] + v_1 ; \\ v_2 = -(s)\left[\frac{f_1}{a} - \phi_1 - \mu' v_1\right] - (t)\left[\frac{f_1}{a} - \phi_2 + \mu'' v_2\right] + v_{II} . \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach v_1 und v_2 ergibt

$$(28)\qquad \begin{cases} Nv_1 = 1 + (t)\,\mu'' \left\{ \quad (t)\left[\frac{f_1}{a} - \phi_1\right] + (s)\left[\frac{f_2}{a} - \phi_2\right] + v_1 \right\} \\ \qquad\qquad + (s)\,\mu'' \left\{ -(s)\left[\frac{f_1}{a} - \phi_1\right] - (t)\left[\frac{f_2}{a} - \phi_2\right] + v_{II} \right\}; \\ Nv_2 = 1 + (t)\,\mu' \left\{ -(s)\left[\frac{f_1}{a} - \phi_1\right] - (t)\left[\frac{f_2}{a} - \phi_2\right] + v_{II} \right\} \\ \qquad\qquad + (s)\,\mu' \left\{ \quad (t)\left[\frac{f_1}{a} - \phi_1\right] + (s)\left[\frac{f_2}{a} - \phi_2\right] + v_1 \right\}. \end{cases}$$

Hierin ist

$$(29)\qquad N = [1 + (t)\,\mu'][1 + (t)\,\mu''] - (s)^2 \mu'\,\mu'' .$$

Ein Vergleich der Gleichungen (28) mit (8) läßt erkennen, daß die in den geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke gleich v_{01} und v_{02} sind. Statt (28) ist also kürzer zu schreiben

$$(30)\qquad \begin{cases} v_1 = \dfrac{[1 + (t)\,\mu'']\,v_{01} + (s)\,\mu''\,v_{02}}{N} ; \\ v_2 = \dfrac{[1 + (t)\,\mu']\,v_{02} + (s)\,\mu'\,v_{01}}{N} , \end{cases}$$

worin für N statt der Gleichung (29) auch gesetzt werden kann

$$(31)\qquad \underline{N = 1 + (t)[\mu' + \mu''] + (u)\,\mu'\,\mu''} .$$

Dabei ist $(u) = (t)^2 - (s)^2$ eine schon öfter benutzte Abkürzung.

Die Gleichungen (30) stellen eine bisher unbekannte ganz allgemeine Beziehung zwischen den Verdrehungen v_{01} und v_{02} der Enden eines beliebig gestalteten und belasteten Stabes ohne Einspannung, und denen v_1 und v_2 eines sonst gleich angeordneten, aber mit μ' und μ'' elastisch eingespannten Stabes dar.

Jetzt kann dazu geschritten werden, die Knickbedingung für den Stab mit elastisch eingespannten Enden zu suchen. Wir beginnen mit der Bestimmung der Werte, die die Größen

$$\frac{f_1}{a} - \phi_1 \quad \text{und} \quad \frac{f_2}{a} - \phi_2$$

annehmen müssen, wenn die Zähler der in (30) auf der rechten Seite stehenden Brüche Null werden sollen. Die Bedingungen dafür werden erhalten,

wenn man die rechten Seiten von (28) gleich Null setzt. Mit der vorher erwähnten Abkürzung $(u) = (t)^2 - (s)^2$ lassen sie sich leicht in die folgende Form bringen:

$$(32)\quad \begin{cases} \left[(t) + (u)\,\mu''\right]\cdot\left[\dfrac{f_1}{a} - \phi_1\right] + (s)\cdot\left[\dfrac{f_2}{a} - \phi_2\right] \\ \qquad = -\left\{\left[1 + (t)\,\mu''\right]\nu_1 + (s)\,\mu''\cdot\nu_{II}\right\}; \\ -(s)\cdot\left[\dfrac{f_1}{a} - \phi_1\right] - \left[(t) + (u)\,\mu'\right]\cdot\left[\dfrac{f_2}{a} - \phi_2\right] \\ \qquad = -\left\{(s)\,\mu'\cdot\nu_1 + \left[1 + (t)\,\mu'\right]\nu_{II}\right\}. \end{cases}$$

Die Auflösung ergibt die Nennerdeterminante

$$(33)\qquad D = -(u)\left\{1 + (t)\left[\mu' + \mu''\right] + (u)\,\mu'\,\mu''\right\}.$$

Als Zähler erhält man zunächst ziemlich verwickelte Ausdrücke, in denen jedoch derselbe Faktor auftritt wie der von $-(u)$ auf der rechten Seite von (33). Nach entsprechender Kürzung wird schließlich

$$(34)\quad \begin{cases} \underline{\dfrac{f_1}{a} - \phi_1 = -\dfrac{1}{(u)}\left[(t)\,\nu_1 + (s)\,\nu_{II}\right]} \\ \text{und } \underline{\dfrac{f_2}{a} - \phi_2 = \dfrac{1}{(u)}\left[(s)\,\nu_1 + (t)\,\nu_{II}\right]}. \end{cases}$$

Dieselben Gleichungen erhält man aber auch, wenn man in (30) nicht die ganzen Zähler, sondern nur die Größen

$$\underline{\nu_{01} = 0} \quad \text{und} \quad \underline{\nu_{02} = 0}$$

setzt, wie sich hiermit durch Auflösung von (8) nach $f_1 : a - \phi_1$ und $f_2 : a - \phi_1$ leicht ergibt.

Nun läßt sich die Knickbedingung für den gekrümmten Stab mit elastisch eingespannten Enden angeben wie folgt:

Die Verdrehungen der Enden werden unbestimmt, der Stab erreicht also die Knickgrenze, wenn (30) in der Form

$$(35)\qquad \nu_1 = \frac{0}{0} \quad \text{und} \quad \nu_2 = \frac{0}{0}$$

erscheint. Dazu ist nötig, daß erstens

$$(36)\qquad N = 1 + (t)\left[\mu' + \mu''\right] + (u)\,\mu'\,\mu'' = 0,$$

d. h. daß die Knickbedingung für einen geraden achsrecht belasteten Stab von gleichen Abmessungen und derselben Belastung und Einspannungsweise wie die des gegebenen Stabes erfüllt wird. Zweitens müssen die Gleichungen (34) erfüllt sein, was bedeutet, daß die Hebel f_1 und f_2 so gewählt werden müssen, daß der gegebene krumme Stab bei fehlender Einspannung keine Verdrehung der Enden erleiden würde.

Die Lösung der Aufgabe zerfällt hiernach in zwei Teile: Die Lösung für den geraden achsrecht belasteten Stab und die Bestimmung der Hebel,

an denen die Stabkraft angebracht werden muß, damit dieselbe Lösung für den gegebenen krummen Stab gültig bleibt. Dieser allgemeinen Regel entspricht auch das auf S. 262—282 der Sitzungsberichte für 1923 entwickelte Verfahren zur Berechnung der Knickfestigkeit von nicht eingespannten Stäben mit nicht gerader Achse. Der gerade, achsrecht belastete Stab knickt bei $S = K$. Für den nicht geraden Stab werden die Hebel, an denen S angreifen muß, so bestimmt, daß er ebenfalls bei $S = K$ knickt.

Beispiel.

Es sei ein nach einer Kosinuswelle mit der Länge $l = a$ und der Scheitelhöhe y_o gekrümmter Stab von der Länge a gegeben, dessen Enden beide mit der gleichen Spannziffer m eingespannt sind. Die Stabkraft sei S. Es ist das Trägheitsmoment J des Querschnittes und die Länge der beiden Hebel f_1 und f_2 so zu bestimmen, daß die an ihnen wirkende Kraft S den Stab an die Knickgrenze bringt.

Wenn der Stab gerade wäre, würde seine Knickbedingung nach (36) mit $\mu' = \mu'' = \mu$ lauten

$$(37) \qquad (t) + (s) = -\frac{1}{\mu} = -\frac{aS}{m}\,.^{6}$$

Aus einer Tafel der $(t) + (s)$ ergibt sich hiermit der Wert

$$\alpha = \pi \sqrt{\frac{S}{K}}\,,$$

also auch der von $S : K$ und von

$$(38) \qquad K = \frac{\pi^2 EJ}{a^2} \quad \text{oder} \quad J = \frac{a^2}{\pi^2}\frac{K}{E}\,,$$

womit zunächst das gesuchte Trägheitsmoment J gefunden ist.

Weiter folgt wegen der vorausgesetzten Symmetrie der Fehlerlinie mit $x_m = 0$

aus (16): $\qquad \phi_1 = \phi_2 = 0\,;$

aus (17): $\qquad \nu_1 = \pi \dfrac{y_o}{a} \dfrac{\dfrac{S}{K}}{1 - \dfrac{S}{K}} = -\nu_{II}\,;$

und aus (34):

$$(39) \qquad f_1 = -\frac{\pi y_o}{(t) + (s)} \frac{\dfrac{S}{K}}{1 - \dfrac{S}{K}} = f_2\,.$$

---

[6] Vgl. Zentralbl. d. Bauverw. 1922 S. 37, Gl. (20) oder Bauingenieur 1923 S. 383, Gl. (15) und die Tafel auf S. 389. Die mehrfach erwähnte größere Tafel der (t) und (s) und ihrer Funktionen hat bisher leider noch nicht veröffentlicht werden können.

Das sind die Hebel, an denen die Stabkraft S wirken muß, damit der gekrümmte, im übrigen aber ganz gleich angeordnete und belastete Stab sich ebenfalls an der Knickgrenze befindet.

Die Gleichung (39) für $f_1 = f_2 = f$ gibt Gelegenheit zu einer Rechenprobe. Wird die elastische Einspannung der Enden verschwindend klein, so folgt aus (37) ein dem Unendlichen nahekommender Wert von $(t)+(s)$, dem ein sehr nahe bei π liegender Wert von α entspricht. Es wird also annähernd $S = K$. Setzt man demgemäß

$$\sqrt{\frac{S}{K}} = 1 + u\,; \quad \frac{S}{K} = 1 + 2u + u^2\,; \quad 1 - \frac{S}{K} = -2u\,,$$

worin u eine verschwindend kleine Größe bedeutet, so wird

$$(t)+(s) = -(2+2u) : u\,,$$

und die Einführung dieser Größen in (39) liefert beim Übergang zur Grenze $u = 0$

$$f = -\frac{\pi}{4} y_0\,, \tag{40}$$

übereinstimmend mit der auf S. 266 der Sitzungsberichte von 1923 für den nicht eingespannten nach einer Kosinuswelle gekrümmten Stab gefundenen Gleichung (7).

Druckstäbe mit frei drehbaren Enden kommen im Bauwesen kaum vor. Die feste Verbindung der Enden der benachbarten Stäbe wirkt stets wie eine mehr oder weniger elastische Einspannung. Ebenso sind die Stäbe nie ganz gerade. Die Untersuchung des Verhaltens gekrümmter und elastisch eingespannter Stäbe entspricht daher wohl nicht nur den Aufgaben der Theorie, sondern auch den Bedürfnissen der Anwendung. Die vorstehenden Zeilen eröffnen den Weg dafür.

Adresse an Hrn. Zimmermann zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 29. Juli 1924.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Als Sie vor nunmehr fast zwanzig Jahren in den Kreis der Preußischen Akademie der Wissenschaften eintraten, haben Sie am Schlusse Ihrer Antrittsrede geglaubt um Nachsicht bitten zu müssen mit der Begründung, daß Sie in Ihrem Amte ganz anderen als akademischen Zwecken dienen und die zu wissenschaftlicher Arbeit erforderliche Zeit und Geistesruhe mit Mühe den alltäglichen Geschäften abringen müßten. Sie knüpften daran die Versicherung, daß es Ihr eifriges Bestreben sein solle, hierin nicht zu erlahmen. Zu bescheiden klangen diese Ihre Worte schon damals angesichts der umfassenden wissenschaftlichen Leistungen, auf die Sie zurückblicken durften, und wenn wir jetzt nach Ablauf zweier Jahrzehnte die große Reihe Ihrer seither veröffentlichten kleineren und größeren Schriften und der unter Ihrer sachkundigen Leitung herausgegebenen großen Werke durchmustern, so können wir ohne Übertreibung sagen, daß Sie das damals gegebene Versprechen glänzend eingelöst haben. Die Bewunderung, die Ihnen die Akademie am heutigen Tage ausspricht, muß um so größer sein, als Sie Ihre wissenschaftlichen Arbeiten unter ganz ungewöhnlichen äußeren Umständen begonnen und neben schweren amtlichen Verpflichtungen Ihr ganzes Leben hindurch unermüdlich gefördert haben. Blicken Sie doch auf eine ganz außerordentliche Laufbahn zurück, die, beginnend mit dem Seemannsberufe, der Steuermannsprüfung und der Tätigkeit als Hilfsarbeiter bei der damaligen Norddeutschen Seewarte, Sie durch ein spätes Studium auf der Technischen Hochschule in Karlsruhe und der Universität Leipzig in den Dienst der Reichseisenbahnverwaltung und später in das Ministerium für öffentliche Arbeiten führte. Überall waren Ihre wissenschaftlichen Kenntnisse in erster Linie praktischen Zwecken dienstbar. Aber der Forscher, der in Ihnen steckt, ruhte nicht, sondern suchte die auf eisenbahntechnischem Gebiete erworbene praktische Erfahrung theoretisch zu durchdringen, um auf der Grundlage der so gewonnenen wissenschaftlichen Ergebnisse die Praxis selbst wieder zu verbessern. Durch zahlreiche Einzelabhandlungen und durch Beteiligung an der Klärung von Streitfragen bei jeder sich bietenden Gelegenheit haben Sie wesentlich zur Vertiefung unserer Kenntnis von der Bedeutung und Wirkungsweise der Oberbauteile beigetragen und eine bemerkenswerte Ausbildung und Erweiterung der Theorie des Eisenbahnoberbaues geliefert. Ihr umfassendes Hauptwerk über »Die Theorie des Eisenbahn-

oberbaues« zeichnet sich wie durch wissenschaftlichen Gehalt so durch mustergültige Klarheit und Übersichtlichkeit aus. Und während der Arbeit weitete sich das Feld Ihrer Forschung immer mehr. Vom Eisenbahnoberbau kamen Sie zu den Brücken und Hallen, weiter zum Kuppelbau, und endlich, besonders im letzten Jahrzehnt, zu der Erforschung des Problems der Knickung des geraden Stabes auf dem Boden der Eulerschen Theorie, dem Sie wertvolle Untersuchungen unter Berücksichtigung zahlreicher beachtenswerter Sonderfälle gewidmet haben. Besonders hervorgehoben zu werden verdient Ihre Arbeit über die Knickfestigkeit der Gurte offener Balkenbrücken, die für den Sonderfall fast geradliniger Gurtungen eine einfache Näherungslösung liefert.

So darf denn am heutigen Tage auch die Akademie unter den Glückwünschenden erscheinen und die Hoffnung aussprechen, daß Ihrem so arbeitsreichen Leben noch mancher weitere wissenschaftliche Erfolg beschieden sein möge.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Adresse an Hrn. Friedrich Teutsch in Hermannstadt zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1924.

Hochgeehrter Herr Bischof!

An dem Tage, da die Sächsische Nation im Königreich Rumänien, deren Haupt und Führer Sie sind, in dankbarer Gesinnung und herzlicher Verehrung zu Ihnen kommt, gedenkt auch die Preußische Akademie der Wissenschaften Ihrer und sendet Ihnen die besten Glückwünsche.

Seit Sie sich vor 50 Jahren mit Ihrer Doktorschrift in die Reihe der Gelehrten gestellt haben, haben Sie Ihrer stets wachsenden praktischen Tätigkeit, die Sie in Kirche und Schule bis zur höchsten Spitze geführt hat, die Arbeit des Geschichtsschreibers Ihrer Nation hinzugefügt und bis auf den heutigen Tag fortgesetzt. Aber diese Arbeit war Ihnen nicht eine zweite neben der des Lehrers, Predigers und Bischofs, vielmehr wurde sie Ihnen mit dieser gegeben; denn Sie erkannten, daß man ein um seine Existenz und Eigenart fort und fort kämpfendes Volk nur zu schützen und zu stärken vermag, wenn man es mit seiner Geschichte vertraut macht. Diese Aufgabe aber faßten Sie, dem großen Vorbild Ihres verewigten Herrn Vaters folgend, alsbald im weitesten Umfang und im tiefsten Sinn. Nicht die äußere politische Geschichte genügte Ihnen, sondern auch das ganze innere Leben Ihrer Nation im Laufe von sechs Jahrhunderten haben Sie aus den Quellen herausgearbeitet. Unzählige Urkunden und Aktenstücke sind durch Ihre Hände gegangen, und aus den trockenen Berichten über Besitzverhältnisse, Verfassungsstreitigkeiten, politische und kirchenrechtliche Organisationen und Schulordnungen haben Sie die Entwicklungsgeschichte des gemeinschaftlichen Lebens Ihrer Nation auf allen Linien zur Darstellung gebracht. So haben Sie Geschichtswerke geschaffen, die den strengsten Anforderungen der Geschichtswissenschaft genügen und zugleich Volksbücher in Ihrem Lande geworden sind. Das ist der höchste Ruhm, den der Geschichtsschreiber ernten kann! Mit Stolz dürfen Sie darauf hinweisen, daß Ihre Geschichtswerke bei Ihnen nicht nur von den Gelehrten gelesen werden, sondern auch in den Handwerkerstuben und Bauerhäusern ebenso zu finden sind wie Ihre eindrucksvollen Ansprachen. Dieser Erfolg wurde Ihnen zuteil, weil Sie die Seele Ihres Volkes kennen, und weil Sie neben der Pflege des ehrwürdigen heimischen Dialekts auf ein klares, volkstümlich erfrischtes Hochdeutsch bedacht sind, dessen Kenntnis und Wertschätzung ein festes Band zwischen dem Mutterlande und der Sächsischen Nation bildet. Ebendiese Nation verehrt in Ihnen den »pater patriae« und

weiß sich mit Ihnen untrennbar verbunden; die Akademie aber, die Sie, hochverehrter Herr Bischof, zu den ihrigen zählen darf, gibt an dem heutigen Tage der Freude Ausdruck, daß sie in Ihrer Person auch eine lebendige Beziehung zu dem unverlorenen deutschen Stamme besitzt, der im fernen Osten eine neue Heimat gefunden hat, und sie faßt alle ihre Wünsche am heutigen Tage in dem einen Wunsch zusammen: Möge Ihnen die unvergleichliche Arbeits- und Tatkraft, mit der Sie Ihr Volk und seine Wissenschaft erbauen und pflegen, noch viele Jahre erhalten bleiben.

Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 13. November.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1924

XXVII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 30. Oktober

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*Hr. v. Laue sprach über den Schwingungsvorgang, welcher einem beliebigen astigmatischen Strahlenbündel entspricht (nach Untersuchungen von Hrn. stud. phil. J. Picht) und über das Verhältnis der Oseenschen Nadelstrahlung zur spektroskopischen Auswahlregel (nach einer Arbeit von Frl. E. Weber).

Hr. Picht stellt ein beliebiges astigmatisches Bündel durch Superposition unendlich vieler ebener Wellen dar und diskutiert das Integral besonders für den Fall eines Rotationsparaboloids als Wellenfläche durch genaue numerische Durchrechnung.

Frl. Weber zeigt, daß die Auswahlregel der Spektroskopie für die Änderung der azimutalen Quantenzahl bei der Oseenschen Nadelstrahlung genau so herauskommt wie bei der Kugelwelle nach Untersuchungen Rubinowicz'.

Ausgegeben am 13. November.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1924 XXVIII—XXXIV

MAR 2 4 1925
Smithsonian

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 6. November. (S. 295)
Klassensitzung am 13. November. (S. 296)
SCHUR: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. II. Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen. (S. 297)
Gesamtsitzung am 20. November. (S. 322)
Klassensitzung am 27. November. (S. 323)
Gesamtsitzung am 4. Dezember. (S. 324)
HABERLANDT: Zur Entwickelungsphysiologie des Spaltöffnungsapparates. (S. 325)
Klassensitzung am 11. Dezember. (S. 337)
H. WEYL: Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen. (Aus einem Schreiben an Hrn. I. SCHUR.) (S. 338)
SCHUR: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. III. Vereinfachung des Integralkalküls. Realitätsfragen. (S. 346)
Gesamtsitzung am 18. Dezember. (S. 356)
Namen- und Sachregister. (S. 357)
Berichtigung. (S. 360)

BERLIN 1924

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XXVIII. Gesamtsitzung. 6. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

*1. Hr. Schlenk sprach über freie organische Radikale.

Der Vortragende gibt eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der Radikalforschung auf organischem Gebiet. Er macht dabei Mitteilung über einen neuen Typus von Verbindungen mit dreiwertigem Kohlenstoff und berichtet über die Ergebnisse einer Untersuchung, welche das chemische Verhalten von Metallketylen zum Gegenstand hatte.

2. Hr. Correns überreichte den ihm zum 60. Geburtstage dargebrachten Band: »Carl Correns' gesammelte Abhandlungen zur Vererbungswissenschaft aus periodischen Schriften 1899—1924« (Berlin 1924).

3. Hr. Bolte überreichte seine Schrift »Zur Geschichte der Punktier- und Losbücher« (Sonderabdr. [1924]).

Die Akademie hat den Professor an der Universität Princeton (U. S. A.) Hrn. Dr. Ernest Cushing Richardson zum korrespondierenden Mitgliede ihrer philosophisch-historischen Klasse gewählt.

Ausgegeben am 21. Januar 1925.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1924

XXIX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 13. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

Hr. Schur sprach über: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie (zweiter Teil).

Mit Hilfe der vom Verfasser früher entwickelten analytischen Methode werden alle irreduziblen Darstellungen der reellen Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen näher bestimmt und die zugehörigen Variabelnanzahlen genau berechnet. Für die Gruppe aller reellen orthogonalen Substitutionen läßt sich auch die Gesamtheit aller einfachen Charakteristiken angeben.

Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie.

II. Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen.

Von I. SCHUR.

Die vorliegende Arbeit bildet eine Fortsetzung der Untersuchungen, die ich unter dem gleichen Haupttitel in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1924, S. 189—208, veröffentlicht habe[1]. In den Bezeichnungen schließe ich mich aufs engste an die dort eingeführten an. Insbesondere verstehe ich wieder unter der *Drehungsgruppe* $\mathfrak{D}$ die Gruppe aller reellen orthogonalen Substitutionen von der Determinante 1 und unter $\mathfrak{D}'$ die Gruppe *aller* reellen orthogonalen Substitutionen in n Variabeln.

In A. I, §§ 4—9, habe ich bereits gezeigt, daß der HURWITZsche Integralkalkül uns die Möglichkeit gibt, eine allgemeine Theorie der (stetigen) Homomorphismen der Gruppen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ und ihrer Charakteristiken aufzubauen. Hierbei verfolgte ich als Hauptziel, die Grundzüge eines Abzählungskalküls in der Theorie der Orthogonalinvarianten zu entwickeln. Auf eine genauere Bestimmung aller möglichen Homomorphismen von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ war ich noch nicht eingegangen. Im folgenden gelange ich zu einer im wesentlichen vollständigen Lösung dieser Aufgabe.

Mein Hauptergebnis lautet: Alle stetigen Homomorphismen[2] der Gruppen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ lassen sich allein unter Benutzung ganzer rationaler Funktionen herstellen. Um eine Übersicht über die Gesamtheit der irreduziblen Gruppen linearer homogener Substitutionen zu gewinnen, die der Gruppe $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{D}'$ homomorph sind[3], verfahre man folgendermaßen. Bedeutet ν die Zahl $\left[\frac{n}{2}\right]$, so bilde man für jedes System von ν nicht negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu \tag{1}$$

bei geradem n den Ausdruck

$$N^{(n)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} = \frac{2^{\nu-1}}{2!\,4!\cdots(2\nu-2)!} \prod_{\varkappa<\lambda}^{1,\nu} (\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda - \varkappa + \lambda)\,(\alpha_\varkappa + \alpha_\lambda + n - \varkappa - \lambda)$$

[1] Im folgenden wird diese Arbeit kurz mit A. I zitiert.

[2] Auch da, wo ich im folgenden kurz von Homomorphismen spreche, soll die Stetigkeitseigenschaft stillschweigend vorausgesetzt werden.

[3] Daß man nur die irreduziblen Homomorphismen von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ zu kennen braucht, um alle übrigen zu beherrschen, habe ich bereits in A. I, §§ 5 und 9, gezeigt.

und bei ungeradem n den Ausdruck

$$N^{(n)}_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu} =$$

$$\frac{(2\alpha_1 + 2\nu - 1)\,(2\alpha_2 + 2\nu - 3)\cdots(2\alpha_\nu + 1)}{1!\,3!\cdots(2\nu-1)!} \prod_{\varkappa<\lambda}^{1,\nu} (\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda - \varkappa + \lambda)\,(\alpha_\varkappa + \alpha_\lambda + n - \varkappa - \lambda)\,.$$

Hierbei ist noch

$$N^{(2)}_{\alpha_1} = 1\,, \qquad N^{(3)}_{\alpha_1} = 2\alpha_1 + 1$$

zu setzen. Für ein ungerades n gehört zu jedem Indizessystem (1) eine mit $\mathfrak{D}$ homomorphe irreduzible Substitutionsgruppe $\mathfrak{G}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ in $N^{(n)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ Variabeln, die sich zu zwei mit $\mathfrak{D}'$ homomorphen, einander *assoziierten* Substitutionsgruppen $\mathfrak{H}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ und $\mathfrak{H}'_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ erweitern läßt[1]. Genau dasselbe gilt auch bei geradem n für jedes Indizessystem, dessen letzter Index α_ν gleich 0 ist. Für $\alpha_\nu > 0$ charakterisiert dagegen bei geradem n unser Indizessystem eine mit $\mathfrak{D}'$ homomorphe irreduzible *zweiseitige* Substitutionsgruppe $\mathfrak{H}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ in $2N^{(n)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ Variabeln, und die in ihr enthaltene mit $\mathfrak{D}$ homomorphe Untergruppe zerfällt in zwei verschiedene irreduzible Substitutionsgruppen $\mathfrak{G}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ und $\mathfrak{G}^*_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ in je $N_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ Variabeln.

Jede mit $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{D}'$ homomorphe irreduzible Substitutionsgruppe ist einer der hier aufgezählten, den verschiedenen Indizessystemen entsprechenden Gruppen ähnlich, dagegen sind unter diesen Gruppen niemals zwei einander ähnlich.

Jede mit $\mathfrak{D}'$ homomorphe Substitutionsgruppe läßt sich durch eine Ähnlichkeitstransformation in eine Gruppe reeller orthogonaler Substitutionen überführen. In einer späteren Arbeit werde ich zeigen, daß dasselbe im allgemeinen auch für die mit $\mathfrak{D}$ homomorphen irreduziblen Substitutionsgruppen gilt. Eine Ausnahme bilden nur für $n = 4k+2$ und $\alpha_\nu > 0$ die mit $\mathfrak{G}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ und $\mathfrak{G}^*_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ bezeichneten Gruppen, bei denen das Vorkommen imaginärer Koeffizienten nicht vermieden werden kann.

Für die Gruppe $\mathfrak{D}'$ habe ich im folgenden auch die sämtlichen einfachen Charakteristiken genau bestimmt. Für die Gruppe $\mathfrak{D}$ ist mir dies bei gerader Variabelnanzahl n noch nicht vollständig gelungen.

Bei dem Beweis der hier erwähnten Sätze benutze ich die auf dem Hurwitzschen Integralkalkül beruhenden analytischen Methoden, die ich in A. I entwickelt habe. Es handelt sich in erster Linie darum, gewisse Integrale mit wohlbestimmten Integranden genau zu berechnen. Bei der großen Kompliziertheit des Integrationsprozesses gelang dies für $n > 3$ nur, indem ich die numerischen Werte der einfachsten unter den zu studierenden Integralen unter Berücksichtigung ihrer invariantentheoretischen Bedeutung abgeleitet habe (vgl. § 3).

---

[1] Aus jeder der Gruppe $\mathfrak{D}'$ homomorphen Substitutionsgruppe $\mathfrak{H}$ geht die ihr assoziierte Gruppe $\mathfrak{H}'$ hervor, indem man die den uneigentlichen Elementen von $\mathfrak{D}'$ entsprechenden Substitutionen von $\mathfrak{H}$ mit dem negativen Vorzeichen versieht. Ist hierbei die Gruppe $\mathfrak{H}'$ der Gruppe $\mathfrak{H}$ ähnlich, so soll $\mathfrak{H}$ eine zweiseitige Gruppe heißen (vgl. hierzu Frobenius, *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1900, S. 516—534).

In der Literatur findet sich bereits einiges, was mit der hier durchgeführten Untersuchung in engem Zusammenhang steht. In zwei wichtigen Arbeiten hat Hr. E. CARTAN[1] eine Methode entwickelt, um alle irreduziblen kontinuierlichen Gruppen linearer homogener Substitutionen zu bestimmen, sowohl für komplexe als auch für reelle Parameter und Koeffizienten. Hierbei werden die Gruppen gleicher LIESCHER Struktur zusammengefaßt, was der Einteilung in Klassen von Gruppen, die einer gegebenen Gruppe homomorph sind, nahe verwandt ist. Da die von mir bestimmten mit der reellen Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ homomorphen irreduziblen Substitutionsgruppen kontinuierliche Gruppen sind, müßte es möglich sein, sie nach der CARTANschen Methode *mit der von mir erzielten genauen Angabe der zugehörigen Variabelnanzahlen* abzuleiten. Dies scheint aber noch mühsame Betrachtungen zu erfordern und dürfte kaum einen einfacheren Zugang zur Lösung des Problems für die Gruppe $\mathfrak{D}$ liefern als der von mir eingeschlagene Weg.

In einer gewissen Beziehung zu der Frage nach den irreduziblen Homomorphismen der Gruppen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ stehen auch die Ausführungen, die sich auf S. 262—267 des vor kurzem erschienenen Buches *der Ricci-Kalkül*[2] von Hrn. J. A. SCHOUTEN finden. Auch die Ergebnisse des Hrn. SCHOUTEN scheinen noch nicht auszureichen, um auf einfacherem Wege, als das im folgenden geschieht, zu meinen präzisen Resultaten zu gelangen.

§ 1. Allgemeine Vorbemerkungen.

Die charakteristischen Wurzeln einer eigentlichen reellen orthogonalen Substitution (Drehung) s haben für $n = 2\nu$ die Form

$$e^{i\phi_1}, \quad e^{-i\phi_1}, \quad \cdots, \quad e^{i\phi_\nu}, \quad e^{-i\phi_\nu}$$

und für $n = 2\nu + 1$ die Form

$$1, \quad e^{i\phi_1}, \quad e^{-i\phi_1}, \quad \cdots, \quad e^{i\phi_\nu}, \quad e^{-i\phi_\nu}.$$

Die Winkelgrößen $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu$ nenne ich die zu s gehörenden *Drehungswinkel.* Bezeichnet man demnach die (charakteristische) Determinante $|e - zs|$ mit $f(z, s)$, so wird für $n = 2\nu$

$$(2) \qquad f(z, s) = \prod_{\lambda=1}^{\nu} (1 - 2z\cos\phi_\lambda + z^2)$$

und für $n = 2\nu + 1$

$$(3) \qquad f(z, s) = (1 - z) \prod_{\lambda=1}^{\nu} (1 - 2z\cos\phi_\lambda + z^2).$$

[1] *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane*, Bull. de la Soc. Math. de France Bd. 41 (1913), S. 53—96, und *Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane*, Journ. de Math. Serie 6, Bd. 10 (1914), S. 149—186. — Den Hinweis auf diese Arbeiten verdanke ich Hrn. H. WEYL. Hr. WEYL hat mir auch in freundlicher Weise den Entwurf einer für die Göttinger Nachrichten bestimmten Note übersandt, in der er einen Teil der CARTANschen Untersuchungen wesentlich weiterführt und insbesondere auch eine neue Methode zur Lösung des Darstellungsproblems für die Drehungsgruppe auseinandersetzt. [Zusatz bei der Korrektur. Neuerdings ist es Hrn. WEYL gelungen, meine Ergebnisse auf kürzerem Wege abzuleiten und Entsprechendes auch bei anderen Gruppentypen zu erzielen.]

[2] Berlin, Julius Springer 1924.

Innerhalb der Gruppe $\mathfrak{D}'$ sind zwei Drehungen dann und nur dann einander ähnlich, wenn die zugehörigen Funktionen $f(z, s)$ übereinstimmen. Für ein ungerades n gilt dasselbe bereits innerhalb der Gruppe $\mathfrak{D}$. Eine Drehung s mit den Drehungswinkeln $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu$ ist in diesem Fall insbesondere der Drehung

$$\begin{aligned} x'_{2\lambda-1} &= \cos\phi_\lambda \cdot x_{2\lambda-1} + \sin\phi_\lambda \cdot x_{2\lambda}, \\ x'_{2\lambda} &= -\sin\phi_\lambda \cdot x_{2\lambda-1} + \cos\phi_\lambda \cdot x_{2\lambda} \\ x'_{2\nu+1} &= x_{2\nu+1} \end{aligned} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \nu)$$

ähnlich, die mit $S(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu)$ bezeichnet werden soll. Ein komplizierteres Verhalten zeigt der Fall eines geraden n. Versteht man hier unter $S(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu)$ die Drehung

$$\begin{aligned} x'_{2\lambda-1} &= \cos\phi_\lambda \cdot x_{2\lambda-1} + \sin\phi_\lambda \cdot x_{2\lambda}, \\ x'_{2\lambda} &= -\sin\phi_\lambda \cdot x_{2\lambda-1} + \cos\phi_\lambda \cdot x_{2\lambda}, \end{aligned} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \nu)$$

so bestimmen

$$s_1 = S(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu), \qquad s_2 = S(-\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu)$$

zwei verschiedene Klassen ähnlicher Elemente von $\mathfrak{D}$, und jede Drehung mit den Drehungswinkeln $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu$ gehört einer dieser beiden Klassen an. Die durch s_1 bestimmte Klasse ändert sich ferner nicht, wenn man die Reihenfolge der Drehungswinkel ϕ_λ abändert oder eine *gerade* Anzahl unter ihnen mit negativen Vorzeichen versieht.

Es sei nun $H(s)$ ein beliebiger stetiger Homomorphismus der Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ mit der Charakteristik $\chi(s)$. Man setze

$$\chi(S(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu)) = F(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu).$$

Da $\chi(s)$ für alle Elemente einer Klasse von $\mathfrak{D}$ denselben Wert hat, so wird, wenn zu s die Drehungswinkel $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu$ gehören, für $n = 2\nu + 1$

$$\chi(s) = F(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu)$$

und für $n = 2\nu$

$$\chi(s) = F(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu) \quad \text{oder} \quad \chi(s) = F(-\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu)$$

sein. Die Funktion F hat hierbei folgende Eigenschaften:

1. Sie ist eine stetige Funktion der ν Variabeln ϕ_λ und in bezug auf jede der Variabeln periodisch mit der Periode 2π.

2. Sie ist eine symmetrische Funktion der ν Variabeln.

3. Bei ungeradem n ist F in bezug auf jede der Variabeln eine gerade Funktion, bei geradem n bleibt F ungeändert, wenn bei einer geraden Anzahl der Variabeln die Vorzeichen geändert werden.

Ist u ein beliebiges uneigentliches Element von $\mathfrak{D}'$, so stellt neben $H(s)$ auch

$$H^*(s) = H(u^{-1} s u)$$

einen Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ dar, den ich den zu $H(s)$ *adjungierten* Homomorphismus nenne. Ebenso soll die Charakteristik $\chi^*(s)$ von $H^*(s)$ die zu

$\chi(s)$ adjungierte Charakteristik heißen[1]. Ist $\chi^*(s) = \chi(s)$, d. h. sind $H(s)$ und $H^*(s)$ einander ähnlich, so bezeichne ich $H(s)$ als einen *geraden Homomorphismus*, $\chi(s)$ als eine *gerade Charakteristik*. Bei ungeradem n ist jede Charakteristik von $\mathfrak{D}$ gerade. Bei geradem n ist das nicht notwendig der Fall. Ist $\chi(s)$ nicht gerade, so tritt beim Übergang von $\chi(s)$ zu $\chi^*(s)$ an Stelle der Funktion $F(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu)$ die Funktion $F(-\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu)$. Nur für eine gerade Charakteristik stimmen diese beiden Funktionen (bei beliebiger Wahl der Argumente) überein. Zu beachten ist auch noch, daß eine gerade Charakteristik $\chi(s)$ für alle s einen reellen Wert hat. Denn da s und s^{-1} dieselben charakteristischen Wurzeln aufweisen, so wird in diesem Falle

$$\chi(s^{-1}) = \bar{\chi}(s) = \chi(s).$$

Für die Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{D}'$ gilt folgendes: Zu jeder solchen Charakteristik $\chi(t)$ gehört eine zweite, ihr *assoziierte* Charakteristik $\chi'(t)$, die man erhält, indem man

$$\chi'(s) = \chi(s), \qquad \chi'(u) = -\chi(u)$$

setzt[2]. Hierbei soll s eine beliebige Drehung, u ein beliebiges uneigentliches Element von $\mathfrak{D}'$ kennzeichnen. Wird $\chi'(t) = \chi(t)$, d. h. $\chi(u) = 0$ für jedes u, so soll $\chi(t)$ eine *zweiseitige* Charakteristik von $\mathfrak{D}'$ heißen. Bei ungeradem n gibt es unter den einfachen Charakteristiken von $\mathfrak{D}'$ keine zweiseitigen. Denn sonst müßte $\chi(-e) = \pm\chi(e) = 0$ sein (vgl. A. I, § 9).

Allgemein kann behauptet werden: *Ist $\chi(t)$ eine einfache Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{D}'$, so liefert für die eigentlichen Elemente s von $\mathfrak{D}'$ die Funktion $\chi(s)$ eine gerade Charakteristik von $\mathfrak{D}$, die einfach ist, wenn $\chi(t)$ nicht zweiseitig ist, dagegen als Summe von zwei einfachen, einander adjungierten Charakteristiken $\chi_1(s)$ und $\chi_1^*(s)$ von $\mathfrak{D}$ erscheint, wenn $\chi(t)$ eine zweiseitige Charakteristik von $\mathfrak{D}'$ ist.*

Dies erkennt man am einfachsten mit Hilfe der in A. I abgeleiteten Integralrelationen für einfache Charakteristiken. In der Tat folgt aus

$$\oint \chi^2(t)\, dt = 2h$$

die Formel

$$\int \chi^2(s)\, ds + \int \chi^2(su_0)\, ds = 2h.$$

Für eine nicht zweiseitige Charakteristik $\chi(t)$ kommt noch hinzu

$$\oint \chi(t)\chi'(t^{-1})\, dt = \oint \chi(t)\chi'(t)\, dt = 0,$$

was

$$\int \chi^2(s)\, ds - \int \chi^2(su_0)\, ds = 0$$

liefert (vgl. A. I, § 9). Je nachdem also $\chi(t)$ zweiseitig ist oder nicht, wird folglich

$$\int \chi^2(s)\, ds = \int |\chi(s)|^2 ds = 2h \quad \text{oder} \quad = h.$$

[1] Man erkennt leicht, daß $\chi^*(s)$ von der Wahl des uneigentlichen Elementes u unabhängig ist.

[2] Vgl. die Fußnote auf S. 298.

Hieraus folgt aber, daß im zweiten Falle $\chi(s)$ eine einfache Charakteristik von $\mathfrak{D}$ ist, im ersten Fall dagegen die Form

$$\chi(s) = \chi_1(s) + \chi_2(s)$$

hat, wo χ_1 und χ_2 zwei voneinander verschiedene einfache Charakteristiken von $\mathfrak{D}$ bedeuten. Daß sie einander adjungiert sind, ergibt sich wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in einfache Bestandteile aus

$$\chi^*(s) = \chi_1^*(s) + \chi_2^*(s) = \chi_1(s) + \chi_2(s) .$$

Für ein ungerades n ist die Aufgabe, alle einfachen Charakteristiken von $\mathfrak{D}$ zu bestimmen, im wesentlichen identisch mit der analogen Aufgabe für die Gruppe $\mathfrak{D}'$. Man hat nur jeder einfachen Charakteristik $\chi(s)$ von $\mathfrak{D}$ die beiden einander assoziierten Charakteristiken $\zeta(t)$ und $\zeta'(t)$ von $\mathfrak{D}'$ zuzuordnen, die man erhält, indem man

$$\zeta(s) = \chi(s) , \qquad \zeta(-s) = \chi(s)$$
$$\zeta'(s) = \chi(s) , \qquad \zeta'(-s) = -\chi(s)$$

setzt. Für ein gerades n ist folgende Bemerkung von Wichtigkeit.

Es sei auf irgendeine Weise gelungen, eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'$ von einfachen Charakteristiken $\chi(t)$ der Gruppe $\mathfrak{D}'$ zu bestimmen, die folgende Eigenschaften aufweist:

1. Neben jeder Charakteristik $\chi(t)$ enthält $\mathfrak{M}'$ auch die assoziierte Charakteristik $\chi'(t)$.

2. Denkt man sich für alle $\chi(t)$ von $\mathfrak{M}'$ die zugehörigen einfachen Charakteristiken $\chi(s)$ bzw. $\chi_1(s)$ und $\chi_1'(s)$ von $\mathfrak{D}$ bestimmt, so sei schon bekannt, daß sich auf diese Weise die Gesamtheit $\mathfrak{M}$ *aller* einfachen Charakteristiken von $\mathfrak{D}$ ergibt.

Dann kann behauptet werden, daß $\mathfrak{M}'$ auch die Gesamtheit aller einfachen Charakteristiken von $\mathfrak{D}'$ umfaßt. Denn wäre $\zeta(t)$ eine einfache Charakteristik von $\mathfrak{D}'$, die in $\mathfrak{M}'$ nicht vorkommt, so müßte es in $\mathfrak{M}'$ ein $\chi(t)$ geben, so daß für alle Drehungen s

$$\zeta(s) = \chi(s)$$

wird. Andererseits würden aber die Relationen

$$\oint \zeta(t)\chi(t)\,dt = 0 , \qquad \oint \zeta(t)\chi'(t)\,dt = 0$$

gelten, aus denen durch Addition die gewiß falsche Formel

$$\int \zeta(s)\chi(s)\,ds = \int \chi^2(s)\,ds = 0$$

folgt.

Um nachzuweisen, daß die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'$ der zweiten Bedingung genügt, hat man nur folgendes zu wissen: Ist $\gamma(s)$ eine (stetige) *gerade Klassenfunktion* der allgemeinen Drehung s, d. h. eine Funktion von s, die für alle zu s innerhalb $\mathfrak{D}'$ ähnlichen Drehungen denselben Wert hat, so kann nicht für alle $\chi(t)$ von $\mathfrak{M}'$

$$\int \gamma(s)\chi(s)\,ds = 0 \tag{4}$$

sein, ohne daß $\gamma(s)$ identisch Null wird. Denn wäre $\eta(s)$ eine einfache Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{D}$, die nicht in $\mathfrak{M}$ vorkommt, so würde

$$\gamma(s) = \eta(s) + \eta^*(s)$$

eine gerade Klassenfunktion liefern, die allen Relationen (4) genügt, aber nicht identisch Null ist (vgl. A. I, § 6).

Eine wichtige Rolle spielt in der ganzen hier zu entwickelnden Theorie eine spezielle Klasse von Homomorphismen der Gruppe $\mathfrak{D}'$. Ist

$$(t)\quad x'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} t_{\varkappa\lambda} x_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ein beliebiges Element von $\mathfrak{D}'$, so erhält man die k-te Potenztransformation $P_k(t)$ von t, indem man die $\binom{n+k-1}{k}$ Potenzprodukte k-ter Dimension der $x'_\varkappa$ durch die analogen Potenzprodukte der x_λ ausdrückt[1]. Da nun

$$\sum x'^2_\varkappa = \sum x^2_\lambda$$

ist, so erscheinen hierbei für $k \geq 2$ die $\binom{n+k-3}{k-2}$ Ausdrücke

$$x'^{\alpha_1}_1 x'^{\alpha_2}_2 \cdots x'^{\alpha_n}_n \cdot \sum x'^2_\varkappa \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k-2)$$

als lineare homogene Verbindungen der entsprechenden Ausdrücke in den Variabeln x_λ. Die sich hierbei ergebende lineare Transformation ist nichts anderes als $P_{k-2}(t)$. Dies besagt aber, daß $P_k(t)$ durch eine von t unabhängige Ähnlichkeitstransformation auf die Form

$$\begin{pmatrix} P_{k-2}(t) & 0 \\ C_k(t) & Q_k(t) \end{pmatrix}$$

gebracht werden kann. Für $k < 2$ setze man noch

$$Q_0(t) = 1, \qquad Q_1(t) = P_1(t).$$

Bedeutet $f(z, t)$ die Determinante $|e - zt|$ und ist für $|z| < 1$

$$(5)\qquad \frac{1}{f(z, t)} = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots, \qquad (p_0 = 1)$$

so ist bekanntlich p_k die Charakteristik von $P_k(t)$. Die Charakteristik $q_k = q_k(t)$ des Homomorphismus $Q_k(t)$ von $\mathfrak{D}'$ ist demnach mit Hilfe der Formel

$$q_k = p_k - p_{k-2} \qquad (p_{-1} = p_{-2} = 0)$$

oder, was dasselbe ist, aus der Formel

$$\frac{1 - z^2}{f(z, t)} = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots$$

zu berechnen.

[1] Unter $P_0(t)$ ist hierbei der triviale Homomorphismus zu verstehen, bei dem jedem t die Zahl 1 zugeordnet wird.

§ 2. Die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

In diesen beiden Fällen gestaltet sich die Untersuchung besonders einfach. Dies beruht darauf, daß hier der HURWITZsche Integralkalkül eine weitgehende Vereinfachung zuläßt. In beiden Fällen gehört zu einer Drehung s nur ein Drehungswinkel ϕ, und eine gerade Klassenfunktion $\gamma(s)$ läßt sich einfach als gerade Funktion $F(\phi)$ von ϕ mit der Periode 2π auffassen. Ferner wird (vgl. A. I, § 8) für $n = 2$

$$\frac{1}{h}\int \gamma(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\phi)\,d\phi$$

und für $n = 3$

$$\frac{1}{h}\int \gamma(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\phi)\,(1-\cos\phi)\,d\phi\,.$$

Im Falle $n = 2$ wird für eine Drehung s

$$f(z, s) = 1 - 2z\cos\phi + z^2$$

und

$$\frac{1-z^2}{f(z, s)} = 1 + 2\cos\phi\cdot z + 2\cos 2\phi\cdot z^2 + \cdots,$$

dagegen ist für ein uneigentliches Element u von $\mathfrak{D}'$

$$f(z, u) = 1 - z^2\,.$$

Dies liefert für $k > 0$

$$q_k(s) = 2\cos k\phi\,, \qquad q_k(u) = 0\,.$$

Zugleich ergibt sich für $k > 0$

$$\frac{1}{2h}\oint q_k^2(t)\,dt = \frac{1}{2h}\int q_k^2(s)\,ds = \frac{4}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 k\phi\,d\phi = 1\,.$$

Demnach erscheinen hier

$$q_1(t)\,, \quad q_2(t)\,, \quad \cdots$$

als einfache, voneinander verschiedene zweiseitige Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{D}'$. Nimmt man zu $q_0 = 1$ noch die assoziierte Charakteristik q_0' hinzu, so erhält man in

$$q_0\,, \quad q_0'\,, \quad q_1(t)\,, \quad q_2(t)\,, \quad \cdots$$

eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'$ von einfachen Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{D}'$, die den beiden auf S. 302 genannten Bedingungen genügt. Daß auch die zweite Forderung erfüllt ist, ergibt sich einfach aus der Tatsache, daß eine stetige gerade Funktion $F(\phi)$ mit der Periode 2π, die den Bedingungen

$$\int_0^{2\pi} F(\phi)\,d\phi = 0\,, \qquad 2\int_0^{2\pi} F(\phi)\cos k\phi\,d\phi = 0$$

genügt, identisch verschwinden muß. Für $k > 0$ wird

$$q_k(s) = 2\cos k\phi = e^{ik\phi} + e^{-ik\phi},$$

und hieraus folgt:

I. *Für* $n = 2$ *stellen die Homomorphismen*

$$Q_0, \quad Q_1', \quad Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad \cdots$$

mit den Variabelnanzahlen

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad \cdots$$

ein vollständiges System von irreduziblen Homomorphismen der Gruppe $\mathfrak{D}'$ *dar, ferner bilden*

$$1, \quad e^{i\phi}, \quad e^{-i\phi}, \quad e^{2i\phi}, \quad e^{-2i\phi}, \quad \cdots$$

das vollständige System der irreduziblen Homomorphismen der Gruppe $\mathfrak{D}$.

Ebenso einfach ist der Fall $n = 3$ zu erledigen. Hier wird

$$f(z, s) = (1 - z)(1 - 2z\cos\phi + z^2),$$

also

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k = \frac{1 + z}{1 - 2z\cos\phi + z^2}. \tag{6}$$

Sind z_1 und z_2 zwei voneinander unabhängige Veränderliche, die beide auf das Innere des Einheitskreises beschränkt bleiben, so liefert eine einfache Rechnung

$$\frac{1}{h}\int \left(\sum_{k,l} q_k q_l z_1^k z_2^l\right) ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2} \frac{(1 + z_1)(1 + z_2)(1 - \cos\phi)}{(1 - 2z_1\cos\phi + z_1^2)(1 - 2z_2\cos\phi + z_2^2)}\, d\phi$$

$$= \frac{1}{1 - z_1 z_2} = \sum_k z_1^k z_2^k.$$

Daher wird hier

$$\frac{1}{h}\int q_k^2\, ds = 1, \qquad \frac{1}{h}\int q_k q_l\, ds = 0.$$

Folglich sind für $n = 3$

$$q_0, \quad q_1, \quad q_2, \quad \cdots \tag{7}$$

lauter voneinander verschiedene einfache Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{D}$. Andere derartige Charakteristiken gibt es aber nicht. Denn aus (6) folgt leicht

$$q_k = 1 + 2\cos\phi + 2\cos 2\phi + \cdots + 2\cos k\phi. \tag{8}$$

Wäre daher $\chi(s)$ eine einfache Charakteristik von $\mathfrak{D}$, die in (7) nicht vorkommt, so würde aus $\int \chi(s)\, q_k(s)\, ds = 0$ folgen, daß für $k = 0, 1, \cdots$

$$\int_0^{2\pi} \chi(s)\cos k\phi\,(1 - \cos\phi)\, d\phi = 0.$$

Da aber $\chi(s)$ eine stetige gerade Funktion von ϕ mit der Periode 2π ist, so müßte $\chi(s) = 0$ sein. Dies liefert den Satz:

II. *Für* $n = 3$ *stellen die Homomorphismen*

$$Q_0, \quad Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad \cdots \tag{9}$$

mit den Variabelnanzahlen[1]

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad \cdots$$

ein vollständiges System von irreduziblen Homomorphismen der Gruppe $\mathfrak{D}$ *dar. Um für die Gruppe* $\mathfrak{D}'$ *ein ebensolches System zu erhalten, hat man nur zu den Homomorphismen* (9) *die zugehörigen assoziierten Homomorphismen*

$$Q_0', \quad Q_1', \quad Q_2', \quad Q_3', \quad \cdots$$

hinzuzufügen.

§ 3. Eine Hilfsbetrachtung.

Um auch für $n > 3$ in ähnlicher Weise vorgehen zu können wie für $n \leqq 3$, müßten wir vor allem imstande sein, eine Funktion $M(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu)$ der ν Drehungswinkel anzugeben, so daß für jede gerade Klassenfunktion $\gamma(s)$

$$\int \gamma(s)\, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \gamma(s)\, M(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu)\, d\phi_1\, d\phi_2 \cdots d\phi_\nu$$

wird[2]. In einer später erscheinenden Arbeit werde ich mit Hilfe der hier abzuleitenden Resultate eine solche Funktion M angeben. Vorläufig müssen wir einen anderen Weg einschlagen.

Ich beweise folgenden Satz:

III. *Hat* $f(z, s)$ *die frühere Bedeutung, und setzt man, wenn* $z_1, z_2, \cdots, z_m$ *beliebige Größen im Innern des Einheitskreises bedeuten,*

$$f_\mu = f(z_\mu, s),$$

so wird für $m = 1, 2, \cdots, n-1$

$$\frac{1}{h} \int \frac{ds}{f_1 f_2 \cdots f_m} = \prod_{\nu \leqq \lambda}^{m} \frac{1}{1 - z_\nu z_\lambda} \tag{10}$$

und für $m = n$

$$\frac{1}{h} \int \frac{ds}{f_1 f_2 \cdots f_n} = (1 + z_1 z_2 \cdots z_n) \prod_{\nu \leqq \lambda}^{n} \frac{1}{1 - z_\nu z_\lambda}. \tag{11}$$

Ferner ist für $m = 1, 2, \cdots, n$

$$\frac{1}{2h} \oint \frac{dt}{f_1 f_2 \cdots f_m} = \prod_{\nu \leqq \lambda}^{m} \frac{1}{1 - z_\nu z_\lambda}.^{3} \tag{12}$$

Beim Beweis gehen wir in einer Reihe von Einzelschritten vor.

1. Die zu beweisenden Formeln haben (wegen $f(0, s) = 1$) die Eigenschaft, daß zugleich mit der Faktorenanzahl m auch die Anzahl $m - 1$ als

---

[1] Die Berechnung dieser Zahlen geschieht am einfachsten, indem man in (8) $\phi = 0$ setzt.

[2] Hierbei ist zu berücksichtigen, daß eine gerade Klassenfunktion $\gamma(s)$ nur von den ν zu s gehörenden Drehungswinkeln ϕ_λ abhängt.

[3] In dieser Formel hat man natürlich $f_\mu = f(z_\mu, t)$ zu setzen.

erledigt anzusehen ist. Wir können also mit $m = \nu$ anfangen. Ich behaupte nun, daß die Formeln (10) und (11) sich aus der Formel (10) für $m = \nu$ folgern lassen.

Versteht man nämlich unter $g(z, s)$ für $n = 2\nu$ das Polynom $f(z, s)$ und für $n = 2\nu + 1$ das Polynom $(1 - z)^{-1} f(z, s)$, so hat $g(z, s)$ auf Grund der Formeln (2) und (3) die Gestalt

$$g(z, s) = Z^\nu + c_1 Z^{\nu-1} z + c_2 Z^{\nu-2} z^2 + \cdots + c_\nu z^\nu .$$

Hierbei ist $Z = 1 + z^2$ zu setzen. Führt man noch die abkürzenden Bezeichnungen

$$g_\mu = g(z_\mu, s), \qquad Z_\mu = 1 + z_\mu^2 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m)$$

ein, so ergibt sich aus

$$g_\lambda = Z_\lambda^\nu + c_1 Z_\lambda^{\nu-1} z_\lambda + c_2 Z_\lambda^{\nu-2} z_\lambda^2 + \cdots + c_\nu z_\lambda^\nu$$

für $\lambda = 1, 2, \cdots, \nu + 1$ die Determinantenrelation

$$(13) \quad \left| g_\lambda,\ Z_\lambda^{\nu-1} z_\lambda,\ Z_\lambda^{\nu-2} z_\lambda^2,\ \cdots,\ z_\lambda^\nu \right| = \left| Z_\lambda^\nu,\ Z_\lambda^{\nu-1} z_\lambda,\ Z_\lambda^{\nu-2} z_\lambda^2,\ \cdots,\ z_\lambda^\nu \right| .$$

Wird noch

$$\Delta = \left| 1,\ z_\lambda,\ z_\lambda^2,\ \cdots,\ z_\lambda^\nu \right| = \prod_{\lambda<\mu}^{1\ \nu+1} (z_\mu - z_\lambda),$$

$$L_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r} = \prod_{\varrho<\sigma}^{1\ r} (1 - z_{\alpha_\varrho} z_{\alpha_\sigma})$$

gesetzt, so wird, wie man leicht sieht,

$$(14) \quad \left| Z_\lambda^\nu,\ Z_\lambda^{\nu-1} z_\lambda,\ Z_\lambda^{\nu-2} z_\lambda^2,\ \cdots,\ z_\lambda^\nu \right| = \Delta \cdot L_{1, 2, \cdots, \nu, \nu+1}$$

und hieraus folgt ohne Mühe, daß die Formel (13) in der Form

$$(15) \quad \left| g_\lambda L_{1, \cdots, \lambda-1, \lambda+1, \cdots, \nu+1},\ z_\lambda,\ z_\lambda^2,\ \cdots,\ z_\lambda^\nu \right| = \Delta \cdot L_{1, 2, \cdots, \nu, \nu+1}$$

geschrieben werden kann.

Um nun die Formeln (11) und (12) zu beweisen, hat man zu zeigen, daß

$$(16) \quad h \int_1^h \frac{ds}{g_1 g_2 \cdots g_m} = \frac{F_m}{k_1 k_2 \cdots k_m} \cdot \frac{1}{L_{1, 2, \cdots, m}}$$

ist, wobei k_μ für $n = 2\nu$ gleich $1 - z_\mu^2$ und für $n = 2\nu + 1$ gleich $1 + z_\mu$ zu setzen ist, außerdem soll

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_{n-1} = 1, \qquad F_n = 1 + z_1 z_2 \cdots z_n$$

sein. Hierbei genügt es, $\nu \leqq m \leqq n$ anzunehmen. Weiß man nun schon, daß (16) für ein m richtig ist, das der Bedingung $\nu \leqq m < n$ genügt, so folgt aus (15), indem man mit

$$\frac{1}{h} \frac{k_1 k_2 \cdots k_{m+1}}{g_1 g_2 \cdots g_{m+1}} \cdot \frac{L_{1, 2, \cdots, m+1}}{L_{1, 2, \cdots, \nu+1}}$$

multipliziert und nach s integriert, für $m = \nu$

$$\left| k_\lambda,\ z_\lambda,\ z_\lambda^2,\ \cdots,\ z_\lambda^\nu \right| = \Delta \cdot k_1 k_2 \cdots k_{\nu+1} \cdot L_{1, 2, \cdots, \nu+1} \cdot \frac{1}{h} \int_1^h \frac{ds}{g_1 g_2 \cdots g_{\nu+1}}$$

und für $m > \nu$

$$\left| k_\lambda (1 - z_\lambda z_{\lambda+2}) \cdots (1 - z_\lambda z_{\lambda+m+1}),\ z_\lambda,\ z_\lambda^2,\ \cdots,\ z_\lambda^\nu \right| = \Delta \cdot k_1 k_2 \cdots k_{m+1} L_{1,2,\cdots,m+1} \cdot \frac{1}{h} \int \frac{ds}{g_1 g_2 \cdots g_{m+1}}.$$

In beiden Fällen wird die linksstehende Determinante für $m < n-1$ gleich Δ. Für $m = n-1$ wird sie dagegen gleich

$$\left| 1 + (-1)^\nu z_\lambda^{\nu+1} z_{\nu+2} \cdots z_n,\ z_\lambda,\ z_\lambda^2,\ \cdots,\ z_\lambda^\nu \right| = (1 + z_1 z_2 \cdots z_n)\Delta.$$

Nach Division durch Δ erhalten wir die für $m+1$ zu beweisende Gleichung. Ist die Formel (16) also für $m = \nu$ richtig, so gilt sie auch für $m = \nu+1, \nu+2, \cdots, n$.

2. Für jedes m läßt sich das Integral

$$\frac{1}{h} \int \frac{ds}{f_1 f_2 \cdots f_m} \tag{17}$$

in der Form

$$\sum_{k_1, k_2, \cdots k_m}^{0 \cdots \infty} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_m^{k_m} \cdot \frac{1}{h} \int p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} ds \tag{18}$$

schreiben (vgl. die Formel (5)). Das Produkt $p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m}$ ist nichts anderes als die Charakteristik der Operation[1]

$$P_{k_1} \times P_{k_2} \times \cdots \times P_{k_m}, \tag{19}$$

die einen Homomorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}$ aller linearen homogenen Substitutionen in n Variabeln darstellt, und der in (18) auftretende Ausdruck

$$A_{k_1, k_2, \cdots, k_m} = \frac{1}{h} \int p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} ds$$

kann gedeutet werden als die Anzahl der linear unabhängigen unter den linearen Invarianten, die zu dem Homomorphismus (19) der Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ gehören (vgl. A. I, § 7). Man kann dieser Zahl aber auch noch eine andere Deutung beilegen. Der Drehung $s = (s_{\varkappa\lambda})$ ordne man die m Substitutionen

$$y_\varkappa^{(\mu)} = \sum s_{\varkappa\lambda} x_\lambda^{(\mu)} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n, \mu = 1, 2, \cdots, m) \tag{20}$$

zu. Dann ist $A_{k_1, k_2, \cdots, k_m}$ gleich der Anzahl der linear unabhängigen unter den zugehörigen ganzen rationalen (absoluten) Invarianten

$$J(x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}, \cdots, x_1^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)}), \tag{21}$$

die in bezug auf die Variabelnreihe $x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}, \cdots, x_n^{(\mu)}$ homogen vom Grade k_μ sind[2].

[1] Ich bediene mich hierbei der bekannten Bezeichnungen, die HURWITZ in seiner Arbeit *Zur Invariantentheorie*, Math. Ann. Bd. 45, S. 381, eingeführt hat.

[2] Man kann $A_{k_1, k_2, \cdots, k_m}$ auch auffassen als die Anzahl der linear unabhängigen unter den m-fach linearen simultanen Orthogonalinvarianten, die zu einem System von m Grundformen $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ der Grade $k_1, k_2, \cdots, k_m$ gehören.

Spezielle Invarianten des Systems (20) sind die Ausdrücke

$$J_{\alpha\beta} = x_1^{(\alpha)} x_1^{(\beta)} + x_2^{(\alpha)} x_2^{(\beta)} + \cdots + x_n^{(\alpha)} x_n^{(\beta)}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, m) \tag{22}$$

ferner kommt für $m = n$ noch die Invariante

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{23}$$

hinzu. Für $m \leqq n$ lassen sich die $\binom{m+1}{2}$ Invarianten (22), die man für $\alpha \leqq \beta$ erhält, als voneinander unabhängige Veränderliche auffassen. Daß dies auch noch für $m = n$ richtig ist, folgt am einfachsten daraus, daß *jede* quadratische Form in n Variabeln $u_1, u_2, \cdots u_n$ bei passender Wahl der $x_\lambda^{(\mu)}$ auf die Gestalt

$$\sum_{\mu=1}^{n} (x_1^{(\mu)} u_1 + x_2^{(\mu)} u_2 + \cdots + x_n^{(\mu)} u_n)^2 = \sum_{\alpha,\beta}^{n} J_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$$

gebracht werden kann.

Eine Invariante (21), wie wir sie brauchen, stellt jedes Produkt

$$J_{11}^{\alpha_{11}} J_{12}^{\alpha_{12}} \cdots J_{mm}^{\alpha_{mm}} \qquad (\alpha_{\lambda\mu} \geqq 0)$$

dar, sobald nur

$$\begin{aligned} 2\alpha_{11} + \alpha_{12} + \cdots + \alpha_{1m} &= k_1, \\ \alpha_{12} + 2\alpha_{22} + \cdots + \alpha_{2,m} &= k_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1,m} + \alpha_{2,m} + \cdots + 2\alpha_{mm} &= k_m \end{aligned}$$

ist. Die Anzahl aller möglichen Produkte dieser Art ist aber nichts anderes als der Koeffizient von $z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_m^{k_m}$ in der Potenzreihenentwicklung des in der Formel (10) rechts stehenden Ausdrucks. Man sieht nun unmittelbar, daß die Formel (10) identisch ist mit der Behauptung: *Ist* $m < n$, *so bilden die* $\binom{m+1}{2}$ *Invarianten* $J_{\alpha\beta} (\alpha \leqq \beta)$ *eine Basis für die Gesamtheit* $\mathfrak{G}$ *aller Invarianten des Systems* (20) (vgl. E. STUDY, Leipziger Berichte 1897, S. 443—461).

Wir brauchen dies aber nur für $m = \nu$ zu beweisen. Nimmt man unsere Behauptung, die für $n = 2$ trivial ist, für $n - 1$ Variable als schon bewiesen an, so können wir folgendermaßen schließen. Ist

$$J = J(x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}, \cdots, x_1^{(\nu)}, \cdots, x_n^{(\nu)})$$

eine der zu betrachtenden Invarianten und faßt man J als Funktion der Variabeln $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_1^{(\nu)}$ auf, so erscheinen die Koeffizienten als Invarianten des Systems

$$y_\rho^{(\mu)} = \sum_{\sigma} s_{\rho\sigma} x_\sigma^{(\mu)}, \qquad (\rho, \sigma = 2, 3, \cdots n; \quad \mu = 1, 2, \cdots, \nu)$$

wobei $(s_{\varrho\sigma})$ alle Drehungen in $n-1$ Variabeln durchläuft. Da für $n > 2$

$$\nu = \left[\frac{n}{2}\right] < n-1$$

ist, so lassen sich diese Koeffizienten durch die $\binom{\nu+1}{2}$ Summen

$$J'_{\alpha\beta} = x_2^{(\alpha)} x_2^{(\beta)} + x_3^{(\alpha)} x_3^{(\beta)} + \cdots + x_n^{(\alpha)} x_n^{(\beta)} \qquad (\alpha \leqq \beta = 1, 2, \cdots, \nu)$$

ausdrücken. Schreibt man nun $J_{\alpha\beta} - x_1^{(\alpha)} x_1^{(\beta)}$ für $J'_{\alpha\beta}$, so erscheint J in der Form

$$(24) \qquad J = F(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_1^{(\nu)}, J_{11}, J_{12}, \cdots, J_{\nu\nu}),$$

wo F ein Polynom bedeutet. Wählt man aber für (20) das spezielle System von ν Drehungen

$$y_1^{(\mu)} = x_2^{(\mu)},\ y_2^{(\mu)} = -x_1^{(\mu)},\ y_3^{(\mu)} = x_3^{(\mu)}, \cdots,\ y_n^{(\mu)} = x_n^{(\mu)},$$

so erhält man

$$(25) \qquad J = F(x_2^{(1)},\ x_2^{(2)}, \cdots,\ x_2^{(\nu)},\ J_{11},\ J_{12}, \cdots,\ J_{\nu\nu}).$$

Hieraus folgt aber, daß die Koeffizienten in der Entwicklung von F nach den $J_{\alpha\beta}$ Konstanten sein müssen. Denn sonst würde sich aus (24) und (25) eine Relation zwischen den $2\nu + \binom{\nu+1}{2}$ Veränderlichen

$$x_1^{(1)},\ x_1^{(2)}, \cdots,\ x_1^{(\nu)},\ x_2^{(1)},\ x_2^{(2)},\ x_2^{(\nu)},\ J_{11},\ J_{12}, \cdots,\ J_{\nu\nu}$$

ergeben. Diese Ausdrücke sind aber voneinander unabhängig, weil es noch die $\binom{\nu+1}{2}$ Ausdrücke

$$x_3^{(\alpha)} x_3^{(\beta)} + x_4^{(\alpha)} x_4^{(\beta)} + \cdots + x_n^{(\alpha)} x_n^{(\beta)}$$

wegen $\nu \leqq n-2$ sind.

3. Die Formeln (10) und (11) können nun als bewiesen angesehen werden. Die Formel (12) ergibt sich aber folgendermaßen. Durchläuft $t = (t_{\varkappa\lambda})$ alle Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{D}'$ und betrachtet man wieder die m Substitutionen

$$(26) \qquad y^{(\mu)} = \sum_{\lambda} t_{\varkappa\lambda} x_\lambda^{(\mu)}, \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n,\ \mu = 1, 2, \cdots, m)$$

so besagt die Formel (12) nur, daß die $\binom{m+1}{2}$ Ausdrücke $J_{\alpha\beta}$ in diesem Fall auch noch für $m = n$ eine Basis des zu (26) gehörenden Invariantensystems bilden. Für $m < n$ ergibt sich das unmittelbar aus dem für die Gruppe $\mathfrak{D}$ Bewiesenen. Ist aber $m = n$, so erhält eine zu (26) gehörende Invariante J, als Invariante des Systems (20) aufgefaßt, die Form $J = F + GD$, wo D die Determinante (23), F und G ganze rationale Funktionen der $J_{\alpha\beta}$ bedeuten. Dies folgt, wie eine dem Früheren analoge Überlegung lehrt, aus der Formel (11).

Läßt man aber auch uneigentliche orthogonale Substitutionen zu, so ist D nur noch eine relative Invariante. Daher reduziert sich J auf den Ausdruck F.

Es sei noch bemerkt, daß man die hier zu benutzenden Sätze über die Invarianten des Systems (20) auch für $\nu < m \leqq n$ direkt beweisen kann (vgl. auch E. STUDY, *Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung* (§ 22), Braunschweig 1923). Ich habe aber das oben geschilderte Beweisverfahren vorgezogen, um die Brauchbarkeit der analytischen Methode darzutun und zugleich einen Abzählungskalkül zu entwickeln, der sich auch für $m > n$ weiterverfolgen läßt. Die Determinantenformel (15) gestattet nämlich die Integrale (17) mit Hilfe einer Rekursionsformel Schritt für Schritt zu berechnen. Auf diese Weise ergibt sich insbesondere

$$\frac{1}{h}\int \frac{ds}{f_1 f_2 \cdots f_{n+1}} = (1 + c_n - c_1 c_{n+1} - c_{n+1}^2) \prod_{\varkappa \leqq \lambda}^{1, n+1} \frac{1}{1 - z_\varkappa z_\lambda},$$

wobei $c_1, c_2, \cdots, c_n, c_{n+1}$ die elementarsymmetrischen Funktionen der Variabeln $z_1, z_2, \cdots, z_{n+1}$ bedeuten. Diese Formel kann wieder zur Berechnung der ganzen Zahlen $A_{k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}}$ dienen.

§ 4. Die einfachen Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{D}'$.

Man setze wie früher für jedes Element t von $\mathfrak{D}'$

$$f(z, t) = |e - zt|, \quad \frac{1 - z^2}{f(z, t)} = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1)$$

und verstehe unter $q_{-1}, q_{-2}, \cdots$ die Zahl 0. Es gilt dann der Satz:

IV. *Zu jedem System von* $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$ *nicht negativen ganzen Zahlen*

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha^\nu \qquad (27)$$

gehört ein irreduzibler Homomorphismus $H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(t)$ *der Gruppe* $\mathfrak{D}'$ *mit der Charakteristik*

$$\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(t) = \begin{vmatrix} q_{a_1}, & q_{a_1+1} + q_{a_1-1}, & q_{a_1+2} + q_{a_1-2}, & \cdots, & q_{a_1+\nu-1} + q_{a_1-\nu+1} \\ q_{a_2}, & q_{a_2+1} + q_{a_2-1}, & q_{a_2+2} + q_{a_2-2}, & \cdots, & q_{a_2+\nu-1} + q_{a_2-\nu+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{a_\nu}, & q_{a_\nu+1} + q_{a_\nu-1}, & q_{a_\nu+2} + q_{a_\nu-2}, & \cdots, & q_{a_\nu+\nu-1} + q_{a_\nu-\nu+1} \end{vmatrix} \qquad (28)$$

wobei

$$a_1 = \alpha_1, \quad a_2 = \alpha_2 - 1, \quad a_3 = \alpha_3 - 2, \cdots, \quad a_\nu = \alpha_\nu - \nu + 1$$

zu setzen ist. Dieser Homomorphismus ist nur dann ein zweiseitiger, wenn n gerade und $\alpha_\nu > 0$ *ist. Der Grad (d. h. die Variabelnanzahl)*

$$M^{(n)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} = \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(e) \qquad (29)$$

des Homomorphismus $H_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(t)$ *bestimmt sich aus den Formeln*

$$(30)\quad M^{(2\nu+1)}_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu} = \frac{(2a+2\nu-1)\cdots(2a_\nu+2\nu-1)}{1!\ 3!\cdots(2\nu-1)!}\prod_{\varkappa<\lambda}^{\nu}{}_1(a_\varkappa-a_\lambda)(a_\varkappa+a_\lambda+2\nu-1)$$

$$(31)\quad M^{(2\nu)}_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu} = \frac{2^{\nu'}}{2!\ 4!\cdots(2\nu-2)!}\prod_{\varkappa<\lambda}^{\nu}{}_1(a_\varkappa-a_\lambda)(a_\varkappa+a_\lambda+2\nu-2),$$

wobei ν' *für* $\alpha_\nu = 0$ *gleich* $\nu-1$, *für* $\alpha_\nu > 0$ *gleich* ν *zu setzen ist.*

Bildet man die Homomorphismen $H_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(t)$ *für alle möglichen Indizessysteme* (27) *und fügt zu den nicht zweiseitigen unter ihnen die assoziierten hinzu, so erhält man ein vollständiges System von irreduziblen Homomorphismen der Gruppe* $\mathfrak{D}'$.

Der Beweis stützt sich auf die Ergebnisse des vorigen Paragraphen. Wir gehen von der für $|z_\lambda| < 1$ geltenden Gleichung

$$(32)\qquad \prod_{\lambda=1}^{\nu}\frac{1-z_\lambda^2}{f(z_\lambda, t)} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu} q_{\lambda_1}q_{\lambda_2}\cdots q_{\lambda_\nu}z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}\cdots z_\nu^{\lambda_\nu}$$

aus und multiplizieren auf beiden Seiten mit dem Produkt der beiden Ausdrücke

$$\Delta(z) = \prod_{\varkappa<\lambda}^{n}{}_1(z_\varkappa - z_\lambda), \qquad L(z) = \prod_{\varkappa<\lambda}^{n}{}_1(1-z_\varkappa z_\lambda).$$

Auf der rechten Seite schreiben wir aber, was zulässig ist (vgl. Formel (14)),

$$\Delta(z)\,L(z) = \left| z_\varkappa^{\nu-1}, z_\varkappa^{\nu-2}Z_\varkappa, z_\varkappa^{\nu-3}Z_\varkappa^2, \cdots, Z_\varkappa^{\nu-1}\right|. \qquad (Z_\varkappa = 1+z_\varkappa^2)$$

Diese Determinante ν-ten Grades läßt sich, wie eine einfache Umformung lehrt, auf die Form

$$\left| z_\varkappa^{\nu-1},\ z_\varkappa^{\nu-2}+z_\varkappa^{\nu},\ z_\varkappa^{\nu-3}+z_\varkappa^{\nu+1}, \cdots,\ 1+z_\varkappa^{2\nu-2}\right|$$

bringen. Um sie mit der in (32) stehenden ν-fach unendlichen Reihe zu multiplizieren, hat man nur alle Elemente der $\varkappa$-ten Zeile mit $\sum q_\alpha z_\varkappa^\alpha$ zu multiplizieren. Setzt man

$$A_\alpha = q_{\alpha-\nu+1}, \quad B_\alpha = q_{\alpha-\nu+2}+q_{\alpha-\nu}, \quad C_\alpha = q_{\alpha-\nu+3}+q_{\alpha-\nu-1}, \cdots,$$

so erhält man die Determinante

$$\left|\sum A_\alpha z_\varkappa^\alpha,\ \sum B_\alpha z_\varkappa^\alpha,\ \sum C_\alpha z_\varkappa^\alpha, \cdots\right|,$$

wofür auch

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_\nu} A_{\gamma_1}B_{\gamma_2}C_{\gamma_3}\cdots\cdot\left|z_\varkappa^{\gamma_1},\ z_\varkappa^{\gamma_2}, \cdots,\ z_\varkappa^{\gamma_\nu}\right|$$

$$= \sum_{\gamma_1>\gamma_2>\cdots>\gamma_\nu}\left|A_{\gamma_\varkappa},\ B_{\gamma_\varkappa},\ C_{\gamma_\varkappa}, \cdots\right|\cdot\left|z_\varkappa^{\gamma_1},\ z_\varkappa^{\gamma_2}, \cdots,\ z_\varkappa^{\gamma_\nu}\right|$$

$$= \sum_{\alpha_1\geqq\alpha_2\geqq\cdots\geqq\alpha_\nu}\left|A_{\alpha_\varkappa+\nu-\varkappa}, B_{\alpha_\varkappa+\nu-\varkappa}, C_{\alpha_\varkappa+\nu-\varkappa}, \cdots\right|\cdot\left|z_\varkappa^{\alpha_1+\nu-1}, z_\varkappa^{\alpha_2+\nu-2}, \cdots, z_\varkappa^{\alpha_\nu}\right|$$

geschrieben werden kann. Der erste hier auftretende Faktor ist aber nichts anderes als die Determinante (28).

Führt man noch die Abkürzung

$$\Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(z) = \left| z_\varkappa^{\alpha_1+\nu-1},\ z_\varkappa^{\alpha_2+\nu-2}, \cdots,\ z_\varkappa^{\alpha_\nu} \right|$$

ein, so ergibt sich auf diese Weise die Gleichung

$$(33)\qquad \frac{\Delta(z)\prod_{\varkappa \leqq \lambda}^{\nu}(1 - z_\varkappa z_\lambda)}{f(z_1, t) f(z_2, t) \cdots f(z_\nu, t)} = \sum_{\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu}^{0\ \infty} \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu} \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu}(z)\,.$$

Hier ersetze man nun $z_1, z_2, \cdots, z_\nu$ durch ν neue Veränderliche $z_1', z_2', \cdots, z_\nu'$, multipliziere auf beiden Seiten mit den neu entstehenden Ausdrücken und integriere nach t. Auf der rechten Seite erhält man die unendliche Reihe

$$\sum_{\substack{\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu \\ \beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \cdots \geqq \beta_\nu}}^{0\ \infty} \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(z)\, \Delta_{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_\nu}(z') \cdot \oint \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu} \chi_{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_\nu}\, dt\,.$$

Dagegen entsteht auf der linken Seite, wie aus der Formel (12) des Satzes III unmittelbar folgt,

$$2h \cdot \frac{\Delta(z)\,\Delta(z')}{(1 - z_1 z_1')(1 - z_1 z_2') \cdots (1 - z_\nu z_\nu')}\,.$$

Der hier auftretende Quotient läßt sich aber nach einer bekannten, leicht zu beweisenden Formel der Determinantentheorie in der Gestalt

$$\sum_{\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu}^{0\ \infty} \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(z)\, \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(z')$$

schreiben. Da nun zwischen den Determinanten $\Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu}(z)$ keine lineare Beziehung bestehen kann, so gelangen wir zu den Formeln

$$(34)\qquad \frac{1}{2h}\oint \chi^2_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}\, dt = 1\,,$$

$$(35)\qquad \oint \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu} \chi_{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu}\, dt = 0\,.$$

Jeder der Ausdrücke $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu}$ läßt sich in der Form $\chi^{(1)} - \chi^{(2)}$ schreiben, wo $\chi^{(1)}$ und $\chi^{(2)}$ Summen von Produkten der Form $q_{k_1} q_{k_2} \cdots q_{k_\nu}$ sind. Da dieses Produkt die Charakteristik des zu $\mathfrak{D}'$ gehörenden Homomorphismus

$$Q_{k_1} \times Q_{k_2} \times \cdots \times Q_{k_\nu}$$

ist (vgl. § 1), so erscheinen $\chi^{(1)}$ und $\chi^{(2)}$ als die Charakteristiken zweier Homomorphismen $H^{(1)}(t)$ und $H^{(2)}(t)$ der Gruppe $\mathfrak{D}'$. Jedenfalls ist also $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha}$ ein Ausdruck der Form

$$g_1 \chi_1(t) + g_2 \chi_2(t) + \cdots + g_N \chi_N(t)\,,$$

wo g_ϱ eine positive oder negative ganze Zahl und $\chi_\varrho(t)$ eine einfache Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{D}'$ bedeutet. Aus der Formel (34) ergibt sich aber (vgl. A. I, §§ 6 und 9).

$$g_1^2 + g_2^2 + \cdots + g_N^2 = 1\,.$$

Daher ist $\pm \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu}$ eine *einfache* Charakteristik von $\mathfrak{D}'$.

Um zu zeigen, daß hierbei das Pluszeichen zu wählen ist, hat man nur zu beweisen, daß die Zahl (29) für jedes Indizessystem *positiv* ausfällt. Dies ist gewiß richtig, wenn die Formeln (30) und (31) gelten. Will man nun die Determinante (28) für die identische Substitution $s = e$ berechnen, so hat man sich für $\rho \geq 0$ der Formel

$$(36)\quad q_\rho(e) = \binom{\rho+n-1}{n-1} - \binom{\rho+n-3}{n-1} = \binom{\rho+n-2}{n-2} + \binom{\rho+n-3}{n-2}$$

zu bedienen. Diese Formel liefert aber auch für die in (28) auftretenden q_ρ mit negativem ρ den richtigen Wert 0, eine Ausnahme bildet nur im Falle

$$(37)\qquad n = 2\nu, \qquad \alpha_\nu = 0$$

das letzte Element der ν-ten Zeile. In diesem Falle hat nämlich die ν-te Zeile die Gestalt

$$0, 0, \cdots, 0, 1,$$

während (36)

$$0, 0, \cdots, 0, 2$$

liefert. Will man also in allen Feldern der Determinante die Formel (36) benutzen, so hat man im Falle (37) nachträglich durch 2 zu dividieren.

Ersetzt man nun in (28) jedes q_ρ durch den Ausdruck (36), so entsteht eine Determinante, die sich nach einer einfachen Umformung[1] auf die Gestalt

$$(38)\qquad \left| \binom{a_\varkappa+n-1-\lambda}{n-2\lambda} + \binom{a_\varkappa+n-2-\lambda}{n-2\lambda} \right| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, \nu)$$

bringen läßt. Faßt man hierin $a_1, a_2, \cdots, a_\nu$ als voneinander unabhängige Variable auf, so wird (38) ein Polynom $F(a_1, a_2, \cdots, a_\nu)$, das den Wert Null erhält, wenn zwei Veränderliche einander gleich werden oder sich zu $2-n$ ergänzen. Denn in beiden Fällen werden die entsprechenden Zeilen einander proportional. Bei ungeradem n verschwindet ferner F auch noch für $2a_\varkappa + n - 2 = 0$, weil dann die $\varkappa$-te Zeile aus lauter Nullen besteht. Daher ist F bei geradem n durch

$$\prod_{\varkappa<\lambda}^{\nu}{}_1 (a_\varkappa - a_\lambda)(a_\varkappa + a_\lambda + n - 2),$$

bei ungeradem n durch

$$\prod_{\varkappa=1}^{\nu} (2a_\varkappa + n - 2) \cdot \prod_{\varkappa<\lambda}^{\nu}{}_1 (a_\varkappa - a_\lambda)(a_\varkappa + a_\lambda + n - 2)$$

teilbar. In jedem der beiden Fälle erhält man ein Polynom, dessen Grad mit dem Grad

$$(n-2) + (n-4) + \cdots + (n-2\nu) = \nu n - \nu^2 - \nu$$

[1] Bezeichnet man mit T_λ die Transformation, die darin besteht, daß man, von der λ-ten Kolonne angefangen, jede Kolonne von der folgenden abzieht, so hat man hintereinander die Transformationen

$$T_1 . T_1 . T_2 , T_2 , \ldots , T_{\nu-1} , T_{\nu-1}$$

anzuwenden.

von F übereinstimmt. Berücksichtigt man noch, daß in (38) der Koeffizient von $a_1^{n-2} a_2^{n-4} \cdots a_\nu^{n-2\nu}$ gleich

$$\frac{2}{(n-2)!} \cdot \frac{2}{(n-4)!} \cdots \frac{2}{(n-2\nu)!}$$

ist, so erhält man den in (30) bzw. (31) rechtsstehenden Ausdruck. Nur im Falle (37) ergibt sich, wie es sein muß, der doppelte Wert.

§ 5. Fortsetzung und Schluß des Beweises.

Wir haben nun bewiesen, daß die Ausdrücke $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ einfache Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{D}'$ darstellen. Daß sie alle voneinander verschieden sind, lehrt die Formel (35). Um noch zu entscheiden, ob unter ihnen Paare einander assoziierter Charakteristiken vorkommen, und ferner zu untersuchen, welche unter ihnen als zweiseitige Charakteristiken zu bezeichnen sind, verfahre man folgendermaßen. In unserer Grundformel (33) lasse man für t nur Drehungen s zu und wende bei der auf S. 313 durchgeführten Betrachtung an Stelle des Integrationsprozesses $\oint f(t)\, dt$ den Prozeß $\int f(s)\, ds$ an. Auf Grund der Formeln (10) und (11) erkennt man dann, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{\substack{\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu \\ \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \cdots \geqq \varepsilon_\nu}}^{0,\infty} \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(z)\ \Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu}(z') \int \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}\, \chi_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu}\, ds$$

für $n = 2\nu + 1$ mit

$$h \cdot \frac{\Delta(z)\, \Delta(z')}{(1 - z_1 z_1')(1 - z_1 z_2) \cdots (1 - z_\nu z_\nu')} = h \cdot \sum_{\alpha_1 > \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu}^{0,\infty} \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(z)\ \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(z'),$$

dagegen für $n = 2\nu$ mit

$$h \cdot (1 + z_1 z_2 \cdots z_\nu\, z_1' z_2' \cdots z_\nu') \frac{\Delta(z)\, \Delta(z')}{(1 - z_1 z_1')(1 - z_1 z_2') \cdots (1 - z_\nu z_\nu')} =$$

$$h \cdot \sum_{\alpha_1 > \alpha_2 \geqq \cdots > \alpha_\nu} \left[\Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(z)\ \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(z') + \Delta_{\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_\nu + 1}(z)\ \Delta_{\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_\nu + 1}(z')\right]$$

übereinstimmt. Für zwei verschiedene Indizessysteme ist daher in beiden Fällen

$$\int \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}\, \chi_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}\, ds = 0, \tag{39}$$

ferner wird für $n = 2\nu + 1$ oder für $n = 2\nu$, $\alpha_\nu = 0$

$$\frac{1}{h} \int^{0} \chi^2_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}\, ds = 1, \tag{40}$$

dagegen für $n = 2\nu$, $\alpha_\nu > 0$

$$\frac{1}{h} \int^{0} \chi^2_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}\, ds = 2. \tag{41}$$

Die Formel (39) lehrt uns, daß für alle n unter den Charakteristiken $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(t)$ von $\mathfrak{D}'$ niemals zwei einander assoziiert sind. Aus (40) und (41)

geht aber hervor, daß $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(t)$ nur in dem Falle $n = 2\nu$, $\alpha_\nu > 0$ eine zweiseitige Charakteristik ist. In diesem Falle wird also

$$\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(s) = \eta_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(s) + \eta^*_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(s),$$

wobei rechts zwei einander adjungierte einfache Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{D}$ stehen (vgl. § 1).

Wir haben nun nur noch die am Schluß des Satzes IV ausgesprochene Behauptung zu beweisen. Hierzu brauchen wir (auf Grund der Ergebnisse des § 1) nur zu beweisen, daß es keinen *geraden* Homomorphismus $H(s)$ von $\mathfrak{D}$ gibt, dessen Charakteristik $\gamma(s)$ für jedes Indizessystem (27) der Gleichung

$$\int \gamma(s)\, \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(s)\, ds = 0$$

genügt.

Dies ist gewiß richtig, wenn folgendes gilt:

1. Sind $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu$ die zu s gehörenden Drehungswinkel und setzt man für jedes Indizessystem (27)

$$t_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu} = \sum e^{\beta_1 i\phi_1 + \beta_2 i\phi_2 + \cdots + \beta_\nu i\phi_\nu}, \tag{42}$$

die Summe erstreckt sich über alle voneinander verschiedenen Glieder, bei denen die Indizes $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu$, abgesehen von der Reihenfolge und abgesehen von den Vorzeichen, mit $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ übereinstimmen, so ist $\gamma(s)$ eine lineare homogene Verbindung von endlich vielen unter den $t_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}$[1].

2. Jede der Summen (42) ist eine lineare homogene Verbindung von endlich vielen unter den $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(s)$.

Die erste Behauptung ist wohl am einfachsten folgendermaßen zu beweisen[2]: Hat $S = S(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu)$ dieselbe Bedeutung wie auf S. 300, und setzt man

$$S_1 = S(\phi_1, 0, 0, \cdots, 0),\ S_2 = S(0, \phi_2, 0, \cdots, 0), \cdots,$$

so wird $S = S_1 S_2 \cdots S_\nu$, also auch

$$H(S) = H(S_1)\, H(S_2) \cdots H(S_\nu).$$

Nun läßt aber $H(S_\varkappa)$ als ein zur Gruppe der Drehungen

$$\begin{pmatrix} \cos\phi_\varkappa, & \sin\phi_\varkappa \\ -\sin\phi_\varkappa, & \cos\phi_\varkappa \end{pmatrix}$$

gehörender Homomorphismus auffassen. Aus dem Satze I folgt daher, daß die Koeffizienten von $H(S_\varkappa)$ ganze rationale Funktionen von $e^{i\phi_\varkappa}$, $e^{-i\phi_\varkappa}$ sind. Die Koeffizienten von $H(S)$ sind also ganze rationale Funktionen von

$$e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \cdots, e^{i\phi_\nu}, e^{-i\phi_1}, e^{-i\phi_2}, \cdots, e^{-i\phi_\nu}. \tag{43}$$

---

[1] Was wir für die $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(s)$ zu beweisen haben, ergibt sich auch ohne Benutzung dieser wichtigen Eigenschaft von $\gamma(s)$, indem man von dem bekannten Satz Gebrauch macht, daß jede stetige periodische Funktion von $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu$ im Bereich $0 \leqq \phi_\varkappa \leqq 2\pi$ mit beliebig vorgegebener Genauigkeit durch ein trigonometrisches Polynom approximiert werden kann.

[2] Auf diesen Beweis bin ich durch eine Bemerkung des Hrn. stud. math. R. Brauer geführt worden.

Dasselbe gilt demnach auch für die Spur $\gamma(S) = \gamma(s)$ von $H(S)$. Da aber $\gamma(s)$ außerdem noch eine symmetrische Funktion von $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu$ und in bezug auf jedes $\phi_\varkappa$ gerade ist, so läßt sich $\gamma(s)$ in der verlangten Form darstellen.

Unsere zweite Behauptung ergibt sich aber ohne Mühe aus dem auch für andere Anwendungen wichtigen Satz:

V. *In einer endlichen Summe*

$$F = \sum A_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu} t_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu} \tag{44}$$

heiße $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} t_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ *das Leitglied, wenn für jedes andere Glied entweder* $\sum \beta_\varkappa < \sum \alpha_\varkappa$ *ist oder bei übereinstimmenden Summen die erste nicht verschwindende unter den Differenzen*

$$\alpha_1 - \beta_1, \ \alpha_2 - \beta_2, \cdots, \ \alpha_\nu - \beta_\nu$$

positiv ausfüllt. Dann ist $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(s)$ *für jedes Indizessystem ein Ausdruck der Form* (44) *mit dem Leitglied* $t_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$.

Um dies zu beweisen, setze man in unserer Grundformel (33)

$$\frac{\Delta(z)}{f(z_1, t)\, f(z_2, t) \cdots f(z_\nu, t)} = \sum_{\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_\nu} \Phi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(z).$$

Die analoge Reihe mit den Koeffizienten $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu}$ entsteht hieraus durch Multiplikation mit $\prod_{\varkappa < \lambda}^{\nu}{}_1 (1 - z_\varkappa z_\lambda)$. Hieraus folgt ohne weiteres, daß für jedes Indizessystem

$$\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} = \Phi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} + \sum_{\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_\nu} B_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu} \Phi_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu} \tag{45}$$

wird, wobei die Summe nur aus endlich vielen Gliedern besteht und in jedem Glied $\sum \beta_\varkappa < \sum \alpha_\varkappa$ ist[1]. Mit Hilfe der in § 1 eingeführten Ausdrücke $p_0, p_1, p_2 \cdots$ kann

$$\Phi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} = \left| p_{\alpha_\varkappa - \varkappa + \lambda} \right| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, \nu)$$

gesetzt werden. Für eine Drehung $t = s$ mit den Drehungswinkeln $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu$ wird aber diese Determinante eine symmetrische Funktion der Exponentialgrößen (43), die bei der lexikographischen Gliederanordnung das Leitglied $e^{\alpha_1 i\phi_1 + \alpha_2 i\phi_2 + \cdots + \alpha_\nu i\phi_\nu}$ aufweist[2]. Dies zeigt aber, daß $\Phi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ und folglich auch $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(s)$ eine Summe der Form (43) mit dem Leitglied $t_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ ist.

Es ist noch zu beachten, daß in (44) die Koeffizienten $B_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}$ positive oder negative ganze Zahlen sind. Die Auflösung dieser Gleichungen nach den $\Phi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ liefert dagegen analog gebildete Gleichungen

$$\Phi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} + \sum C_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n} \chi_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n} \tag{46}$$

[1] Man erkennt auch leicht, daß diese Summen sich um eine gerade Zahl voneinander unterscheiden.

[2] Vgl. z. B. Encyklopädie der math. Wissenschaften Bd. I, S. 465.

mit *positiven* ganzzahligen Koeffizienten. Dies beruht darauf, daß $\Phi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$, wie ich in meiner Inaugural-Dissertation (Berlin 1901) gezeigt habe, die Charakteristik eines (irreduziblen) Homomorphismus der Gruppe aller linearen homogenen Substitutionen darstellt, folglich auch als eine Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{D}'$ zu bezeichnen ist.

§ 6. Folgerungen aus dem Satze IV.

Der nunmehr vollständig bewiesene Satz IV liefert in Verbindung mit den Ausführungen des § 1 insbesondere auch die in der Einleitung erwähnten Ergebnisse über die Variabelnanzahlen der zu den Gruppen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ gehörenden irreduziblen Homomorphismen. Zugleich ergibt sich, daß *man die Gesamtheit aller einfachen Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{D}$ erhält, indem man bei ungeradem n die Ausdrücke $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha}(s)$ und bei geradem n die Ausdrücke*

$$\chi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu-1}, 0}(s), \quad \eta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(s), \quad \eta^*_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(s)$$

betrachtet. Es kommt noch ein weiteres wichtiges Ergebnis hinzu:

VI. *Die Gruppe $\mathfrak{D}'$ läßt nur rationale Homomorphismen zu, d. h. jeder (stetige) Homomorphismus $H(t) = (T_{\varrho\sigma})$ von $\mathfrak{D}'$ hat die Eigenschaft, daß alle $T_{\varrho\sigma}$ als ganze rationale Funktionen der n^2 Koeffizienten $t_{\varkappa\lambda}$ der Substitution t darstellbar sind. Dasselbe gilt auch für die Gruppe $\mathfrak{D}$. Ein Homomorphismus von $\mathfrak{D}'$ läßt sich außerdem noch mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation so umformen, daß seine Koeffizienten ganze rationale Funktionen der $t_{\varkappa\lambda}$ mit rationalen Zahlenkoeffizienten werden*[1].

Für die Gruppe $\mathfrak{D}'$ folgt dies daraus, daß jeder unserer irreduziblen Homomorphismen $H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(t)$ in der Weise gewonnen werden kann, daß man von einem rationalen Homomorphismus $H^{(1)}(t)$ einen in ihm enthaltenen rationalen Homomorphismus $H^{(2)}(t)$ abtrennt (vgl. S. 313). Hierbei sind offenbar nur rationale Zahlenkoeffizienten zu benutzen. Zugleich ergibt sich auch eine (allerdings noch sehr komplizierte) Methode, die $H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(t)$ rechnerisch herzustellen.

Um die sämtlichen irreduziblen Homomorphismen der Gruppe $\mathfrak{D}$ zu gewinnen, hat man nur noch bei geradem n diejenigen $H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(s)$, bei denen $\alpha_\nu > 0$ ist, in zwei einander adjungierte Homomorphismen $K(s)$ und $K^*(s)$ zu zerlegen. Diese Zerlegung kann folgendermaßen erfolgen. Da in diesem Fall der Homomorphismus $H(t) = H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(t)$ von $\mathfrak{D}'$ ein zweiseitiger ist, so läßt sich, wenn $H'(t)$ den zu $H(t)$ assoziierten Homomorphismus bedeutet, eine konstante Matrix M so bestimmen, daß

$$H'(t) = M^{-1} \cdot H(t) \cdot M$$

wird. Hierbei ist offenbar M mit allen $H(s)$ und M^2 mit allen $H(t)$ vertauschbar. Da aber $H(t)$ irreduzibel ist, so muß M^2 von der Form cE sein, wo E die Ein-

[1] Aus diesem Satz ergibt sich durch Heranziehen der Cayleyschen Parameterdarstellung für orthogonale Substitutionen ohne Mühe, daß jeder Homorphismus unserer reellen Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ zugleich auch einen Homomorphismus der Gruppe aller reellen und komplexen orthogonalen Substitationen von der Determinante 1 liefert. Analoges läßt sich auch für die Gruppe $\mathfrak{D}'$ behaupten.

heitsmatrix bedeutet. Daher kann man eine Ähnlichkeitstransformation T bestimmen, so daß $T^{-1}MT$ eine Diagonalmatrix wird, in deren Hauptdiagonale nur die Zahlen $\sqrt{c}$ und $-\sqrt{c}$ (gleich oft) vorkommen. Hieraus folgt unmittelbar, daß $T^{-1}\cdot H(s)\cdot T$ in der gewünschten Weise zerfällt. Die Koeffizienten der sich hierbei ergebenden Homomorphismen $K(s)$ und $K^*(s)$ als ganze rationale Funktionen der Koeffizienten $s_{\varkappa\lambda}$ der Drehung s mit Zahlenkoeffizienten der Form $a+b\sqrt{c}$, wo a und b rationale Zahlen bedeuten.

Die Zahl c kann, wie man sich leicht überlegt, als ganze rationale Zahl gewählt werden. Sie ist außerdem abgesehen von einem quadratischen Faktor allein durch das Indizessystem $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ bestimmt. Es wäre von Interesse, zu entscheiden, in welchen Fällen c eine Quadratzahl wird. Hierüber weiß ich nichts Näheres auszusagen[1]. Es ist mir bis jetzt auch nicht gelungen, die mit $\eta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu}(s)$ und $\eta^*_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu}(s)$ bezeichneten Charakteristiken der Homomorphismen $K(s)$ und $K^*(s)$ zu berechnen.

Ein besonders interessanter Fall läßt sich noch weiter verfolgen. Die μ-te Determinantentransformation $C_\mu(t)$, d. h. die Matrix aller Unterdeterminanten μ-ten Grades von $t=(t_{\varkappa\lambda})$, liefert einen Homomorphismus der Gruppe $\mathfrak{D}'$, dessen Charakteristik $c_\mu(t)$ sich aus der Gleichung

$$f(z,t)=\left|e-zt\right|=1-c_1z+c_2z^2-\cdots+(-1)^n c_n z^n$$

bestimmt. Hierbei wird (für orthogonale Substitutionen t)

$$c_\mu(t)=\left|t\right|\cdot c_{n-\mu}(t).$$

Daher ist C_μ dem zu $C_{n-\mu}$ assoziierten Homomorphismus ähnlich. Es genügt also, den Fall $2\mu\leqq n$ zu betrachten. Ich behaupte nun:

VII. *Die Operationen*

$$C_1, C_2, \cdots, C_\nu \qquad \left(\nu=\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

sind, als Homomorphismen der Gruppe $\mathfrak{D}'$ aufgefaßt, irreduzibel. Dasselbe gilt im allgemeinen auch für die Gruppe $\mathfrak{D}$. Eine Ausnahme tritt nur im Falle $n=2\nu$ für die Operation C_ν ein. Als Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ zerfällt C_ν in zwei einander adjungierte Homomorphismen K_ν und K_ν^*.

Dies folgt in Verbindung mit dem Satz IV unmittelbar aus der Gleichung

$$c_\mu(t)=\chi_{1,\ldots,1,0,\ldots,0}(t),$$

wobei das Indizessystem aus μ Einsen und $\nu-\mu$ Nullen besteht. Bekanntlich ist nämlich c_μ nichts anderes als die Determinante $\Phi_{1,\ldots,1,0,\ldots,0}$. Außerdem liefern die Formeln (30) und (31) ohne Mühe

$$M^{(n)}_{1,\ldots,1,0,\ldots,0}=\binom{n}{\mu}$$

d. h. den Grad des Homomorphismus C_μ. Hieraus folgt, daß die Zerlegungsformel (46) in unserem Fall

$$C_\mu=\Phi_{1,\ldots,1,0,\ldots,0}=\chi_{1,\ldots,1,0,\ldots,0}$$

liefert.

[1] In einer später erscheinenden Arbeit werde ich zeigen, daß c das Vorzeichen $(-1)^\nu$ hat.

Die Anordnung der Zeilen und Spalten von C_ν hängt von der Reihenfolge ab, in der man die $\binom{2\nu}{\nu} = 2m$ Indizeskombinationen

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_\nu \qquad (\gamma_\lambda = 1, 2, \cdots, 2\nu) \tag{47}$$

wählt. Diese Reihenfolge lege man so fest, daß an den m ersten Stellen die mit 1 beginnenden Kombinationen in der lexikographischen Anordnung stehen, während die $(m+\mu)$-te Kombination für $\mu = 1, 2, \cdots, m$ zur μ-ten komplementär ist[1]. Besteht die γ-te Kombination aus den Indizes (47), so sei noch

$$\sigma_\gamma = (-1)^{\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\nu + \frac{\nu(\nu-1)}{2}}.$$

Setzt man nun

$$C_\nu = (D_{\gamma\delta}), \qquad (\gamma, \delta = 1, 2, \cdots, 2m)$$

so wird in unserem Fall

$$D_{m+\alpha, m+\beta} = \sigma_\alpha \sigma_\beta D_{\alpha\beta}, \quad D_{m+\alpha, \beta} = (-1)^\nu \sigma_\alpha \sigma_\beta D_{\alpha, m+\beta}. \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, m)$$

Dies folgt in bekannter Weise aus der Tatsache, daß in jeder Drehung $s = (s_{\varkappa\lambda})$ die Elemente $s_{\varkappa\lambda}$ mit den adjungierten Größen $S_{\varkappa\lambda}$ übereinstimmen. Versteht man nun unter S die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{pmatrix}$$

und unter j die Zahl 1 oder i, je nachdem ν gerade oder ungerade ist, so bilde man die Matrix

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E & E \\ jS, & -jS \end{pmatrix}.$$

Dann wird, wie eine einfache Rechnung lehrt,

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E, & j^3 S \\ E, & -j^3 S \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} C_\nu M = \begin{pmatrix} K_\nu & 0 \\ 0 & K_\nu^* \end{pmatrix},$$

wobei

$$K_\nu = (D_{\alpha\beta} + j\sigma_\beta D_{\alpha, m+\beta}), \quad K_\nu^* = (D_{\alpha\beta} - j\sigma_\beta D_{\alpha, m+\beta}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, m)$$

zu setzen ist.

Dies liefert die gesuchte Zerfällung von C_ν für $n = 2\nu$. Hierbei ist zu beachten, daß bei geradem ν die Transformation M eine reelle orthogonale Substitution darstellt. Da auch $C_\nu = C_\nu(s)$ für jedes Element s von $\mathfrak{D}$ diese Eigenschaften besitzt, so liefern K_ν und K_ν^* wieder Drehungen in m Veränderlichen.

---

[1] Zwei Indizeskombinationen heißen hierbei zueinander komplementär, wenn sie zusammengenommen alle 2ν Indizes $1, 2, \cdots, 2\nu$ enthalten. Für $n = 4$ erhalten wir z. B. die Reihenfolge 12, 13, 14, 34, 24, 23.

Besonders interessant ist der Fall $n = 4$. Die Homomorphismen K_2 und K_2^* von $\mathfrak{D}$ sind dann beide vom Grad 3, ihre Charakteristiken sind, wenn ϕ_1 und ϕ_2 die zu s gehörenden Drehungswinkel bedeuten,

$$\eta(s) = 1 + 2\cos(\phi_1 + \phi_2), \qquad \eta^*(s) = 1 + 2\cos(\phi_1 - \phi_2).$$

Wird insbesondere $\phi_1 = -\phi_2$ oder $\phi_1 = \phi_2$, so wird $\eta(s) = 3$, bzw. $\eta^*(s) = 3$, und folglich $K_2(s) = E$, bzw. $K_2^*(s) = E$. Läßt dagegen s alle Drehungen durchlaufen, bei denen die erste der vier Veränderlichen ungeändert bleibt, so durchläuft $K_2(s)$ (und ebenso $K_2^*(s)$) die Gesamtheit aller ternären Drehungen. Dies liefert einen in seinen Grundzügen bekannten Satz, der aber wohl nirgends in so präziser Fassung ausgesprochen ist:

VIII. *Die quaternäre Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ enthält zwei invariante Untergruppen $\mathfrak{A}^{(+1)}$ und $\mathfrak{A}^{(-1)}$. Die Gruppe $\mathfrak{A}^{(\varepsilon)}$ besteht aus allen Drehungen, die innerhalb der Gruppe $\mathfrak{D}$ einer Substitution der Form*

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -\varepsilon b \\ 0 & 0 & \varepsilon b & a \end{pmatrix} \qquad (a^2 + b^2 = 1)$$

ähnlich sind. Sie kann auch als die Gesamtheit der quaternären Drehungen charakterisiert werden, die jede der drei alternierenden Formen

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 + \varepsilon(x_3 y_4 - x_4 y_3),$$

$$x_1 y_3 - x_3 y_1 - \varepsilon(x_2 y_4 - x_4 y_2),$$

$$x_1 y_4 - x_4 y_1 + \varepsilon(x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

ungeändert lassen. Die zu den invarianten Untergruppen $\mathfrak{A}^{(+1)}$ und $\mathfrak{A}^{(-1)}$ gehörenden Faktorgruppen sind der ternären Drehungsgruppe einstufig isomorph.

Von Interesse ist auch der Satz:

IX. *Ist n von 2 und von 4 verschieden, so gibt es keine Gruppe linear homogener Substitutionen in $N < n$ Veränderlichen, die der Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ homomorph ist. Eine Ausnahme bildet nur die triviale Gruppe, die sich auf die identische Substitution E reduziert. Eine mit $\mathfrak{D}$ homomorphe Gruppe in n Veränderlichen, die sich nicht auf E reduziert, muß der Gruppe $\mathfrak{D}$ ähnlich sein.*

Man gelangt zu diesem Satz mit Hilfe einer einfachen Abschätzung der durch die Formeln (30) und (31) gelieferten Zahlen $M^{(n)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$.

Eine einfache Diskussion dieser Ausdrücke liefert noch ein weiteres interessantes Ergebnis:

X. *Ist n eine ungerade Primzahl, so ist für jeden irreduziblen Homomorphismus der Gruppe $\mathfrak{D}$ die Variabelnanzahl mod. n einer der Zahlen 0, 1 oder -1 kongruent.*

Ausgegeben am 21. Januar 1925.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XXX. Gesamtsitzung. 20. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

*1. Hr. Lüders sprach über die Śraddhā und die Wiedergeburt.

Es wird zu zeigen versucht, daß die Śraddhā das herzliche Verlangen zu opfern und zu geben ist und daß dieser Begriff in vorbuddhistischer Zeit zum Ausgangspunkt der Wiedergeburtslehre gemacht ist.

2. Hr. Dragendorff übersandte das von ihm zusammen mit E. Krüger bearbeitete Werk über »Das Grabmal von Igel« (Römische Grabmäler des Mosellandes und der angrenzenden Gebiete, hrsg. von der röm.-germ. Kommission des Deutschen Archäologischen Instituts, Band I, Trier 1924).

3. Hr. Erman überreichte das Buch des wissenschaftlichen Beamten Prof. Dr. Hermann Grapow über »Die bildlichen Ausdrücke des Ägyptischen« (Leipzig 1924).

4. Hr. Bolte legte die mit seinen Ergänzungen herausgegebene 3. Auflage des Werkes »Die Lais der Marie de France«, hrsg. von Karl Warnke (Bibliotheca Normannica III, Halle a. S. 1925) vor,

5. Hr. Keibel die mit Unterstützung der Akademie bearbeitete Abhandlung von Fanny Moser »Die larvalen Verhältnisse der Siphonophoren in neuer Beleuchtung« (Zoologica, 28. Bd. 1. Lief., Heft 73, Stuttgart 1923).

6. Vorgelegt wurden endlich »Kant's Gesammelte Schriften«, Bd. 16, Neudruck (Berlin und Leipzig 1924).

Ausgegeben am 21. Januar 1925.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XXXI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 27. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

Hr. Ludendorff sprach über »Spektralphotometrische Untersuchungen über die Sonnenkorona«. (Ersch. später.)

Bei der totalen Sonnenfinsternis vom 10. September 1923, die infolge einer großherzigen Einladung der mexikanischen Regierung von einer Expedition deutscher Astronomen in Pasaje (im Staate Durango) beobachtet werden konnte, wurden photographische Aufnahmen erhalten, die es gestatteten, die Intensitätskurve des kontinuierlichen Spektrums der Sonnenkorona mit der Intensitätskurve des Sonnenspektrums zu vergleichen. Es ergab sich dabei, daß die Maxima der beiden Intensitätskurven zusammenfallen, daß auch sonst eine weitgehende Übereinstimmung beider Intensitätskurven besteht, sowie daß sich die Intensitätskurve des kontinuierlichen Koronaspektrums nicht mit der Höhe in der Korona ändert. Die Bedeutung dieses neuen Befundes für die Anschauungen über die Beschaffenheit der Sonnenkorona wird erörtert.

Ausgegeben am 21. Januar 1925.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XXXII. Gesamtsitzung. 4. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

*1. Hr. Schuchhardt sprach über Germanische Burgen und slavische Runddörfer.

Der »Baalshebbel« bei Starzeddel Kr. Guben hat sich als eine spätlausitzer Burg des 6. oder 5. Jahrhunderts v. Chr. ergeben mit kreisförmig gestellten gleichartigen Häusern. Die Fortsetzung solcher Anlage bilden die Wagenburgen der Goten und die karolingischen Rundburgen der Ostsachsen. Ihnen haben die Wenden ihre Rundburgen und Runddörfer nachgeahmt, die nicht wirtschaftlichen, sondern Sicherheitsgründen ihre Gestalt verdanken.

2. Hr. Correns überreichte eine Arbeit von Hrn. Haberlandt: Zur Entwickelungsphysiologie des Spaltöffnungsapparates.

Es wird gezeigt, daß, wenn die Nebenzellen der Spaltöffnungen durch Teilungen der benachbarten Epidermiszellen gebildet werden, zwei Typen von Nebenzellen zu unterscheiden sind: ein vollkommener und ein unvollkommener Typus. Nur dem ersteren, bei dem die Teilungen in regelmäßiger Weise erfolgen, kommt eine funktionelle Bedeutung zu. Der letztere, durch unregelmäßige, oft ausbleibende Teilungen charakterisiert, ist funktionslos und nur das Produkt eines entwickelungsphysiologischen Zwanges. Wie nachzuweisen versucht wird, besteht derselbe darin, daß von den sich teilenden Mutterzellen der Spaltöffnungen Zellteilungshormone ausgeschieden werden, die die benachbarten Epidermiszellen zu Teilungen anregen. Eine experimentelle Bestätigung dieser Annahme darf darin erblickt werden, daß neben gereizten oder geschädigten Spaltöffnungen abgeriebener Infloreszenzachsen von *Pelargonium zonale* Zellteilungen auftreten, die zur Bildung von Nebenzellen des 2. Typus führen.

3. Hr. Roethe überreichte im Namen des Hrn. v. Harnack den 32. Band der »Griechischen christlichen Schriftsteller der ersten drei Jahrhunderte«: »Die Apokalypsen des Esra und des Baruch in deutscher Gestalt« hrsg. von Bruno Violet, mit Textvorschlägen für Esra und Baruch von Hugo Gressmann (Leipzig 1924).

Zur Entwickelungsphysiologie des Spaltöffnungsapparates.

Von G. Haberlandt.

I.

Nach den Untersuchungen Strasburgers u. a. geht die Bildung des Spaltöffnungsapparates, nämlich der beiden Schließzellen und der evtl. vorhandenen Nebenzellen, auf sehr verschiedene Weise vor sich. Eine Dermatogenzelle, die Strasburger als »Urmutterzelle« des Spaltöffnungsapparates bezeichnet. teilt sich in zwei ungleichartige Zellen, von denen die eine zur Anfangszelle oder Initiale der Spaltöffnung wird, wie de Bary sie nennt, während die andere sich zu einer gewöhnlichen Epidermiszelle entwickelt. Die Anfangszelle kann sich verschieden verhalten. Sie kann direkt zur Mutterzelle der beiden Schließzellen werden, sie kann aber auch vor Bildung der Mutterzelle sich ein oder mehrere Male teilen, und zwar nach zwei oder drei Richtungen der Fläche. So werden außer der Mutterzelle der Schließzellen noch eine oder mehrere »Nebenzellen« gebildet, die in letzterem Falle das Schließzellenpaar gürtelförmig umgeben. Die Entstehung der Nebenzellen kann aber auch noch auf eine andere Weise vor sich gehen: die Anfangszelle ist direkt die Mutterzelle der Spaltöffnung, und die Nebenzellen werden von den benachbarten Epidermiszellen als schmale Stücke durch Wände abgeschnitten, die dem Kontur des jungen Schließzellenpaares mehr oder minder parallel verlaufen. Die Anzahl dieser Nebenzellen wechselt. Bald sind es nur zwei, je eine an den Flanken des Schließzellenpaares (Gramineen, *Carex*, *Cyperus*, *Luzula*, *Stanhopea*, *Aloë soccotrina*, *Musa* u. a.); bald sind es vier, indem auch an den Polen des Schließzellenpaares zwei Nebenzellen gebildet werden (*Tradescantia*- und *Commelina*-Arten, *Ficus elastica*, Koniferen, *Cycas* u. a.); durch Teilung dieser Nebenzellen entsteht zuweilen ein doppelter Gürtel oder an beiden Flanken der Spaltöffnung je ein Zellenpaar.

Es ist nun für diesen zweiten Modus der Nebenzellenbildung die entwickelungsphysiologische Frage aufzuwerfen, wieso es kommt, daß gerade die an die jungen Schließzellen angrenzenden Epidermiszellen bestimmt gerichtete Teilungen erfahren, während die übrigen Epidermiszellen ungeteilt bleiben. Erfolgen diese Teilungen unter dem Einfluß der Schließzellen? Wenn ja, worin besteht dieser Einfluß? Bei der Beantwortung dieser Fragen, die im nachstehenden versucht werden soll, ist darauf zu achten, ob die Entstehung der Nebenzellen durch Teilung von Epidermiszellen, die an die Spalt-

öffnung grenzen, ein Vorgang ist, der neben jeder Spaltöffnung eines Laubblattes oder Stengels der betreffenden Pflanzenart in ganz regelmäßiger Weise verläuft, oder ob es auch Pflanzen gibt, bei denen jene Teilungen nicht neben jeder Spaltöffnung und überdies nicht in regelmäßiger Weise vor sich gehen. Wenn die Nebenzellen eine bestimmte physiologische Funktion zu erfüllen haben und so einen integrierenden Teil des ganzen Spaltöffnungsapparates bilden, so wird man ersteres erwarten müssen. Wenn aber die Nebenzellen funktionell bedeutungslos sind und nur einem entwickelungsphysiologischen Zwange ihre Entstehung verdanken, so ist anzunehmen, daß auch die zweite Eventualität verwirklicht ist. Solche Fälle würden dann gewissermaßen Vorstufen der Bildung funktionell bedeutungsvoller Nebenzellen repräsentieren.

II.

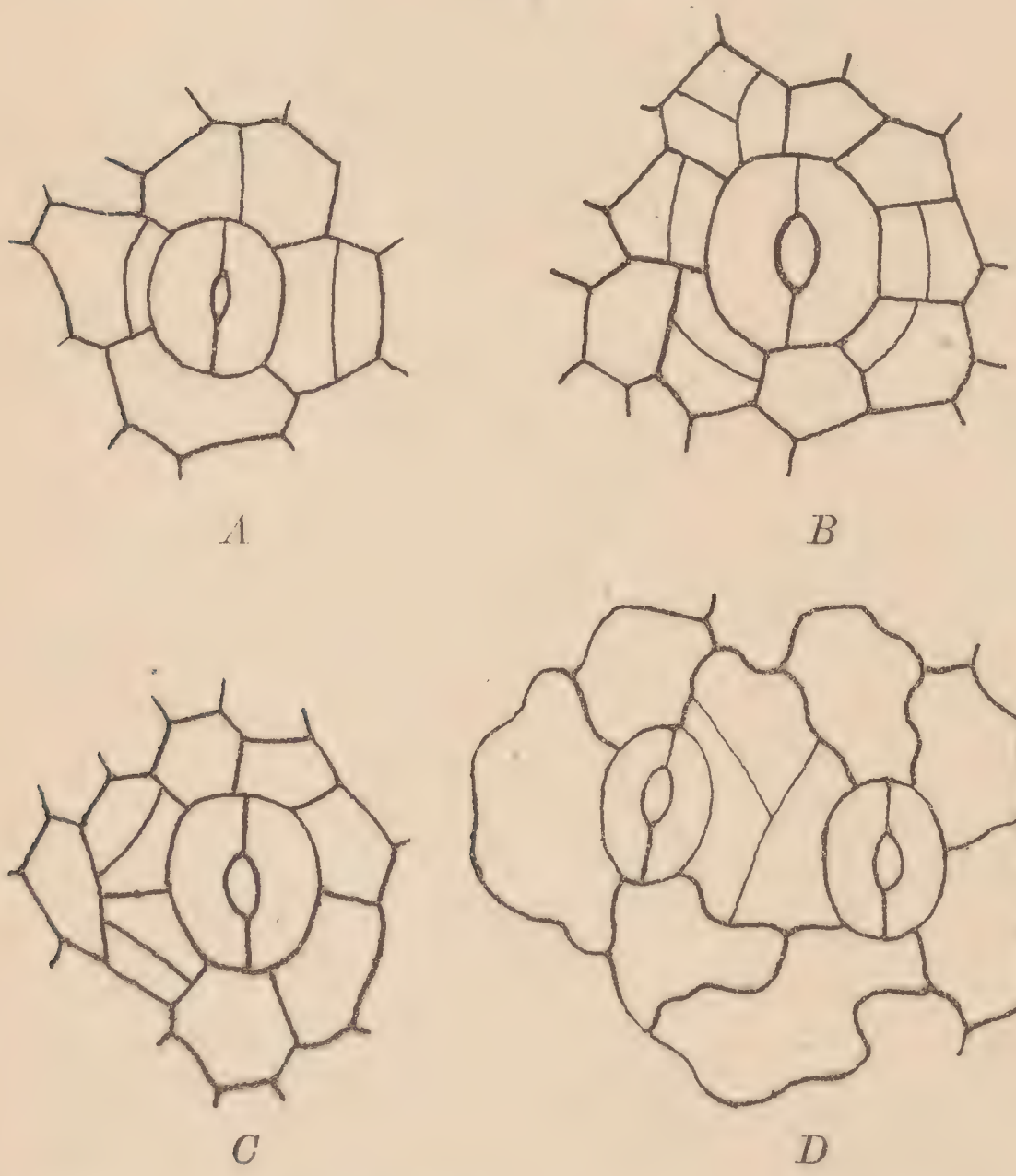
Untersucht man die untere Epidermis eines noch jungen, halbausgewachsenen Blattes von *Ribes aureum*, so findet man, daß die verschiedenaltrigen Spaltöffnungen von 4 bis 9 relativ kleinen Epidermiszellen umgeben werden, deren Seitenwände gerade oder erst andeutungsweise gewellt sind. Sehr häufig ist eine oder sind mehrere dieser Epidermiszellen durch je eine Wand geteilt, die annähernd parallel zur Rückenwand der benachbarten Schließzelle verläuft und dieser meist so sehr genähert ist, daß die an die Schließzelle grenzende Tochterzelle eine schmale Nebenzelle darstellt. Nicht selten wird aber die betreffende Epidermiszelle in zwei gleich große Tochterzellen geteilt (Fig. 1 *A*), auch kommt es zuweilen vor, daß der ersten Teilung noch eine zweite, gleichgerichtete folgt. Nur ausnahmsweise ist eine Wand nicht parallel zur Umrißlinie des Schließzellenpaares orientiert.

Daß diese Teilungen der die Spaltöffnung umgebenden Epidermiszellen nicht auf die Bildung von Nebenzellen abzielen, die am ausgewachsenen Blatt eine bestimmte Funktion zu erfüllen haben, geht schon daraus hervor, daß nicht um alle Spaltöffnungen solche Teilungen eintreten; ungefähr ein Fünftel bis ein Viertel von ihnen weist in der Nachbarschaft keine Teilungen auf. Auch spricht der Umstand, daß bald nur eine einzige Nachbarzelle, bald mehrere geteilt werden, gegen die Annahme, daß es sich um die Bildung eines funktionell bedeutungsvollen Apparates handelt. Nebenzellen, die bloß auf einer Flanke des Schließzellenpaares auftreten (Fig. 1 *C*, *D*) können keine funktionelle Bedeutung haben. Am klarsten ergibt sich aber die betriebsphysiologische Bedeutungslosigkeit dieser Teilungen aus dem Umstande, daß am älteren, ausgewachsenen Blatte die Spaltöffnungen, die ringsum von gewöhnlichen Epidermiszellen mit gewellten Seitenwänden umgeben sind, weitaus überwiegen; sie sind ungefähr doppelt so zahlreich wie die Spaltöffnungen mit geteilten Nachbarzellen. Die Mehrzahl jener schmalen Nebenzellen ist also zu typischen Epidermiszellen ausgewachsen.

Neben den spärlichen Spaltöffnungen der Zweige stellen sich gleichfalls Teilungen der benachbarten längsgestreckten Epidermiszellen ein, und zwar weit reichlicher als an den Blattspreiten (Fig. 2). Die Rückenwände der Schließzellen werden so von mehreren hintereinandergereihten, meist sehr

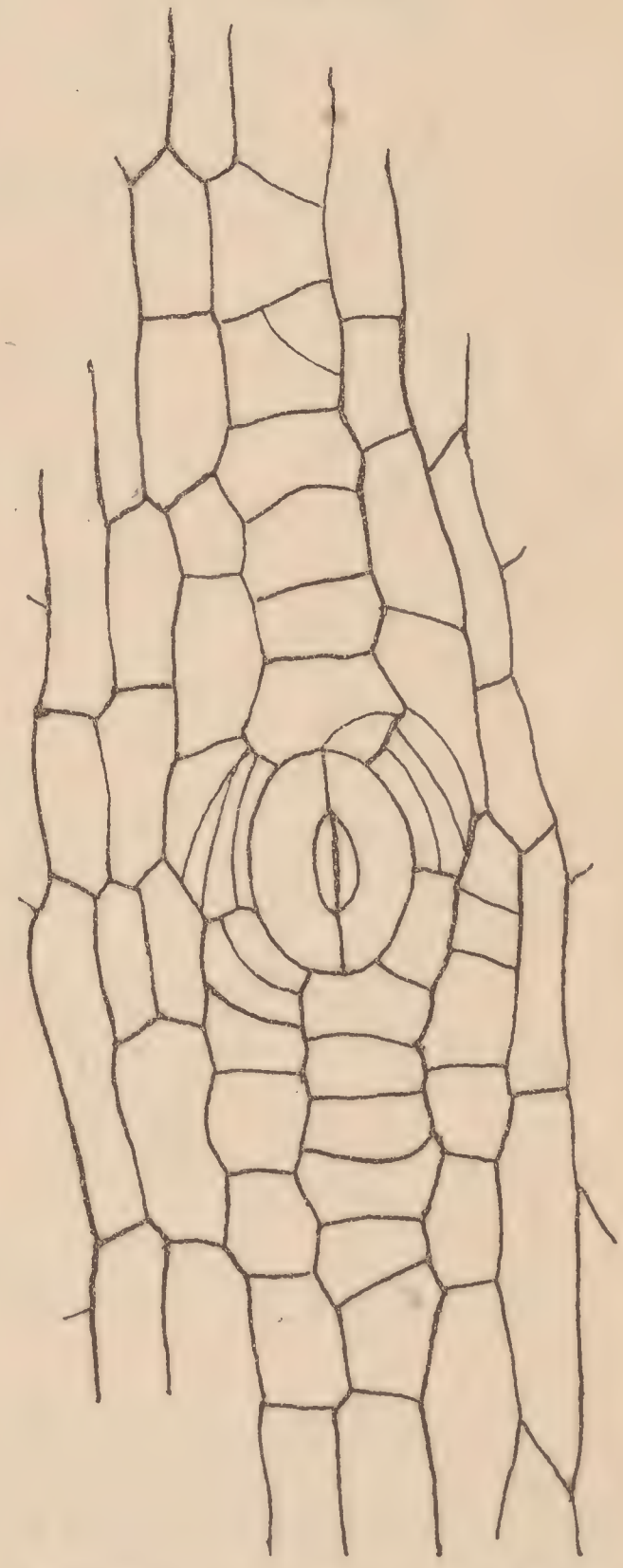
schmalen Zellen umsäumt, und auch an den beiden Polen des Spaltöffnungsapparates teilen sich die Epidermiszellen wiederholt in eine Anzahl kurzer Zellen (Fig. 2). Der zur Umrißlinie des Schließzellenpaares parallele Verlauf der Wände fällt besonders auf. Gestalt und Anordnung dieser zahlreichen Nebenzellen bleiben auch an den älteren, ausgewachsenen Internodien erhalten, so daß man hier an eine bestimmte Funktion dieser Zellen denken könnte. Wahrscheinlich ist dies aber schon deshalb nicht, weil die Teilungen oft in unregelmäßiger Weise erfolgen. So kommt es häufig vor, daß von zwei Epidermis-

Fig. 1.



Zellteilungen neben Spaltöffnungen auf der Laubblattunterseite von *Ribes aureum*. *A*, *B*, *C* von einem jungen, unausgewachsenen, *D* von einem nahezu ausgewachsenen Blatte.

Fig. 2.



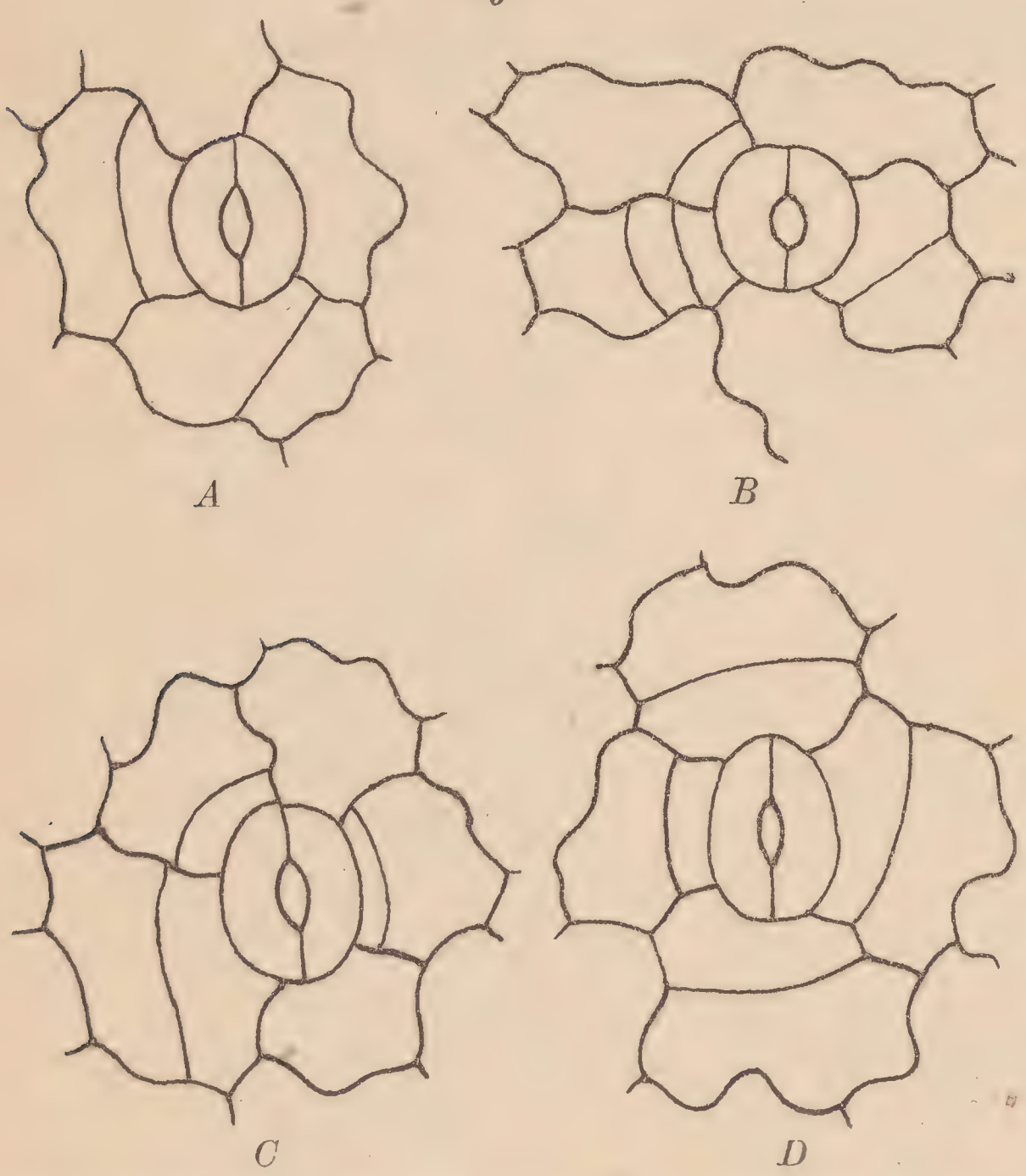
Zellteilungen neben einer Spaltöffnung eines jungen Zweiges von *Ribes aureum*.

zellen, die an die Rückenwand einer Schließzelle grenzen, nur eine sich ein- oder mehrmals teilt, so daß nur die halbe Flanke von Nebenzellen begrenzt wird (Fig. 2 rechts). Auch wäre es kaum zu verstehen, welchen Vorteil es gewähren sollte, daß einzelne Epidermiszellen sich in mehrere ganz schmale Nebenzellen teilen, während andere neben derselben Spaltöffnung nur eine Teilung erfahren oder auch ungeteilt bleiben.

Ähnlich wie *Ribes aureum* verhalten sich *R. rubrum* und *grossularia*. Bei *Ribes nigrum* haben sich am ausgewachsenen Blatt die schmalen Nebenzellen der Spaltöffnungen zwar gleichfalls stark verbreitert und den Charakter von gewöhnlichen Epidermiszellen angenommen, doch wird der Unterschied zwischen ihnen und den übrigen Epidermiszellen nicht so vollkommen verwischt, wie dies bei den anderen Arten Regel ist.

Die Spaltöffnungen der Unterseite eines noch jungen, unausgewachsenen Blattes von *Asarum europaeum* sind von 4 bis 6 Epidermiszellen umgeben. Am häufigsten sind es vier, von denen zwei an den Flanken, zwei an den Polen des Schließzellenpaares liegen. Sehr häufig haben sich die ersteren parallel zu den Rückenwänden der Schließzellen geteilt, so daß diese von zwei schmalen Nebenzellen flankiert werden. Oft kommt es vor, daß nur eine der seitlichen Epidermiszellen sich teilt; seltener teilen sich alle vier, so daß die Schließzellen rings von Nebenzellen umgeben werden (Fig. 3 *D*). Bisweilen teilt sich eine der benachbarten Epidermiszellen nochmals (Fig. 3 *B*). In der Regel verlaufen die neugebildeten bogigen Wände streng parallel zu den Rückenwänden bzw. zur Umrißlinie der Schließzellen. Nicht selten aber fehlt dieser Parallelismus; dann ist es gewöhnlich eine gerade oder nur wenig gekrümmte Wand, die die Epidermiszelle in zwei Tochterzellen teilt (Fig. 3 *A*, *B*, *C*); diese sind gleich groß oder wenigstens nicht so auffallend verschieden wie nach Anlegung einer zur Rückenwand der Schließzelle parallelen Scheidewand.

Fig. 3.



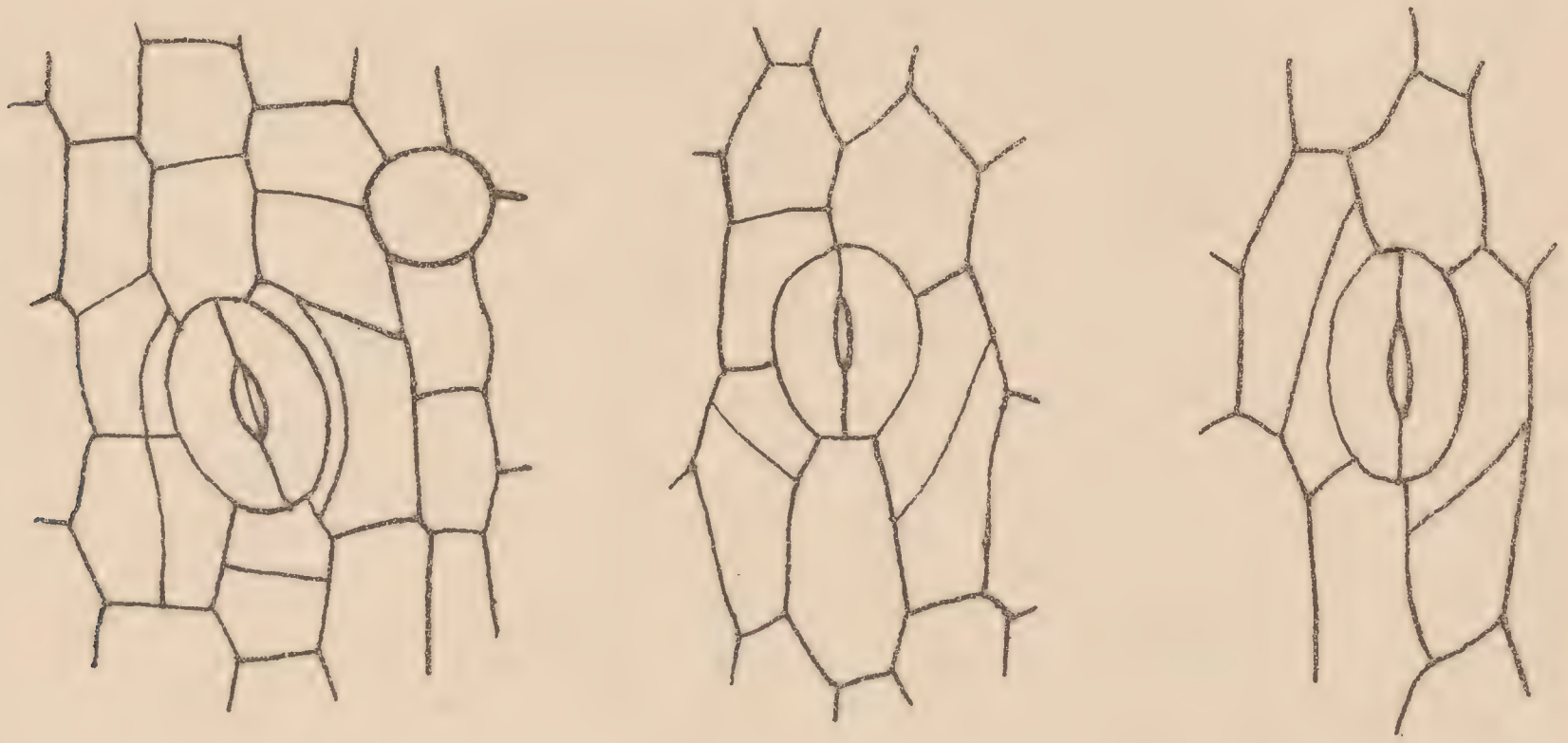
Zellteilungen neben Spaltöffnungen auf der Unterseite eines noch unausgewachsenen Laubblattes von *Asarum europaeum*.

Aus diesen Verschiedenheiten des Teilungsmodus geht bereits deutlich hervor, daß es sich auch bei *Asarum* nicht um die Bildung von Nebenzellen handelt, die einen integrierenden, funktionell bedeutsamen Teil des ganzen Spaltöffnungsapparates darstellen. Man erkennt dies auch daran, daß die schmalen Zellen, welche die Spaltöffnungen flankieren, ebenso dicke und gleichgebaute Außenwände besitzen wie die übrigen Epidermiszellen. Endlich spricht gegen eine besondere Funktion der in Rede stehenden Zellen auch der Umstand, daß sie an älteren ausgewachsenen Blättern mehr oder minder ausgesprochen die Gestalt gewöhnlicher Epidermiszellen angenommen haben. Sie sind stark in die Breite gewachsen, und die Wand, durch die sie von der größeren Schwesterzelle abgetrennt wurden, hat sich noch mehr bogig gekrümmt; auch ist sie meist ebenso dick geworden wie die übrigen Seitenwände der Epidermiszellen.

Bei *Aristolochia Clematitis* treten Teilungen in den Nachbarzellen der jungen Spaltöffnungen nur ziemlich spärlich auf. Am ausgewachsenen Blatte sind sie nicht mehr erkennbar.

Auf der Unterseite der noch ganz jungen gefalteten Laubblattspreiten von *Pelargonium zonale* teilen sich nur selten einzelne Nachbarzellen der Spaltöffnungen durch eine zum Kontur der betreffenden Schließzelle meist parallele Wand. Die so entstandenen Nebenzellen werden dann zu gewöhnlichen Epidermiszellen, wenn auch die Art ihrer Entstehung auch am ausgewachsenen Blatt zuweilen noch deutlich erkennbar ist. An den Blattstielen, Stengeln und Infloreszenzachsen treten in der Nachbarschaft der Spaltöffnungen häufiger Zellteilungen auf, wobei die Wände entweder unbestimmt orientiert sind oder zum Kontur des Schließzellenpaares mehr oder minder parallel verlaufen (Fig. 4). Auch am ausgewachsenen Organe sind diese nachträglich einge-

Fig. 4.



A *B* *C*

Zellteilungen neben Spaltöffnungen von *Pelargonium zonale.*
A von einem jungen Blattstiel; *B*, *C* von einem noch unausgewachsenen Stengelinternodium.

schalteten Wände noch deutlich als solche erkennbar, wenn auch ihre Dicke und sonstige Beschaffenheit dieselbe oder nahezu dieselbe ist wie die der übrigen Seitenwände. Unregelmäßigkeiten betreffs der Teilungsrichtung, wie sie in Fig. 4 dargestellt sind, lassen deutlich erkennen, daß den derart entstandenen Nebenzellen eine funktionelle Bedeutung nicht zukommen kann.

Ziemlich häufig wird bei *Syringa vulgaris* an der Flanke einer Schließzelle eine schmale Nebenzelle gebildet. Zuweilen teilen sich auch andere Nachbarzellen der Spaltöffnung durch gerade oder bogige, unregelmäßig orientierte Wände. Auch am ausgewachsenen Blatt sind diese Verhältnisse meist noch deutlich zu erkennen. Ähnlich verhält sich *Syringa persica*, doch sind die Teilungen seltener als bei *Syringa vulgaris*.

Bei *Philadelphus coronarius* werden häufig 1—3 unregelmäßig gestaltete, oft schmale Nebenzellen gebildet, die auch am ausgewachsenen Blatt noch erhalten sind.

Prunus avium zeigt am jungen unausgewachsenen Blatt häufig Nebenzellen. Am ausgewachsenen älteren Blatt sind sie zu gewöhnlichen Epidermiszellen mit stark gewellten Seitenwänden geworden. Bei *Pirus malus* sind Teilungen in den Nachbarzellen junger Spaltöffnungen ziemlich häufig,

doch kommt es nicht zur Ausbildung regelmäßiger Nebenzellen. Am ausgewachsenen Blatt ist der Unterschied zwischen diesen und den gewöhnlichen Epidermiszellen meist ganz verwischt. Ebenso verhält sich *Mespilus germanica*.

Da es nicht meine Absicht war, den Grad der Verbreitung der in Rede stehenden Teilungsvorgänge festzustellen, begnügte ich mich mit den vorstehend beschriebenen Beispielen. Doch ist nicht zu bezweifeln, daß es sich hier um eine in sehr verschiedenen Pflanzenfamilien vorkommende, wahrscheinlich ziemlich verbreitete Erscheinung handelt.

III.

Das Ergebnis der vorstehend mitgeteilten Beobachtungen ist, kombiniert mit den Untersuchungsresultaten früherer Forscher, folgendes:

Die Nebenzellen, welche durch Teilungen der den Spaltöffnungen benachbarten jungen Epidermiszellen entstehen, treten in zwei Typen auf:

1. Beim ersten vollkommneren Typus werden neben jeder Spaltöffnung mindestens zwei an den Flanken der Schließzellen auftretende Nebenzellen gebildet, die sich durch ihre Gestalt von den gewöhnlichen Epidermiszellen scharf unterscheiden, auch noch am ausgewachsenen Blatte vorhanden sind und so einen integrierenden Bestandteil des ganzen Spaltöffnungsapparates bilden, dem sicher auch eine bestimmte physiologische Funktion zukommt. Diese Funktion ist keine einheitliche. Bei manchen Gräsern sind sie nach Schwendener beim Verschluß der Spaltöffnungen aktiv beteiligt; im übrigen fungieren sie bei Gramineen und Cyperaceen infolge der Dünnwandigkeit ihrer Außen- und Innenwände als Hautgelenke. Benecke hält die Nebenzellen auf Grund ausgedehnter Untersuchungen an Sukkulenten für Schutzorgane der Spaltöffnungen, die die Aufgabe haben, den Einfluß der beim Schrumpfen der Blätter unvermeidlichen Druck- und Zugwirkungen auf die Schließzellen abzuschwächen. Wahrscheinlich erfüllen die Nebenzellen, die diesem Typus angehören, in manchen Fällen auch noch andere Aufgaben, die wir noch nicht kennen.

2. Der zweite, unvollkommnere Typus der Nebenzellen charakterisiert sich dadurch, daß dieselben nur bei einem Teil der Spaltöffnungen des Blattes auftreten, daß ihre Zahl sehr wechselt — oft ist nur eine vorhanden — und daß auch ihre Gestalt sehr verschieden ist. Die Zellteilungen, durch die diese Nebenzellen von den benachbarten Epidermiszellen abgetrennt werden, verlaufen meist parallel zum Kontur des Schließzellenpaares, häufig aber auch in anderen Richtungen. Am ausgewachsenen Blatte sind die Nebenzellen meist nicht mehr deutlich erkennbar, sondern zu gewöhnlichen Epidermiszellen geworden. Alle diese Merkmale lassen es als ausgeschlossen erscheinen, daß diesem Typus der Nebenzellen eine bestimmte Funktion zukommt. Sie sind nur das Ergebnis eines zwangsläufigen entwicklungsphysiologischen Vorganges.

Schon oben ist die Frage aufgeworfen worden, weshalb gerade die an die jungen Spaltöffnungen angrenzenden Epidermiszellen sich teilen und so die Nebenzellen liefern. Für die Beantwortung dieser Frage ist es bedeut-

sam, daß, soweit ich beobachtet habe, die Teilung der Spaltöffnungsmutterzelle den Teilungen der angrenzenden Epidermiszellen stets vorausgeht. Vorher schon wandern die Kerne der letzteren gewöhnlich gegen die Spaltöffnungsmutterzelle zu und legen sich oft direkt an sie an, wie dies z. B. bei *Asarum europaeum* schön zu beobachten ist. Man wird kaum fehlgehen, wenn man diese Kernwanderung als eine chemotaktische ansieht und annimmt, daß von der Mutterzelle der Schließzellen ein Reizstoff ausgeschieden wird, der die Nachbarkerne anlockt. So wäre demnach diese Kernverlagerung den bekannten traumatotaktischen Bewegungen der Kerne unter Wundflächen an die Seite zu stellen, die ja sicher auch auf Chemotaxis zurückzuführen sind. Eine weitere Analogie mit den unter Wundflächen sich abspielenden Prozessen besteht darin, daß, so wie unter Wunden oder auch neben einzelnen abgestorbenen Zellen die neu auftretenden Wände meist annähernd parallel zur Wundfläche bzw. zum Kontur der toten Zelle verlaufen, auch die die Nebenzellen abtrennenden Wände in der Regel eine zur Umrißlinie des Schließzellenpaares parallele Orientierung zeigen. Auch auf die Ähnlichkeit dieses Wandverlaufes mit der Orientierung der Zellwände, die nach den Beobachtungen H. Reiches um mit Gewebesaft injizierte Interzellulargänge herum auftreten, wäre hinzuweisen. Wenn nun in diesem letzteren Falle, sowie unter Wundflächen und neben abgestorbenen Zellen oder Zellgruppen, diese Orientierung der Wände darauf beruht, daß sich dieselben senkrecht zur Diffusionsrichtung der Wund- bzw. Nekrohormone einstellen, so wird es eine nicht ungerechtfertigte Annahme sein, daß die gleiche Wandrichtung bei Bildung der Nebenzellen ebenfalls darauf beruht, daß von der sich teilenden Mutterzelle der Schließzellen oder von diesen, solange sie jung sind, ein Zellteilungsstoff ausgeschieden wird, der in die benachbarten Epidermiszellen eindringt und diese zur Teilung anregt. Diese Annahme wird auch dann noch berechtigt sein, wenn die Wände nicht in nächster Nähe der Spaltöffnungen und auch nicht parallel zu ihrem Kontur angelegt werden, wie das beim zweiten Typus so häufig der Fall ist. Dann vermag eben der von der Mutterzelle der Schließzellen oder von diesen selbst ausgeschiedene Reizstoff zwar die Zellteilung auszulösen, nicht aber den Zellkern anzulocken und eine bestimmte Orientierung der Kernspindel zu bewirken. In dieser Hinsicht ist der Protoplast der betreffenden Epidermiszelle nicht empfindlich genug. Viele den Spaltöffnungen benachbarte Epidermiszellen reagieren übrigens bei diesem Typus nicht einmal mehr mit Zellteilungen. Beim ersten Typus der Nebenzellen ist dagegen die Empfindlichkeit der betreffenden Epidermiszellen für das Teilungshormon in jeder Hinsicht so groß, daß ausnahmslos neben jeder Spaltöffnung regelmäßige Zellteilungen eintreten und Nebenzellen bilden, die eine bestimmte Funktion übernehmen können. Wenn dabei, wie das so oft der Fall ist, nur zwei an den Flanken des Spaltöffnungsapparates gelegene Nebenzellen entstehen, an den Polen dagegen keine, so hängt dies wohl damit zusammen, daß die an die beiden Flanken grenzenden Epidermiszellen mit einer größeren Fläche den Schließzellen anliegen, so daß sie eine größere Menge des Teilungshormons empfangen. Eine verschiedene Empfindlichkeit der an den Flanken und an den Polen gelegenen Epidermiszellen für den Teilungsstoff

ist schwer vorstellbar, wenn auch, wie die Fälle des zweiten Typus lehren, individuelle Verschiedenheiten zwischen den Nachbarzellen der Spaltöffnungen, doch ohne Beziehung zu ihrer Lage, sicher vorhanden sind.

Ich habe an anderer Stelle (Haberlandt II, S. 170) die Ansicht ausgesprochen, daß embryonale Gewebe, vor allem die primären Meristeme, imstande sind, die Teilungshormone selbst zu erzeugen, und die Versuche Kottes mit abgetrennten Wurzelvegetationsspitzen, die auf geeigneten Nährsubstraten kultiviert weiterwachsen und noch lange Zeit hindurch Zellteilungen aufweisen, haben für diese Annahme einen experimentellen Beleg geliefert. Wenn in einem jungen Blatte, dessen Gewebe sich zu differenzieren beginnen, das Dermatogen in gewöhnliche Epidermiszellen und in Spaltöffnungsmutterzellen sich sondert, so verharren letztere länger im embryonalen Zustande, produzieren länger das Teilungshormon als ihre Nachbarzellen, die zwar noch eine Zeitlang oder auch dauernd ihre Teilungsfähigkeit bewahren, aber nicht mehr imstande sind, das Teilungshormon selbst zu bilden. Ersteres gilt auch noch für die jungen, eben entstandenen Schließzellen. Sie enthalten noch das Teilungshormon und scheiden es auch noch aus, reagieren aber selbst nicht mehr darauf, was mit ihrer weiteren Ausbildung im Sinne der Übernahme einer bestimmten Funktion zusammenhängt.

Wir haben hier also — wenn meine Auffassung richtig ist — den Fall vor uns, daß von zahlreichen winzigen embryonalen Herden Zellteilungsstoffe ausgeschieden werden, die benachbarte Zellen zu Teilungen veranlassen.

Eine solche Beeinflussung von Dauergeweben durch benachbarte Meristeme scheint auch sonst zuweilen vorzukommen. Die Bildung des Interfaszikularkambiums zwischen zwei Gefäßbündeln erfolgt wohl niemals simultan, sondern beginnt an den Rändern der Faszikularkambiumstreifen und schreitet beiderseits in tangentialer Richtung so lange fort, bis der ganze primäre Markstrahl überbrückt ist. Es liegt nahe anzunehmen, daß vom Faszikularkambium aus Teilungshormone in die primären Markstrahlen hineindiffundieren. Verfolgt man diesen Gedanken weiter, so stößt man allerdings auf Schwierigkeiten, auf die ich hier nicht näher eingehen will.

Auch bei der Bildung des Phellogens scheinen in gewissen Fällen derartige Vorgänge eine Rolle zu spielen. Wenn das Phellogen in der Epidermis oder in der subepidermalen Rindenparenchymschicht angelegt wird, so erfolgen die ersten Teilungen in dem betreffenden Querschnittsniveau des Zweiges nie gleichzeitig, sondern sie setzen an gewissen Punkten ein und verbreiten sich von da aus nach allen Seiten. Bei *Plectranthus fruticosus* z. B. habe ich immer wieder beobachtet, daß die ersten Teilungen unter einem abgestorbenen Haar oder einer toten Epidermiszelle erfolgen, offenbar unter dem Einfluß der aus diesen herausdiffundierenden Nekrohormone. Damit stimmt auch die perikline Richtung dieser ersten Wände überein. Von ihnen aus setzen sich dann die Teilungen nach allen Seiten in gleicher Richtung fort, was kaum anders als durch die Annahme erklärt werden kann, daß von den sich teilenden Zellen ein Teilungsstoff ausgeschieden wird, der in die Nachbarzellen eintritt und dann von Zelle zu Zelle neu entsteht. So wäre demnach die

normale Phellogenbildung in diesen Fällen die Fortsetzung eines unter abgestorbenen Zellen begonnenen Teilungsprozesses. Zu Beginn der Phellogenbildung sind Nekrohormone wirksam, später nur Meristemhormone. Wenn die Phellogenbildung in tieferen Rindenparenchymschichten auftritt, wie bei so vielen Holzgewächsen oder wie bei den meisten Wurzeln im Perizykel, so versagt natürlich dieser Erklärungsversuch. Doch müssen ja die Ursachen für das Auftreten von Zellteilungen, die zur Phellogenbildung führen, nicht immer dieselben sein.

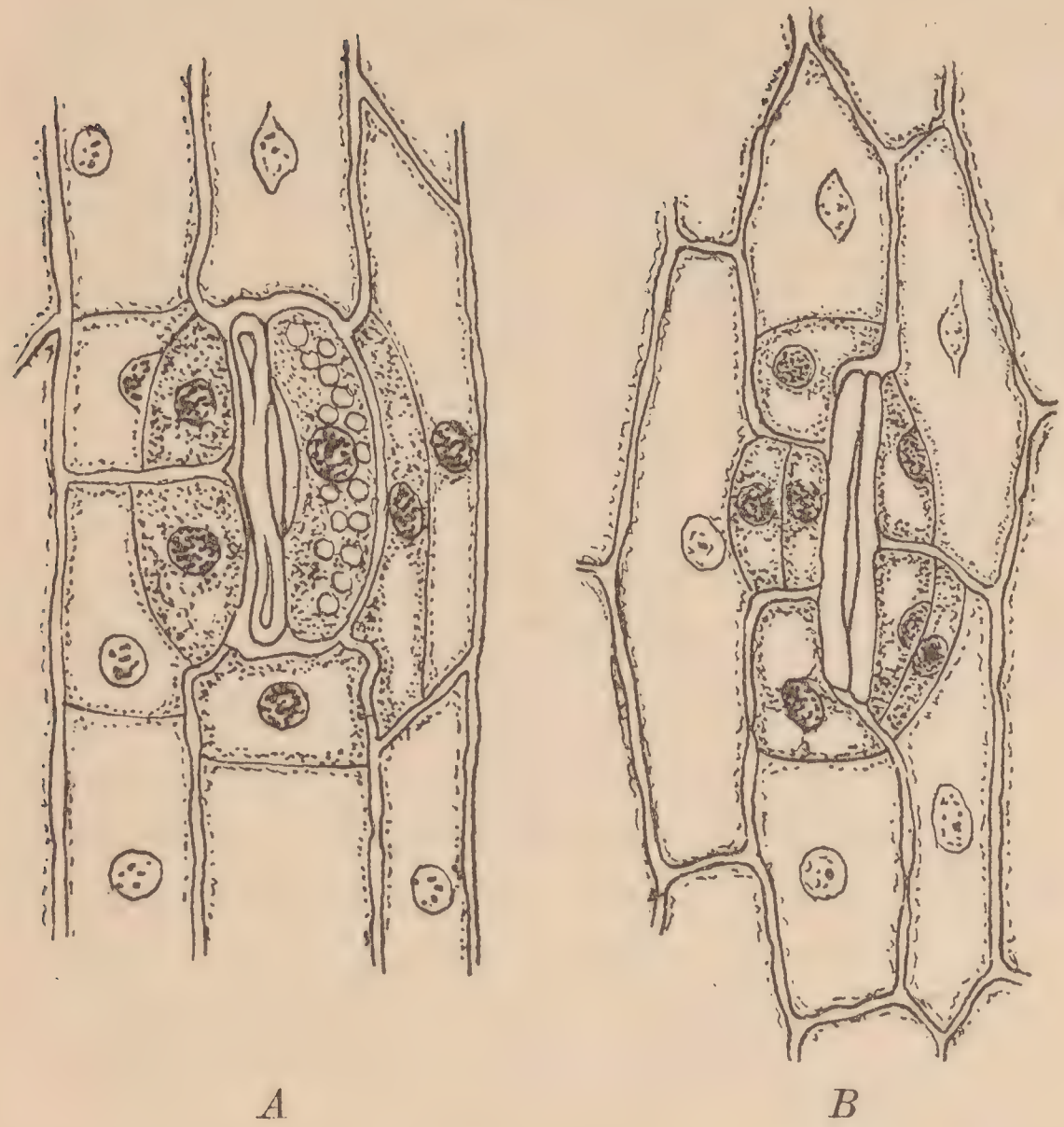
IV.

Als eine Bestätigung der im vorstehenden entwickelten Auffassung betreffs der entwickelungsphysiologischen Ursache der Bildung der Nebenzellen, sofern diese durch Teilung der an die Spaltöffnungen grenzenden Epidermiszellen entstehen, darf es angesehen werden, wenn es gelingt, neben Spaltöffnungen, die normalerweise keine Nebenzellen besitzen, solche auf experimentellem Wege zu erzeugen. Man wird dabei natürlich nur Nebenzellen des zweiten Typus erwarten dürfen. Durch künstliche Reizung oder Schädigung von Schließzellen könnten diese veranlaßt werden, Teilungsstoffe zu bilden, auszuscheiden und so die benachbarten Epidermiszellen zu analogen Teilungen anzuregen, wie bei der natürlichen Entstehung der Nebenzellen.

Einen solchen Versuch, der ein positives Ergebnis hatte, habe ich bereits in meiner Arbeit über »Wundhormone als Erreger von Zellteilungen« (S. 35, Fig. 10*B, C, D*) mitgeteilt. Als Versuchsobjekte dienten Infloreszenzachsen von *Pelargonium zonale,* die freilich zu diesem Zwecke deshalb nicht ganz günstig sind, weil, wie schon oben erwähnt wurde, ihre Spaltöffnungen häufig auch Nebenzellen des zweiten Typus besitzen, die nicht zu gewöhnlichen Epidermiszellen auswachsen. Doch machen die Spaltöffnungen mit Nebenzellen nur ungefähr ein Drittel der Gesamtzahl aus. Immerhin liegt also die Gefahr einer Verwechselung der auf natürlichem Wege entstandenen mit den experimentell erzeugten Nebenzellen vor. Doch werden wir sehen, daß die Unterschiede zwischen diesen beiden Arten von Nebenzellen groß genug sind, um eine Verwechselung mit Sicherheit auszuschließen. Die erneute Musterung der Präparate, die ich seinerzeit schon untersucht habe, hat dies bestimmt ergeben.

Wenn man ganz oder nahezu ausgewachsene Infloreszenzachsen von *Pelargonium zonale* mit noch nicht geöffneten Blütenknospen mit den Fingern abreibt, so sterben in vielen Fällen eine oder beide Schließzellen ab, worauf die benachbarten Epidermiszellen sich in die Schließzellen hineinwölben und sich meist parallel zum Außenkontur des Spaltöffnungsapparates teilen (Fig. 5 *B*). In diesem Falle sind es zweifellos die aus den getöteten Schließzellen herausdiffundierenden Wundhormone, die die Zellteilungen auslösen. Für uns sind hier aber jene Fälle von größerem Interesse, in denen die Schließzellen am Leben bleiben und sich in der Regel nicht teilen, während die angrenzenden langgestreckten Epidermiszellen Teilungen eingehen, welche in jeder Hinsicht jenen gleichen, die zur Bildung von Nebenzellen des zweiten Typus führen. Gewöhnlich wird nur eine einzige schmale Zelle an der Flanke einer Schließ-

Fig. 5.



A *B*

Spaltöffnungen einer abgeriebenen Infloreszenzachse von *Pelargonium zonale*. *A* die linke Schließzelle ist abgestorben und von den angrenzenden Epidermiszelleu, die sich geteilt haben, zusammengedrückt worden. Die rechte Schließzelle ist am Leben geblieben. Die angrenzende Epidermiszelle hat sich geteilt. *B* beide Schließzellen sind abgestorben, die benachbarten Epidermiszellen haben sich geteilt. (Färbung mit Parakarmin.)

zelle von der benachbarten Epidermiszelle abgetrennt (Fig. 5 *A* rechts). Zuweilen aber werden mehr Nebenzellen an beiden Flanken oder auch an den Polen des Schließzellenpaares gebildet, wobei immer die ausgesprochene Neigung sich geltend macht, die neuen Wände annähernd parallel zur Umrißlinie des Schließzellenpaares anzulegen (Haberlandt I, S. 36 Fig. *B*, *D*). Es kann nicht zweifelhaft sein, daß der Einfluß, der von den mechanisch gereizten Schließzellen auf ihre Nachbarzellen ausgeübt wird, auf der Ausscheidung von Teilungshormonen beruht. Entweder werden die Schließzellen durch das Abreiben veranlaßt, das meristematische Teilungshormon erneut zu bilden, oder es handelt sich um eine mechanische Schädigung, die zur Bildung von Wundhormonen führt. Im ersteren Falle wäre die Analogie mit den natürlichen Vorgängen eine vollkommene. Doch ist im Hinblick auf den Umstand, daß auch um abgestorbene Schließzellen herum Teilungen auftreten, die zweite Alternative die wahrscheinlichere. Lehrreich ist in dieser Hinsicht die in Fig. 5 *A* abgebildete Spaltöffnung. Die linke Schließzelle ist abgestorben und zusammengedrückt worden, die rechte ist am Leben geblieben. Neben beiden sind Teilungen aufgetreten. Auf der linken Seite sind sicher Wundhormone wirksam gewesen. Es wäre gezwungen anzunehmen, daß auf der rechten Seite ein meristematisches Teilungshormon zur Geltung kam. Auch hier wird ein Wundhormon die Teilung ausgelöst haben.

Wie lassen sich nun diese künstlich hervorgerufenen Nebenzellen von den natürlich entstandenen unterscheiden? Da diese letzteren schon frühzeitig angelegt werden, so haben sie, abgesehen von ihrer Gestalt, zur Zeit der Untersuchung schon ganz den Charakter gewöhnlicher Epidermiszellen angenommen. Sie besitzen wie diese nur einen dünnen plasmatischen Wandbelag, ihre Kerne sind nur mäßig färbbar, und die bogigen Wände, welche sie von den jugendlichen Epidermiszellen abgetrennt haben, sind ebenso dick geworden wie die Seitenwände der gewöhnlichen Epidermiszellen. Die experimentell erzeugten Nebenzellen dagegen sind sehr plasmareich, ihre Kerne sind in hohem Maße tinktionsfähig, und die ebengenannten Wände lassen durch ihre Zartheit erkennen, daß sie erst vor kurzem entstanden sind. So

weisen diese Nebenzellen einen ausgesprochen meristematischen oder embryonalen Charakter auf, während die normal entstandenen Nebenzellen um diese Zeit bereits zu typischen Dauerzellen geworden sind. Auch die Schließzellen, neben denen nach dem Abreiben Nebenzellen entstehen, zeichnen sich durch größeren Plasmagehalt und stärker tingierbare Kerne aus, doch teilen sie sich nur selten. Offenbar sind sie für das Teilungshormon, das in ihnen entsteht, weniger empfindlich als die Epidermiszellen.

Kein so günstiges Ergebnis hatte das Abbürsten der Unterseite von nahezu ausgewachsenen Laubblattspreiten von *Pelargonium zonale* mit einer mäßig steifen Roßhaarbürste. Dabei wurden häufig einzelne Schließzellen getötet; die an die abgestorbene kollabierte Schließzelle grenzende Epidermiszelle hat sich dann in der Regel so geteilt, daß eine schmale Nebenzelle gebildet wurde. Neben Spaltöffnungen, deren Schließzellen unversehrt geblieben waren, traten solche Teilungen niemals auf. Nach 14—20 Tagen waren zahlreiche Epidermiszellen neben den Spaltöffnungen, aber auch entfernter von diesen ein- oder auch mehrmals geteilt; die Wände waren vollkommen gerade und reichten stets von einem »Berg« der stark gewellten Seitenwand zum gegenüberliegenden, so daß in auffallender Weise die Regel der »*minimae areae*« erfüllt wurde. Daß hier nicht etwa nur in Zellulosewände umgewandelte Plasmaplatten vorlagen, sondern echte Zell- und Kernteilungen, ging daraus hervor, daß jedes Fach der gefurchten Epidermiszelle einen Kern besaß. Manchmal waren die neuaufgetretenen Wände um die Spaltöffnungen herum so orientiert, daß Nebenzellen entstanden, von denen aber in diesem Falle nicht anzunehmen war, daß sie unter dem Einfluß der Schließzellen gebildet wurden. — Das Abreiben der Blattunterseiten mit den Fingern blieb erfolglos.

Vollkommen negativ fielen Versuche mit *Asarum europaeum* aus. Am 9. Mai unterseits abgebürstete junge, fast ausgewachsene Blätter zeigten am 17. Mai noch keine Veränderungen. Am 26. Mai waren die an die kleinen, runden Wunden angrenzenden Epidermiszellen radial etwas gestreckt und häufig tangential geteilt. In der Regel waren es nicht die unmittelbar an die Wunde grenzenden lebenden Epidermiszellen, sondern die nächstfolgenden, die sich geteilt hatten. Ziemlich häufig war eine Schließzelle der Spaltöffnung abgestorben, manchmal auch alle beide, doch traten niemals in den benachbarten Epidermiszellen Teilungen auf. Man muß daher wohl annehmen, daß die Epidermiszellen in diesem Alter zwar noch mit Teilungen reagieren, wenn von Wunden her eine verhältnismäßig größere Menge von Wundhormonen in die Umgebung diffundiert, daß aber die Menge der aus einzelnen Schließzellen oder Schließzellpaaren austretenden Zellteilungsstoffe zu gering ist, um die Nachbarzellen zur Teilung anregen zu können. Die Reizschwelle wird nicht überschritten.

Ein ähnliches Verhalten zeigten auch unterseits abgebürstete und abgeriebene junge Laubblätter von *Sambucus nigra*.

Es ist wohl kaum zu bezweifeln, daß die Ausdehnung solcher Versuche auf eine größere Anzahl von Pflanzenarten aus verschiedenen Familien die Möglichkeit der experimentellen Hervorrufung von Nebenzellen durch nach-

trägliche Teilung von Epidermiszellen bestätigen würde. Pflanzen mit Spaltöffnungen, die überhaupt keine Nebenzellen, weder solche des ersten noch solche des zweiten Typus besitzen, sind für solche Versuche wahrscheinlich deshalb weniger geeignet, weil ihre jungen Epidermiszellen für Zellteilungsstoffe, die aus den Schließzellen austreten, zu wenig empfindlich sind. So erklärt sich wohl das negative Resultat der Versuche mit *Sambucus nigra*. Die günstigsten Versuchsobjekte werden Pflanzen sein, welche Nebenzellen des zweiten Typus produzieren, die wenigstens der Mehrzahl nach zu gewöhnlichen Epidermiszellen auswachsen. Daß aber auch sie versagen können, lehrt *Asarum europaeum*. Wenn *Pelargonium zonale* dagegen ein positives Ergebnis lieferte, so hängt dies wohl mit der sehr großen Empfindlichkeit seiner Epidermiszellen für Teilungshormone zusammen, die sich ja auch noch auf verschiedene andere Weise äußert.

Literatur.

de Bary, A., Vergleichende Anatomie der Vegetationsorgane, Leipzig, 1877.

Benecke, W., Die Nebenzellen der Spaltöffnungen, Bot. Ztg. 1892.

Haberlandt, G., I. Wundhormone als Erreger von Zellteilungen, Beiträge zur allgem. Botanik Bd. II, Heft 1, 1921.

Derselbe, II. Über Zellteilungshormone usw., Biolog. Zentralblatt Bd. 42, 1922.

Kotte, W., Kulturversuche mit isolierten Wurzelspitzen, Beiträge zur allgem. Botanik Bd. II, 1922.

Reiche, H., Über Auslösung von Zellteilungen durch Injizieren von Gewebesäften und Zelltrümmern, Zeitschr. f. Botanik Bd. XVI, 1924.

Strasburger, E., Ein Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der Spaltöffnungen, Jahrb. f. wissensch. Botanik Bd. V, 1867.

Ausgegeben am 21. Januar 1925.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1924

XXXIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 11. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Johnsen sprach über »die regelmäßige Verwachsung von Kalkspat und Natronsalpeter«. (Ersch. später.)

Das Gesetz der Verwachsung wird festgestellt und erörtert; es ergibt sich eine unendlich große Anzahl gegenseitiger Lagen, die aber innerhalb bestimmter, kleiner Winkelbereiche liegen und diese anscheinend kontinuierlich erfüllen; unter diesen Lagen befinden sich als Spezialfälle auch solche, die von früheren Autoren veröffentlicht worden sind.

2. Hr. Schur legte eine Arbeit des Hrn. H. Weyl in Zürich vor: »Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen«.

Durch eine Modifikation der von Hrn. Schur im Falle der reellen Drehungsgruppe entwickelten Methode gelingt es dem Verfasser, für alle einfachen und halbeinfachen kontinuierlichen Gruppen das schon von Hrn. E. Cartan behandelte Darstellungsproblem in abgeschlossenerer Form zu lösen.

3. Hr. Schur legte eine Mitteilung vor: »Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie (dritter Teil)«.

Für die reelle Drehungsgruppe wird auf analytischem Wege eine Umgestaltung des Hurwitzschen Integralkalküls gewonnen, die, wie Hr. Weyl durch eine geometrische Betrachtung gezeigt hat, auch bei allen anderen in Betracht kommenden Gruppen durchgeführt werden kann.

Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen.

(Aus einem Schreiben an Hrn. I. Schur.)

Von Prof. Dr. H. Weyl
in Zürich.

(Vorgelegt von Hrn. Schur.)

1. Es ist mir gelungen, durch eine Modifikation Ihrer Methode[1] das Darstellungsproblem für alle einfachen (und halb-einfachen) Gruppen zu lösen, einschließlich der Berechnung der Charakteristiken. Besonders wichtig sind natürlich: die Gruppe $\mathfrak{G}$ aller homogenen linearen Transformationen von der Determinante 1, die Gruppen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ derjenigen unter ihnen, welche eine nicht ausgeartete schiefsymmetrische bzw. symmetrische Bilinearform, $[xx']$ oder (xx'), invariant lassen. Geht man mit Lie auf die infinitesimalen Gruppen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ zurück, so bringt das freilich für die »integrale« Fragestellung gewisse Differenzierbarkeitsvoraussetzungen mit sich; es ist aber zu betonen, daß so ein rein algebraisches Problem hervorgeht, das seine große selbständige Bedeutung hat. Die integrale Methode ersetzt nach dem Kunstgriff von Hurwitz[2] die komplexen Gruppen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ zunächst durch die in ihnen enthaltenen Gruppen $\mathfrak{G}_u$, $\mathfrak{C}_u$, $\mathfrak{D}_u$ unitärer Transformationen. Für $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ werden dabei die Formen $[xx']$, (xx) in der Gestalt zugrunde gelegt:

$$[xx'] = (x_1 y_1' - y_1 x_1') + \cdots + (x_h y_h' - y_h x_h') \quad [\text{Dimensionszahl } n = 2h],$$

$$(xx) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \quad [\text{Dimensionszahl} = n].$$

Dann kommt man, wie Sie im Falle der reellen Drehungsgruppe $\mathfrak{D}_u$ gezeigt haben, mit der Stetigkeit allein aus. Jede der irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}_u$, $\mathfrak{C}_u$, $\mathfrak{D}_u$ liefert ohne weiteres eine solche für $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$. Will man aber auch für die vollen komplexen Gruppen oder die reellen Gruppen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}$ und die zu nicht-definiten Formen (xx) gehörigen reellen $\mathfrak{D}$ nachweisen, daß die Aufzählung erschöpfend ist und jede Darstellung in diese irreduziblen Bestandteile zerfällt, so scheinen mir die Differenzierungsannahmen unentbehrlich, die in der Reduktion auf die infinitesimalen Gruppen liegen. Der infinitesimale Ansatz bewerkstelligt den Übergang ohne weiteres.

---

[1] Hr. Schur war so freundlich, mich schon vor ihrer Publikation in den Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. von den Hauptresultaten seiner Untersuchung über die Drehungsgruppe in Kenntnis zu setzen; vgl. jetzt a. a. O. 1924, p. 297—321 und 346—355.

[2] Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, Göttinger Nachrichten 1897, p. 71.

Die Methode, mit Hilfe deren Cartan die irreduziblen Darstellungen jener infinitesimalen Gruppen gewinnt[1], ist naturgemäß und einfach; alles, was nötig ist, ließe sich bequem auf ein paar Seiten auseinandersetzen[2]. Sie beruht darauf, daß direkt gezeigt wird (ich bediene mich Ihrer Ausdrucksweise): Eine irreduzible Darstellung ist bereits durch das höchste Glied ihrer Charakteristik eindeutig bestimmt; der Koeffizient dieses höchsten Gliedes ist $= 1$. Zum Nachweis der vollen Reduzibilität aber und zur Gewinnung expliziter Ausdrücke für die Charakteristiken und Variablenzahlen erweist sich die von Ihnen ausgebildete integrale Methode als überlegen. Dasselbe Verhältnis war bereits bei der symmetrischen Gruppe zutage getreten: der »infinitesimale« Ansatz ergibt nach A. Young und der Arbeit von Frobenius aus dem Jahre 1903 die einfachste Erzeugung[3]; die expliziten Ausdrücke für die Anzahlen und Charaktere liefert die »integrale« Methode, die Frobenius in der voraufgehenden Arbeit 1900 entwickelte[4] (nur die Bestimmung der Gesamtanzahlen der Variablen war Young hier auch auf dem ersten Wege, aber durch recht mühsame Rechnungen gelungen). Eine Darstellung der infinitesimalen Gruppe liefert eine solche Γ für die ganze kontinuierliche Gruppe, wobei evtl. das Kontinuum Γ die dargestellte Gruppenmannigfaltigkeit mehrfach überdeckt. Die Analysis-situs-Untersuchung lehrt[5], daß diese Eventualität nur bei der Drehungsgruppe eintreten kann, und daß man zur Erzielung der Eindeutigkeit in diesem Falle $\mathfrak{D}$ ersetzen muß durch ein Gebilde $\mathfrak{D}^*$, das unverzweigt und ohne Grenzen $\mathfrak{D}$ zweiblättrig überdeckt. Wirklich finden sich in der Cartanschen Tabelle solche erst auf $\mathfrak{D}^*$, nicht schon auf $\mathfrak{D}$ eindeutige irreduzible Darstellungen der Drehungsgruppe. In Ihrer Aufzählung fehlen sie noch, diese Lücke wird im folgenden auch ausgefüllt.

2. Auf jeder Gruppenmannigfaltigkeit $\mathfrak{A}$ gibt es eine absolute Volummessung. Bezeichnet man nämlich den Prozeß, der das willkürliche Element X der Gruppe ersetzt durch AX, als die Translation, welche das Einheitselement E in das gegebene A überführt, so schreibt man einem Volumelement in A das gleiche Volumen zu wie demjenigen Volumelement in E, aus dem es durch die Translation von E nach A hervorgeht. Versteht man also unter dem Vektor, der von einem Punkt A auf $\mathfrak{A}$ zu einem unendlich benachbarten $A + dA$ führt, die Parameter des Elements $A^{-1}dA$ der zugehörigen infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{a}$, so ist die Größe eines parallelepipedischen Volumelements einfach gegeben durch die Determinante aus den das Parallelepiped aufspannenden »Vektoren«. Ist $\mathfrak{A}$ die reelle Drehungsgruppe $\mathfrak{D}_u$ und sind $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_h$ die Drehwinkel eines beliebigen ihrer Elemente ($n = 2h$ oder $= 2h + 1$), so ist es für Ihre Methode von entscheidender Wichtigkeit, das Volumen desjenigen Teils von $\mathfrak{D}_u$ zu ermitteln, auf welchem

---

[1] Bulletin de la Soc. Math. de France 41 (1913), p. 53.

[2] Schwierig ist nur die Konstruktion aller einfachen Gruppen, mit der das Darstellungsproblem bei Cartan verquickt erscheint.

[3] Young, Proc. London Math. Soc. 33 (1901), p. 97; 34 (1902), p. 361. Frobenius, Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1903, p. 328.

[4] Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1900, p. 516.

[5] Vgl. eine etwa gleichzeitig erscheinende Note von mir in den Gött. Nachr.

die Drehungen liegen, deren Drehwinkel zwischen ϕ_k und $\phi_k + d\phi_k$ enthalten sind. Diese Aufgabe, wie auch die analoge für die Gruppen $\mathfrak{G}_u$ und $\mathfrak{C}_u$, kann ich direkt lösen. Ich schildere das Verfahren zunächst an der Gruppe aller unitären Transformationen $\mathfrak{U}$. $\varepsilon = e^{i\phi}$ bedeute stets eine Zahl vom absoluten Betrag 1, E eine Diagonalmatrix, in welcher mehrere solcher Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ stehen. Jede unitäre Matrix A kann, mittels einer gleichfalls unitären Transformation U, in der Form geschrieben werden:

$$A = U \mathrm{E} U^{-1}. \tag{1}$$

Die zu E gehörigen ϕ heißen die Drehwinkel der Matrix A. Hierbei kann U ersetzt werden durch eine beliebige Matrix von der Form $U\mathrm{E}'$. Ich will sagen, daß alle diese Matrizen (= Punkte von $\mathfrak{U}$) eine Gerade (U) auf $\mathfrak{U}$ bilden. Die Vektoren, welche von U zu den unendlich benachbarten Punkten der Geraden $(U + dU)$ gehen, haben die Form $U^{-1}\{(U + dU)(E + id\Phi) - U\} = U^{-1} dU + id\Phi = \delta U$. Die infinitesimale E-Matrix $E + id\Phi$ ($d\Phi$ die reelle Diagonalmatrix der unendlich kleinen Drehwinkel $d\phi_k$) kann ich auf eine und nur eine Art so wählen, daß in δU die Hauptdiagonale $= 0$ wird: diesen Vektor δU bezeichne ich als den senkrechten Übergang von der Geraden (U) zur Geraden $(U + dU)$ vom Punkte U aus. Die Vektoren, welche von den verschiedenen Punkten der Geraden (U) senkrecht zur Geraden $(U + dU)$ hinüberführen, sind nicht einander gleich, sondern haben allgemein die Gestalt

$$\mathrm{E}'^{-1} \cdot \delta U \cdot \mathrm{E}'. \tag{2}$$

Komme ich jetzt überein, alle Punkte von $\mathfrak{U}$, die auf einer Geraden liegen, durch »Projektion« in einen Punkt zusammenfallen zu lassen, so entsteht eine Mannigfaltigkeit $(\mathfrak{U})$ von n Dimensionen weniger. Definiere ich als Größe eines parallelepipedischen Volumelements mit der Ecke (U) in ihr die Determinante aus den aufspannenden Vektoren δU, so geht aus (2) hervor, daß diese unabhängig davon ist, an welcher Stelle U der Geraden (U) ich das Volumelement konstruiere. Aus (1) folgt: $U^{-1}(A^{-1} dA) U = (\mathrm{E}^{-1} \cdot \delta U \cdot \mathrm{E} - \delta U) + id\Phi$. Sind $\delta u_{\alpha\beta}$ die Komponenten der Matrix δU ($\delta u_{\alpha\alpha} = 0$), so hat also die links stehende Matrix die Komponenten

$$\delta u_{\alpha\beta}\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha} - 1\right) \quad (\alpha \neq \beta), \qquad id\phi_\alpha \quad (\alpha = \beta).$$

Mit ihnen hängen die Komponenten der Matrix $A^{-1} dA$ durch eine unimodulare Substitution zusammen. Darum läßt sich die Größe $|dA|$ eines Volumelements, das von A in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{U}$ beschrieben wird, wenn (U) in $(\mathfrak{U})$ ein Volumelement von der Größe $|dU|$ beschreibt und E im Spielraum $\phi_\alpha \cdots \phi_\alpha + d\phi_\alpha$ variiert, so ausdrücken:

$$|dA| = |dU| \cdot \prod_{i \neq k}\left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_i} - 1\right) \cdot d\phi_0 d\phi_1 \cdots d\phi_{n-1}.$$

Das Produkt ist

$$= \prod_{i<k}\left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_i} - 1\right)\left(\frac{\bar{\varepsilon}_k}{\bar{\varepsilon}_i} - 1\right) = \left|\prod_{i<k}(\varepsilon_k - \varepsilon_i)\right|^2.$$

Die Einschränkung auf die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}_u$ der unitären Transformationen von der Determinante 1 ist sofort zu vollziehen. Hat man den Mittelwert

einer Funktion F auf $\mathfrak{G}_u$ zu bilden, die nur von den Drehwinkeln ϕ abhängt $[\phi_0 = -(\phi_1 + \cdots + \phi_{n-1})]$, so ist dieser also

$$(3) \qquad = \frac{1}{\Omega}\int F\,d\Omega \text{ mit } d\Omega = \left|\prod_{i<k}(\varepsilon_k - \varepsilon_i)\right|^2 \cdot d\phi_1 \cdots d\phi_{n-1},$$

$$\Omega = \int d\Omega .$$

Eine Matrix von $\mathfrak{C}_u$ läßt sich, wie man beweisen kann, in die Gestalt bringen UEU^{-1}, wo U gleichfalls zu $\mathfrak{C}_u$ gehört und die charakteristischen Wurzeln ε paarweise zueinander reziprok (konjugiert) sind: $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_h, \bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_h$. Dies berücksichtigend und bedenkend, welche der Komponenten voneinander unabhängig sind, findet man sofort

$$(4)\quad d\Omega = H^2 d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_h, \quad H = \prod_k s(\phi_k) \cdot \prod_{i<k}\big(c(\phi_k) - c(\phi_i)\big). \quad [i,k = 1,2,\cdots,h]$$

Zur Abkürzung schreibe ich $e(\phi)$ für $e^{i\phi}$, $c(\phi)$ für $2\cos\phi = e^{i\phi} + e^{-i\phi}$, $s(\phi)$ für $2i\sin\phi = e^{\phi i} - e^{-\phi i}$. Genau so erhält man im Falle der reellen Drehungsgruppe $\mathfrak{D}_u$ die schon von Ihnen ermittelten Ausdrücke:

$$H = \prod_{i<k}\big(c(\phi_k) - c(\phi_i)\big), \quad \text{bzw.} \quad H = \prod_k s^2\left(\frac{\phi_k}{2}\right)\cdot\prod_{i<k}\big(c(\phi_k) - c(\phi_i)\big).$$
$$[n = 2h] \qquad\qquad [n = 2h+1]$$

3. Die primitiven Charakteristiken χ müssen, wie Sie gezeigt haben, den Orthogonalitätsbedingungen genügen:

$$\frac{1}{\Omega}\int \chi(\phi)\chi(-\phi)\,d\Omega = 1;$$

$$\int \chi(\phi)\chi'(-\phi)\,d\Omega = 0,$$

wenn χ und χ' zu zwei inäquivalenten Darstellungen gehören.

Im Falle der Gruppe $\mathfrak{G}_u$ muß χ symmetrisch sein in den Argumenten $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{n-1}$. Setzt man, um der Orthogonalitätsbedingung zu genügen, $H\cdot\chi = \xi$ mit $H = \prod_{i<k}(\varepsilon_k - \varepsilon_i)$, so wird ξ eine endliche schiefsymmetrische Fourierreihe, also eine lineare Kombination von Ausdrücken

$$\xi(l_0, l_1, \cdots, l_{n-1}) = \big|\, e(l_0\phi), e(l_1\phi), \cdots, e(l_{n-1}\phi)\,\big|,$$

in denen die l eine wachsende Reihe ganzer Zahlen bilden: $0 = l_0 < l_1 < \cdots < l_{n-1}$. Die Determinante ist so zu lesen, daß an Stelle von ϕ der Reihe nach die Argumente $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{n-1}$ eingesetzt werden. Daß l ganze Zahlen sind, ist selbstverständlich, wenn wir die Eindeutigkeit der Darstellung postulieren; sonst muß sie entweder infinitesimal aus Cartans Tabelle der möglichen höchsten »Gewichte« abgelesen oder integral durch die Analysis situs der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}_u$ begründet werden. Wir bilden also die endlichen symmetrischen Fourierreihen

$$(5) \qquad \chi^* = \frac{\xi(l_0, l_1, \cdots, l_{n-1})}{H} = \frac{\xi(l_0, l_1 \cdots, l_{n-1})}{\xi(0, 1, \cdots, n-1)}.$$

Irgend zwei verschiedene dieser χ^* erfüllen dann die Orthogonalitätsrelation mit dem Integrationselement $d\Omega$ der Formel (3). Ferner kommt

$$\frac{1}{\Omega}\int \chi^*(\phi)\,\chi^*(-\phi)\,d\Omega = \frac{n!\,(2\pi)^{n-1}}{\Omega}.$$

Da aber $\chi^* = 1$ ist für $l_k = k$, muß der von den l unabhängige Wert $= 1$ sein. Werden die Potenzprodukte der $\varepsilon_k = e(\phi_k)$ lexikographisch geordnet, wobei in erster Linie der Exponent von ε_{n-1}, in letzter Linie derjenige von ε_0 über die Stellung entscheiden soll, so trägt das höchste Glied in χ^* der Reihe nach die Exponenten

$$(6) \qquad m_k = l_k - k\,; \quad 0 = m_0 \leqq m_1 \leqq \cdots \leqq m_{n-1}\,;$$

sie bestimmen die Höhe von χ^*. Nun findet sich aber unter den sofort angebbaren irreduziblen Darstellungen — deren Konstruktion nicht weniger naheliegend ist als die der zu Ihrer Charakteristik p_α gehörigen — eine solche, deren Charakteristik vorgegebene Höhe m, Formel (6), besitzt. Diese Charakteristik χ_m muß sich additiv aus dem zugehörigen χ_m^* und den χ^* von niedrigerer Höhe zusammensetzen. In Anbetracht der Orthogonalität ergibt sich daraus durch einen Induktionsschluß, der von den niedrigeren zu den höheren χ fortschreitet, $\chi_m = \pm\chi_m^*$. Die Variablenzahl N_m erhält man, indem man in χ_m alle $\phi_i = 0$ setzt; so findet man

$$N_m = \frac{\prod_{i<k}(l_k - l_i)}{\prod_{i<k}(k-i)}, \qquad [i, k = 0, 1, \cdots, n-1]$$

und es entscheidet sich damit auch noch das Vorzeichen. Wird die unitäre Beschränkung fallen gelassen, so treten an Stelle der ε_i allgemein die charakteristischen Wurzeln der willkürlichen Matrix T der Gruppe $\mathfrak{G}$. Die (in Ihrer Dissertation 1901 benutzte) auf der bekannten Formel von Cauchy beruhende Umrechnung der χ auf die Größen p:

$$\det(E - zT) = f(z), \qquad \frac{1}{f(z)} = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots,$$

$$\chi = |p_l, p_{l-1}, \cdots, p_{l-n+1}|$$

wird bei solchem Vorgehen nicht benötigt; das ist wichtig für die Verallgemeinerungen.

Ebenso einfach liegen die Dinge bei der Gruppe $\mathfrak{C}$ (bzw. $\mathfrak{C}_u$). Auf Grund des hier gültigen Ausdrucks (4) von H und $d\Omega$ kommt:

$$(7) \quad \chi = \frac{\xi(l_1, l_2, \cdots, l_h)}{\xi(1, 2, \cdots, h)} \text{ mit } \xi(l_1, l_2, \cdots, l_h) = |s(l_1\phi), s(l_2\phi), \cdots, s(l_h\phi)|,$$

$$H = \xi(1, 2, \cdots, h).$$

Die Höhe ist gegeben durch $m_k = l_k - k$. Die Umrechnung in eine p-Determinante ist leicht möglich. Die Anzahlformel lautet[1]:

[1] Am leichtesten findet man sie durch die Bemerkung, daß $\xi(l_1, l_2, \cdots, l_h)$ vermöge der Substitution $\phi_k = k\phi$ in den gleichen Ausdruck übergeht wie $\xi(1, 2, \cdots, h) = H$ durch die Substitution $\phi_k = l_k\phi$. Also ist für $\phi_k = k\phi$ und unendlich kleines ϕ:

$$\pm\xi(l_1, l_2, \cdots, l_h) \sim P(l_1, l_2, \cdots, l_h)\cdot\phi^{h^2}.$$

$$(8)\quad P(l_1, l_2, \cdots, l_h) = \prod_k l_k \cdot \prod_{i<k} (l_k - l_i)(l_k + l_i), \quad N = \frac{P(l_1, l_2, \cdots, l_h)}{P(1, 2, \cdots, h)}.$$

Für die Darstellungen der Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ hat man bei ungerader Dimensionszahl $n = 2h+1$ wiederum die in (7) verzeichneten Ausdrücke ξ zu bilden. Der Nenner

$$\prod_k s\left(\frac{1}{2}\phi_k\right) \cdot \prod_{i<k} \left(c(\phi_k) - c(\phi_i)\right) \qquad [i, k = 1, 2, \cdots, h]$$

ist dann $= \xi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{2h-1}{2}\right)$. Also:

$$\chi = \frac{\xi(l_1, l_2, \cdots, l_h)}{\xi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{2h-1}{2}\right)}; \quad 0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_h; \quad m_k = l_k - k + \frac{1}{2}.$$

Die eindeutigen Darstellungen werden geliefert durch ganzzahlige m, die zweideutigen, wenn man alle m gleich ganzen Zahlen $+\frac{1}{2}$ nimmt. Daß keine andern Möglichkeiten bestehen, schließt man wiederum, sei es aus der Cartanschen Tabelle, sei es aus der Analysis situs von $\mathfrak{D}_u$. Für die Anzahl hat man

$$N = \frac{P(l_1, l_2, \cdots, l_h)}{P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{2h-1}{2}\right)}.$$

Analog ist das Verfahren bei gerader Dimensionszahl; das Neue gegenüber Ihren Resultaten liegt wiederum darin, daß die m auch alle gleich ganzen Zahlen $+\frac{1}{2}$ sein können[1]. Die hier vorgenommene Umgestaltung der Methode war aber die Voraussetzung für diese Erweiterung.

4. Die Beispiele lassen die Resultate für eine beliebige halb-einfache Gruppe $\mathfrak{a}$ ohne Schwierigkeit voraussehen. Zu einer solchen in abstracto gegebenen infinitesimalen Gruppe gehören, wenn der »Rang« $= h$ ist und die Parameterzahl $= R$, nach Killing und Cartan[2], $R-h$ »Wurzeln«

$$(9)\qquad \omega = n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + \cdots + n_h\phi_h.$$

Die ϕ_i bedeuten Variable, die n_i sind ganze Zahlen. Die Wurzeln sind paarweise einander entgegengesetzt gleich; ϕ_i gehört selber zu ihnen. Wir denken sie uns lexikographisch geordnet, wobei in erster Linie der Faktor n_h von ϕ_h die Höhe bestimmt, in letzter Linie n_1. Diejenigen Wurzeln, welche höher stehen als 0, nennen wir die positiven. Zu jeder Wurzel ω gehört eine involutorische Transformation S_ω des Raumes der Variablen $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_h$ von der Gestalt:

$$\phi_i \longrightarrow \phi_i + a_i\omega \quad \text{oder} \quad \Delta_\omega(\phi_i) = a_i\omega$$

[1] Die Charakteristiken, welche Sie η, η^* nennen, machen keine größeren Schwierigkeiten als die andern.

[2] Killing, Math. Annalen **31, 33, 34, 36** (1888—1890); Cartan, Thèse, Paris (Nony) 1894.

(a_i sind gewisse der Wurzel ω zugeordnete ganze Zahlen). ω selber geht durch S_ω über in $-\omega$. Die S_ω erzeugen eine endliche Gruppe (S); ihr gegenüber ist das System der Wurzeln invariant[1]. Das im Raume der ϕ_i zugrunde zu legende Integrationselement ist

$$d\Omega = \prod_{\omega} (e^{i\omega} - 1) \cdot d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_h .$$

Ich kann also setzen

$$H = \prod^{+} s\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad d\Omega = H^2 d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_h ,$$

wo das Produkt sich nur auf die positiven Wurzeln erstreckt. Eine Operation von (S) heißt gerade oder ungerade, je nachdem sie H in H oder in $-H$ überführt. S_ω ist ungerade.

Jede primitive Charakteristik χ ist eine endliche Fourierreihe, d. h. eine lineare Kombination von Termen der Gestalt $e(\Phi)$, $\Phi = l_1\phi_1 + l_2\phi_2 + \cdots + l_h\phi_h$. Die vorkommenden Φ sind die »Gewichte« in der Cartanschen Bezeichnung, der dem Term zukommende positive ganzzahlige Koeffizient gibt die Vielfachheit des Gewichtes an. Die l sind rationale, brauchen aber nicht immer ganze Zahlen zu sein; sondern die genaue Bedingung, die da gilt, lautet: 1) für jede Wurzel ω muß

$$\Delta_\omega(\Phi) = a\omega \quad (a = l_1 a_1 + l_2 a_2 + \cdots + l_h a_h)$$

ein ganzzahliges Multiplum von ω sein. Ferner ist χ invariant gegenüber den Operationen von (S). Weil für irgendeinen Ausdruck Φ die Summe aller ΦS, die daraus durch die Operationen der Gruppe (S) hervorgehen, $= 0$ ist, fällt das höchste Φ: $\Phi = m_1\phi_1 + \cdots + m_h\phi_h$, das in χ vorkommt, gewiß nicht negativ aus. Setzen wir, um die Orthogonalitätsbedingungen zu erfüllen,

$$H \cdot \chi = \xi , \tag{10}$$

so haben die Glieder von ξ ebenfalls die Eigenschaft 1); gegenüber der Gruppe (S) ist aber ξ eine »alternierende« Funktion. Ich wähle die Zahlen $l_1, l_2, \cdots, l_h$ irgendwie so, daß $\Phi = l_1\phi_1 + l_2\phi_2 + \cdots + l_h\phi_h$ die Bedingung 1) erfüllt und alle Ausdrücke ΦS mit Ausnahme von Φ tiefer stehen als Φ. Ich bilde dann $\xi(l_1, l_2, \cdots, l_h)$ gleich der alternierenden Summe der $e(\Phi S)$. Zwei verschiedene $\xi(l)$ haben kein Glied gemeinsam; infolgedessen genügen die aus ihnen nach (10) gebildeten χ der Orthogonalitätsbeziehung. Außerdem sind die $\xi(l)$ wirklich durch H teilbar, weil $\xi(l)$ als alternierende Funktion, für welche 1) gilt, allemal dann verschwindet, wenn irgendeine Wurzel ein Multiplum von 2π ist. Da H selber alternierend ist und 1) erfüllt, muß es gleich dem niedrigsten $\xi(l)$ sein, das überhaupt existiert: $H = \xi(r_1, r_2, \cdots, r_h)$. Denn nach einer oben gemachten Bemerkung ist das höchste Glied von $\frac{\xi(l)}{H}$ notwendig

[1] Im Falle $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ ist z. B. (S) die Gruppe aller Vertauschungen von $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{n-1}$; S_ω sind die Transpositionen.

nicht-negativ; das höchste Glied von $\xi(l)$ steht also nicht tiefer als dasjenige von H. Die Formel

$$\chi = \frac{\xi(l_1, l_2, \cdots, l_h)}{\xi(r_1, r_2, \cdots, r_h)}$$

liefert die sämtlichen Charakteristiken; die Höhe von χ wird durch die Exponenten $m_i = l_i - r_i$ bezeichnet[1].

Ein bequemer Weg zur Berechnung der Dimensionszahlen N ergibt sich folgendermaßen. Die Quadratsumme der Wurzeln ω ist eine definite ganzzahlige quadratische Form $\sum_{i,k} g_{ik}\phi_i\phi_k$, die gegenüber der Gruppe (S) invariant ist. Wir setzen allgemein für beliebige Zahlen $l_i = \sum_k g_{ik} l^k$. Machen wir in $\xi(l_1, l_2, \cdots, l_h)$ unter Benutzung einer Variablen ϕ die Substitution $\phi_i = r^i\phi$, so bekommen wir die alternierende Summe jener Ausdrücke, die aus

$$e((l_1 r^1 + l_2 r^2 + \cdots + l_h r^h)\phi) = e(\phi \sum g_{ik} l^i r^k)$$

hervorgehen, wenn man die r^i oder die l^i den Transformationen (S) unterwirft. Es kommt also dasselbe heraus, wie wenn man in $H = \xi(r_1, r_2, \cdots, r_h) : \phi_i = l^i\phi$ setzt. Für $\phi_i = r^i\phi$ und unendlich kleines ϕ ist darum

$$\xi(l_1, l_2, \cdots, l_h) \sim \prod^+ (n_1 l^1 + n_2 l^2 + \cdots + n_h l^h)\cdot\phi^{\frac{R-h}{2}}.$$

Das Produkt erstreckt sich über alle Systeme ganzer Zahlen $n_1, \cdots, n_h$, denen positive Wurzeln (9) korrespondieren. So kommt

$$N = \frac{P(l_1, l_2, \cdots, l_h)}{P(r_1, r_2, \cdots, r_h)}, \text{ wo } P(l_1, l_2, \cdots, l_h) = \prod^+ (n^1 l_1 + n^2 l_2 + \cdots + n^h l_h).$$

Auch der Satz von der vollen Reduzibilität ist allgemein gültig. Der Schlüssel zu den erwähnten Ergebnissen ist die Konstruktion einer definiten Hermiteschen Form, die gegenüber der nach Lie so genannten adjungierten Gruppe $(\mathfrak{a})$ invariant ist — wenigstens dann, wenn man die Gruppenparameter gewissen Reellitätseinschränkungen unterwirft, welche die Gruppeneigenschaft von $(\mathfrak{a})$ nicht zerstören (Analogon der unitären Beschränkung).

---

[1] Damit klärt sich auch der Zusammenhang auf, der zwischen Cartans Satz, daß der Koeffizient des höchsten Gliedes in χ gleich 1 ist, und Ihrer Normierungsformel

$$\frac{1}{\Omega}\int \chi(\phi)\,\chi(-\phi)\,d\Omega = 1$$

besteht. — Will man sich nicht darauf stützen, daß es Cartan in zäher Arbeit gelungen ist, für alle in Betracht kommenden Gruppen zu jedem möglichen höchsten Gewicht (m) eine Darstellung zu konstruieren, so kann man auf transzendentem Wege allgemein zeigen, daß die Charakteristiken neben der Orthogonalitäts- die »Vollständigkeitsrelation« erfüllen, und daraus schließen, daß jedem unserer χ tatsächlich eine Darstellung entspricht.

Zürich, den 28. November 1924.

Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie[1].

III. Vereinfachung des Integralkalküls. Realitätsfragen.

Von I. Schur.

Die wichtigen und weittragenden Ergebnisse, zu denen Hr. Weyl in der vorstehenden Arbeit gelangt ist, geben uns auch in dem von mir behandelten Fall der reellen Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ und ihrer Erweiterung, der Gruppe $\mathfrak{D}'$, die Möglichkeit, die Theorie der Homomorphismen einfacher aufzubauen, als dies in A. II geschehen ist. Während ich mich genötigt sah, für $n > 3$ von einem Spezialfall des Study schen Satzes über Orthogonalinvarianten Gebrauch zu machen, kann man jetzt den allgemeinen Fall in derselben Weise rein analytisch behandeln wie für $n = 2$ und $n = 3$.

Von entscheidender Bedeutung ist hierbei, daß es Hrn. Weyl gelungen ist, einen von mir erst auf Grund der Ergebnisse von A. II gefundenen einfachen Integralausdruck für das Hurwitzsche Integral einer Klassenfunktion der Gruppe $\mathfrak{D}$ auf direktem, geometrischem Wege abzuleiten. Es dürfte aber doch nicht ohne Interesse sein, wenn ich im folgenden auch meinen Beweis mitteile. Auf demselben Wege gewinne ich noch ein weiteres, ebenso wichtiges Resultat über die Gruppe $\mathfrak{D}'$.

Erst auf Grund der neuen Integralformeln gestaltet sich der von mir in A. I entwickelte Abzählungskalkül für Orthogonalinvarianten zu einem praktisch brauchbaren. Dies zeigt deutlich das in § 3 durchgeführte Beispiel.

Im Schlußparagraphen wird die Frage nach der Realität der irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{D}$ behandelt. Ich mache hierbei von einem allgemeinen Kriterium Gebrauch, das ein genaues Analogon zu dem von Frobenius und mir[2] angegebenen Kriterium für endliche Gruppen darstellt. Das sich hierbei ergebende Resultat über die Gruppe $\mathfrak{D}$ läßt sich, wie Hr. Weyl mir mitgeteilt hat, auf anderem Wege in präziserer Fassung ableiten. Es kam mir aber darauf an, die Brauchbarkeit des allgemeinen Kriteriums darzutun.

[1] Vgl. die unter dem gleichen Titel erschienenen Arbeiten Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1924, S. 189—208 und S. 297—321. — Im folgenden werden diese beiden Arbeiten mit A. I und A. II zitiert.

[2] Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1906, S. 186—208.

§ 1. Einige Hilfsformeln.

Im folgenden bedeuten $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu$ reelle Winkelgrößen und $z_1, z_2, \cdots, z^\nu$ beliebige Punkte im Innern des Einheitskreises. Ich setze

$$f_\varkappa = \prod_{\lambda=1}^{\nu} (1 - 2 z_\varkappa \cos \phi_\lambda + z_\varkappa^2),$$

$$\Delta(c) = \prod_{\varkappa<\lambda}^{\nu}{}_1 (\cos \phi_\varkappa - \cos \phi_\lambda)$$

und betrachte, wenn $g(\phi)$ eine für $0 \leqq \phi \leqq 2\pi$ definierte, stetige Funktion bedeutet, das Integral[1]

$$J[g(\phi)] = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{g(\phi_1) \cdots g(\phi_\nu)}{f_1 f_2 \cdots f_\nu} \Delta^2(c)\, d\phi_1 \cdots d\phi_\nu .$$

Wählt man insbesondere für $g(\phi)$ eine der drei Funktionen 1, $1 - \cos\phi$, $\sin^2\phi$, so gelten, wie ich zeigen will, die Formeln

$$(1) \qquad \prod_{\varkappa<\lambda}^{\nu}{}_1 (1 - z_\varkappa z_\lambda) \cdot J[1] = \frac{\nu!}{2^{\nu^2 - 2\nu + 1}},$$

$$(2) \qquad \prod_{\varkappa\leqq\lambda}^{\nu}{}_1 (1 - z_\varkappa z_\lambda) \cdot J[1 - \cos\phi] = \frac{\nu!}{2^{\nu^2 - \nu}} \cdot \prod_{\varkappa=1}^{\nu} (1 - z_\varkappa),$$

$$(3) \qquad \prod_{\varkappa<\lambda}^{\nu} (1 - z_\varkappa z_\lambda) \cdot J[\sin^2\phi] = \frac{\nu!}{2^{\nu^2}} \cdot \prod_{\varkappa=1}^{\nu} (1 - z_\varkappa^2).$$

Der Beweis beruht auf der CAUCHYschen Determinantenformel

$$(4) \qquad \left| \frac{1}{1 - x_\varkappa y_\lambda} \right| = \frac{\Delta(x)\,\Delta(y)}{\prod_{\varkappa,\lambda} (1 - x_\varkappa y_\lambda)} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, \nu)$$

Hierbei ist für beliebige Größen $v_1, v_2, \cdots, v_\nu$

$$\Delta(v) = \prod_{\varkappa<\lambda}^{\nu}{}_1 (v_\varkappa - v_\lambda) \qquad (\Delta(v) = 1 \text{ für } \nu = 1)$$

zu setzen. Aus (4) folgt, indem man

$$Z_\varkappa = 1 + z_\varkappa^2, \qquad u_\varkappa = \frac{2 z_\varkappa}{1 + z_\varkappa^2}$$

setzt,

$$\frac{\Delta(u)\,\Delta(c)}{f_1 f_2 \cdots f_\nu} = \frac{1}{Z_1^\nu Z_2^\nu \cdots Z_\nu^\nu} \cdot \left| \frac{1}{1 - u_\varkappa \cos\phi_\lambda} \right|$$

$$= \frac{1}{Z_1^{\nu-1} Z_2^{\nu-1} \cdots Z_\nu^{1-1}} \left| \frac{1}{1 - 2 z_\varkappa \cos\phi_\lambda + z_\varkappa^2} \right|.$$

Ferner ist

$$Z_1^{\nu-1} Z_2^{\nu-1} \cdots Z_\nu^{\nu-1} \cdot \Delta(u) = 2^{\nu^2 - \nu} \Delta(z) \prod_{\varkappa<\lambda}^{\nu}{}_1 (1 - z_\varkappa z_\lambda).$$

[1] Für $\nu = 1$ hat man $\Delta(c) = 1$ zu setzen.

Wird also zur Abkürzung

$$(5) \qquad 2^{\frac{\nu^2-\nu}{2}} \Delta(z) \prod_{\varkappa<\lambda}^{\nu} (1 - z_\varkappa z_\lambda) \cdot J[g] = J_1$$

gesetzt, so erhalten wir

$$(2\pi)^\nu J_1 = \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} g(\phi_1) \cdots g(\phi_\nu) \Delta(c) \cdot \left| \frac{1}{1 - 2 z_\varkappa \cos \phi_\lambda + z_\varkappa^2} \right| d\phi_2 \cdots d\phi_\nu$$

$$= \sum \pm \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{g(\phi_1) \cdots g(\phi_\nu)\ \Delta(c)\, d\phi_1 \cdots d\phi_\nu}{(1 - 2 z_1 \cos \phi_{\lambda_1} + z_1^2) \cdots (1 - 2 z_\nu \cos \phi_{\lambda_\nu} + z_\nu^2)}$$

$$= \nu! \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{g(\phi_1) \cdots g(\phi_\nu)\ \Delta(c)\, d\phi_1 \cdots d\phi_\nu}{(1 - 2 z_1 \cos \phi_1 + z_1^2) \cdots (1 - 2 z_\nu \cos \phi_\nu + z_\nu^2)} .$$

Da aber

$$\Delta(c) = \left| (\cos \phi_\varkappa)^{\nu - \lambda} \right| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, \nu)$$

ist, so ergibt sich für J_1 der Determinantenausdruck

$$(6) \qquad J_1 = \nu! \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\phi_\varkappa) (\cos \phi_\varkappa)^{\nu-\lambda} d\phi_\varkappa}{1 - 2 z_\varkappa \cos \phi_\varkappa + z_\varkappa^2} \right| .$$

Ist nun $g(\phi)$ eine der Funktionen 1, $1 - \cos \phi$, $\sin^2 \phi$, so haben wir nur die Integrale

$$A_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^m \phi}{1 - 2z \cos \phi + z^2} d\phi \qquad (m = 0, 1, \cdots)$$

zu kennen. Man findet ohne Mühe (am einfachsten mit Hilfe des Cauchy-schen Residuensatzes), daß

$$(1 - z^2) A_m(z) = B_m(z)$$

ein Polynom des Grades m ist, und zwar wird

$$2^{2\mu-1} B_{2\mu}(z) = z^{2\mu} + \binom{2\mu}{1} z^{2\mu-2} + \cdots + \binom{2\mu}{\mu-1} z^2 + \frac{1}{2}\binom{2\mu}{\mu},$$

$$2^{2\mu} B_{2\mu+1}(z) = z^{2\mu+1} + \binom{2\mu+1}{1} z^{2\mu-1} + \cdots + \binom{2\mu+1}{\mu} z .$$

Insbesondere wird also

$$B_m(z) - B_{m+1}(z) = (1 - z) C_m(z) ,$$
$$B_m(z) - B_{m+2}(z) = (1 - z^2) D_m(z) ,$$

wobei

$$C_m(z) = \frac{z^m}{2^m} + \cdots , \quad D_m(z) = \frac{z^m}{2^{m+1}} + \cdots$$

Polynome des Grades m sind.

Für $g(\phi) = 1$ liefert nun (6)

$$\prod_{\varkappa=1}^{\nu}(1-z_\varkappa^2)\cdot J_1 = \nu!\,\left|B_{\nu-\lambda}(z_\varkappa)\right| = \frac{\nu!}{2^{\nu-2}\cdot 2^{\nu-3}\cdots 2}\Delta(z),$$

für $g(\phi) = 1-\cos\phi$

$$\prod_{\varkappa=1}^{\nu}(1-z_\varkappa^2)\cdot J_1 = \nu!\,\left|B_{\nu-\lambda}(z_\varkappa)-B_{\nu-\lambda+1}(z_\varkappa)\right|$$

$$= \frac{\nu!\prod_{\varkappa=1}^{\nu}(1-z_\varkappa)}{2^{\nu-1}\cdot 2^{\nu-2}\cdot\cdots 2}\cdot\Delta(z)$$

und für $g(\phi) = \sin^2\phi$

$$\prod_{\varkappa=1}^{\nu}(1-z_\varkappa^2)\cdot J_1 = \nu!\,\left|B_{\nu-\lambda}(z_\varkappa)-B_{\nu-\lambda+2}(z_\varkappa)\right|$$

$$= \frac{\nu!\prod_{\varkappa=1}^{\nu}(1-z_\varkappa^2)}{2^{\nu}\cdot 2^{\nu-1}\cdot\cdots 2}\cdot\Delta(z).$$

In Verbindung mit (5) folgen hieraus die Formeln (1) bis (3).

§ 2. Der vereinfachte Integralkalkül.

Ist $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe und $k(s)$ eine für jedes Element s von $\mathfrak{G}$ definierte Funktion, so bezeichne ich $k(s)$ als eine *Klassenfunktion*, wenn für je zwei innerhalb $\mathfrak{G}$ ähnliche Elemente s_1 und s_2 die Gleichung $k(s_1) = k(s_2)$ gilt. Bedeutet $\mathfrak{G}$ insbesondere die (reelle) Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$, so gehört zu jeder Klassenfunktion $k(s)$ eine zweite $k^*(s)$, die man erhält, indem man für irgendein uneigentliches Element u von $\mathfrak{D}'$

$$k^*(s) = k(u^{-1}su)$$

setzt. Wird $k^*(s) = k(s)$, so nenne ich $k(s)$ eine *gerade* Klassenfunktion. Eine solche Funktion ist allein durch die $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$ zu s gehörenden Drehungswinkel $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu$ bestimmt. Setzt man $k(s) = K(\phi)$, so besitzt die Funktion $K(\phi)$ folgende drei Eigenschaften (vgl. A. II, § 1):

1. Sie ist in bezug auf jede der ν Variabeln periodisch mit der Periode 2π.
2. Sie ist eine symmetrische Funktion von $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu$.
3. In bezug auf jedes $\phi_\varkappa$ ist $K(\phi)$ eine gerade Funktion.

Für eine zur Gruppe $\mathfrak{D}'$ gehörende Klassenfunktion $k(t)$ gilt ferner folgendes. Durchläuft t alle Elemente s der Untergruppe $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{D}'$, so erscheint $k(s)$ als eine gerade Klassenfunktion der variablen Drehung s. Für $n = 2\nu+1$ durchläuft $-s$ alle uneigentlichen Elemente von $\mathfrak{D}'$ und $k(-s)$ stellt wieder eine gerade Klassenfunktion von s dar. Ist aber $n = 2\nu$, so erhält für ein uneigentliches Element u von $\mathfrak{D}'$ die charakteristische Funktion $|e-zu|$ die Form

$$f(z,u) = |e-zu| = (1-z^2)\prod_{\lambda=1}^{\nu}(1-2z\cos\psi_\lambda+z^2)$$

und $k(u)$ läßt sich als eine Funktion $L(\psi)$ der $\nu - 1$ Winkelgrößen ψ_λ auffassen, die dieselben drei Eigenschaften aufweist wie vorhin die Funktion $K(\phi)$.

Wir können nun folgende zwei Sätze aufstellen:

I. *Ist* $k(s) = K(\phi)$ *eine stetige gerade Klassenfunktion*[1] *der variablen Drehung* s, *so wird für* $n = 2\nu$

$$(7) \qquad \frac{1}{h}\int k(s)\,ds = \frac{2^{\nu^2-2\nu+1}}{\nu!}\cdot\frac{1}{(2\pi)^\nu}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} K(\phi)\,\Delta^2\,d\phi_1\cdots d\phi_\nu$$

und für $n = 2\nu + 1$

$$(8) \qquad \frac{1}{h}\int k(s)\,ds = \frac{2^{\nu^2-\nu}}{\nu!}\,\frac{1}{(2\pi)^\nu}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} K(\phi)\,\Delta^2\cdot\prod_{\varkappa=1}^{\nu}(1-\cos\phi_\varkappa)\cdot d\phi_1\cdots d\phi_\nu .$$

Hierbei ist $\Delta = \prod_{\varkappa=\lambda}^{\nu}{}_1(\cos\phi_\varkappa - \cos\phi_\lambda)$ *zu setzen.*

II. *Um für eine zur Gruppe* $\mathfrak{D}'$ *gehörende stetige Klassenfunktion* $k(t)$ *das Integral*

$$\frac{1}{2h}\oint k(t)\,dt = \frac{1}{2h}\int k(s)\,ds + \frac{1}{2h}\int k(su_0)\,ds$$

zu berechnen, hat man sich folgender Formeln zu bedienen. Zunächst hat man bei der Berechnung des Integrals

$$\frac{1}{h}\int k(s)\,ds = \frac{1}{2h}\oint (1+|t|)\,k(t)\,dt$$

die Formeln (7) *und* (8) *zu benutzen. Ist* $n = 2\nu + 1$, *so gilt dasselbe für*

$$(9) \qquad \frac{1}{h}\int k(su_0)\,ds = \frac{1}{2h}\oint (1-|t|)\,k(t)\,dt = \frac{1}{h}\int k(-s)\,ds .$$

Für $n = 2\nu$ *wird aber*

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int k(su_0)\,ds = \dfrac{1}{2h}\oint (1-|t|)\,k(t)\,dt \\ \qquad = \dfrac{2^{\nu^2-2\nu+1}}{(\nu-1)!}\,\dfrac{1}{(2\pi)^{\nu-1}}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} L(\psi)\,\Delta'^2\cdot\prod_{\varkappa=1}^{\nu-1}\sin^2\psi_\varkappa\cdot d\psi_1\cdots d\psi_{\nu-1} . \end{cases}$$

Hierbei ist $\Delta' = \prod_{\varkappa=\nu}^{\nu-1}{}_1(\cos\psi_\varkappa - \cos\psi_\lambda)$ *zu setzen.*

Um die Formeln (7) und (8) zu beweisen, schließe ich folgendermaßen. Als stetige periodische Funktion von $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\nu$ läßt sich $k(s) = K(\phi)$ mit beliebiger Genauigkeit durch ein Polynom $T(\phi)$ approximieren, und zwar auch

[1] Ist die Klassenfunktion $k(s)$ nicht gerade, so hat man nur zu beachten, daß $k(s) + k^*(s)$ eine gerade Klassenfunktion und

$$\frac{1}{h}\int k(s)\,ds = \frac{1}{h}\int k^*(s)\,ds = \frac{1}{2h}\int \big(k(s)+k^*(s)\big)\,ds$$

wird.

durch ein Polynom, das die Eigenschaften 2. und 3. von $K(\phi)$ aufweist. Ein solches Polynom ist aber, wenn $f(z, s) = |e - zs|$ und

$$\frac{1}{f(z, s)} = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots \qquad |z| < 1$$

gesetzt wird, als lineare homogene Verbindung von endlich vielen unter den Produkten $p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_\nu}$ darstellbar (vgl. A. II, § 5). Es genügt daher, die Formeln (7) und (8) für jedes dieser Produkte oder, was dasselbe ist, für

$$k(s) = \prod_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{1}{f(z_\varkappa, s)} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}^{0 \cdots \infty} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_\nu} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_\nu^{\alpha_\nu}$$

zu beweisen. Daß unsere Formeln aber in diesem Fall richtig sind, folgt aus der in A. II, § 3 bewiesenen Gleichung

$$\frac{1}{h} \int \frac{ds}{f(z_1, s) \cdots f(z_\nu, s)} = \prod_{\varkappa \leqq \lambda}^{\nu} \frac{1}{1 - z_\varkappa z_\lambda}$$

in Verbindung mit den Formeln (1) und (2) des vorigen Paragraphen.

In analoger Weise kann man sich beim Beweis der Formel (10) auf den Fall

$$k(t) = \frac{1}{f(z_1, t) f(z_2, t) \cdots f(z_{\nu-1}, t)}$$

beschränken. In diesem Fall geht aber aus (3) und dem in A. II, § 3 Bewiesenen hervor, daß beide Seiten der zu beweisenden Gleichung den Ausdruck

$$\prod_{\varkappa \leqq \lambda}^{\nu-1} \frac{1}{1 - z_\varkappa z_\lambda}$$

liefern.

§ 3. Der Abzählungskalkül für Orthogonalinvarianten.

Auf Grund des Satzes I erfährt der in A. I, § 7 entwickelte Abzählungskalkül eine weitgehende Vereinfachung. Die dort in Form eines HURWITZschen Integrals

$$A = \frac{1}{h} \int \zeta(s)\, ds$$

dargestellte Invariantenanzahl kann nunmehr als ein wesentlich einfacher gearteter ν-faches Integral geschrieben werden.

Läßt man auch uneigentliche orthogonale Substitutionen zu, so gestaltet sich das Abzählungsverfahren folgendermaßen. Hat man es mit einem Homomorphismus $H(t)$ der Gruppe $\mathfrak{D}'$ zu tun, dessen Charakteristik $\zeta(t)$ ist, und setzt man

$$B = \frac{1}{2h} \oint \zeta(t)\, dt, \qquad B' = \frac{1}{2h} \oint \zeta(t) |t|\, dt.$$

so gibt B die Anzahl der linear unabhängigen unter den zu $H(t)$ gehörenden linearen absoluten Invarianten an und B' die analoge Anzahl für die schiefen Invarianten. Um diese Zahlen zu berechnen, hat man

$$B + B' = \frac{1}{h}\int \zeta(s)\, ds$$

auf Grund der Formeln (7) oder (8) als ν-faches Integral und

$$B - B' = \frac{1}{h}\int \zeta(su_0)\, ds$$

auf Grund der Formeln (9) oder (10) als ν-faches bzw. $(\nu - 1)$-faches Integral darzustellen.

Wie sich die Rechnungen im einzelnen gestalten, soll in einem an und für sich interessanten Beispiel gezeigt werden. Man betrachte ein System von m (allgemeinen) Bilinearformen

$$\sum_{\varkappa,\lambda}^{1\ldots 4} a_{\varkappa\lambda}^{(\mu)}\, x_\varkappa y_\lambda \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m)$$

in zwei Reihen von je 4 Veränderlichen und wende auf beide Variabelnreihen simultan alle eigentlichen und uneigentlichen orthogonalen Transformationen $t = (t_{\varkappa\lambda})$ an. Zu untersuchen sind die absoluten und schiefen Invarianten

$$J(a_{\varkappa\lambda}^{(1)}, a_{\varkappa\lambda}^{(2)}, \cdots, a_{\varkappa\lambda}^{(\mu)}),$$

die für jedes μ in bezug auf die 16 Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}^{(\mu)}$ linear und homogen sind. Zu berechnen sind die Anzahl B_m der linear unabhängigen unter den absoluten Invarianten und die analoge Anzahl B_m' für die schiefen Invarianten. Dies geschieht folgendermaßen. Die Charakteristik des durch unser Problem gekennzeichneten Homomorphismus der Gruppe $\mathfrak{D}'$ ist (vgl. A. I, § 7)

$$\zeta_m(t) = (t_{11} + t_{22} + t_{33} + t_{44})^{2m}.$$

Es wird also für eine Drehung $t = s$ mit den Drehungswinkeln ϕ_1 und ϕ

$$\zeta_m(s) = (2\cos\phi_1 + 2\cos\phi_2)^{2m} = 2^{4m}\left(\cos\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\cos\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)^{2m}$$

und für ein uneigentliches Element $t = u$ mit dem Winkel ψ

$$\zeta_m(u) = (2\cos\psi)^{2m}.$$

Daher erhalten wir wegen (7)

$$B_m + B_m' = \frac{2^{4m}}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\cos\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)^{2m}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)^2\, d\phi_1\, d\phi_2\,.$$

Dies kann aber, wie eine einfache Betrachtung lehrt, in der Form

$$B_m + B_m' = \frac{2^{4m+2}}{(2\pi)^2}\left[\int_0^{2\pi}\cos^{2m}\alpha\,\sin^2\alpha\, d\alpha\right]^2$$

geschrieben werden, was

$$B_m + B'_m = \left[\frac{(2m)!}{m!\,(m+1)!}\right]^2$$

liefert. Ferner wird wegen (10)

$$B_m - B'_m = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} (2\cos\psi)^{2m} \sin^2\psi\, d\psi = \frac{(2m)!}{m!\,(m+1)!}\,.$$

Bezeichnet man also diese ganze Zahl mit a_m, so wird

$$B_m = \frac{1}{2}(a_m^2 + a_m), \qquad B'_m = \frac{1}{2}(a_m^2 - a_m)\,.$$

Man kann dieses einfache Resultat auch auf Grund der Sätze des Hrn. E. STUDY (Leipziger Berichte 1897, S. 443—461) ableiten, doch erfordert dies ziemlich umständliche Rechnungen.

§ 4. Über die reellen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{D}$.

Beim Studium einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{H}$ linearer homogener Substitutionen, in der das Element s die Spur $\chi(s)$ besitzt, hat man drei Fälle zu unterscheiden.

1. Die Gruppe $\mathfrak{H}$ läßt sich durch eine Ähnlichkeitstransformation in eine Gruppe mit lauter reellen Koeffizienten überführen. Dann müssen die Zahlen $\chi(s)$ sämtlich reell sein.

2. Die Zahlen $\chi(s)$ sind sämtlich reell, ohne daß der Fall 1 eintritt.

3. Die Zahlen $\chi(s)$ sind nicht alle reell.

Je nachdem einer dieser Fälle stattfindet, spricht man von einer Gruppe erster, zweiter oder dritter Art.

In der auf S. 346 zitierten Arbeit haben FROBENIUS und ich bewiesen: Ist $\mathfrak{H}$ eine irreduzible endliche Gruppe der Ordnung h, so erhält die Summe

$$\frac{1}{h}\sum_s \chi(s^2)\,,$$

wobei s alle Elemente von h zu durchlaufen hat, den Wert 1, -1 oder 0, je nachdem $\mathfrak{H}$ eine Gruppe erster, zweiter oder dritter Art ist.

Genau in derselben Weise ergibt sich auf Grund der Ergebnisse von A. I

III. *Ist $\mathfrak{H}$ eine irreduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen, die der Gruppe $\mathfrak{D}$ homomorph ist, und bedeutet $\chi(s)$ die zugehörige (einfache) Charakteristik von $\mathfrak{D}$, so wird*

$$\frac{1}{h}\int \chi(s^2)\,ds = 1, -1 \text{ oder } 0,$$

je nachdem $\mathfrak{H}$ eine Gruppe erster, zweiter oder dritter Art ist.

Daß ferner jede mit der Gruppe $\mathfrak{D}$, homomorphe Substitutionsgruppe durch eine Ähnlichkeitstransformation in eine reelle Gruppe übergeführt werden kann

(vgl. A. II, § 6), ist gleichbedeutend mit der Tatsache, daß für jede einfache Charakteristik $\chi(t)$ von $\mathfrak{D}'$

$$\frac{1}{2h}\oint \chi(t^2)\,dt = 1 \tag{11}$$

wird. Bei ungeradem n ist aus demselben Grunde auch für jede einfache Charakteristik $\chi(s)$ der Gruppe $\mathfrak{D}$

$$\frac{1}{h}\int \chi(s^2)\,ds = 1\,.$$

Auf Grund des Kriteriums III und der Gleichung (11) werde ich nun beweisen:

IV. *Auch für gerades $n = 2\nu$ ist im allgemeinen jede mit $\mathfrak{D}$ homomorphe irreduzible Substitutionsgruppe $\mathfrak{H}$ von der ersten Art. Eine Ausnahme tritt nur für $n = 4k+2$ ein, wenn $\mathfrak{H}$ zu einer der in* A. II, § 5 *eingeführten Charakteristiken*

$$\eta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu}(s)\,,\qquad \eta^*_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu}(s) \qquad (\alpha_\nu > 0) \tag{12}$$

gehört. Eine solche Gruppe $\mathfrak{H}$ ist von der dritten Art.

Der Beweis stützt sich auf die Grundformel

$$\frac{\Delta(z)\prod_{\varkappa<\lambda}^{\nu}{}_1(1-z_\varkappa z_\lambda)}{f(z_1,t)\,f(z_2,t)\cdots f(z_\nu,t)} = \sum_{\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_\nu} \chi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu}(t)\,\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu}(z)\,, \tag{13}$$

die zur Bestimmung der einfachen Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{D}'$ dient (vgl. A. II, Formel (33)). Hierbei ist

$$\Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu}(z) = \left|z_\varkappa^{\alpha_1+\nu-1},\ z_\varkappa^{\alpha_2+\nu-2},\ \ldots,\ z_\varkappa^{\alpha_\nu}\right|$$

zu setzen. Ersetzt man in (13) t durch t^2 und integriert nach t, so folgt aus (11) in Verbindung mit den Formeln

$$f(z,t^2) = f(\sqrt{z},t)\,f(-\sqrt{z},t) \tag{14}$$

und (vgl. A. II, § 3)

$$\frac{1}{2h}\oint \frac{dt}{f(z_1,t)\,f(z_2,t)\cdots f(z_n,t)} = \prod_{\varkappa<\lambda}^{n}{}_1\frac{1}{1-z_\varkappa z_\lambda} \qquad (n=2\nu)$$

nach einer einfachen Zwischenrechnung die an und für sich bemerkenswerte Gleichung

$$\sum_{\alpha_1\geq\alpha_2>\cdots\geq\alpha_\nu}^{+\infty}{}_0\ \Delta_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu}(z) = \frac{\Delta(z)}{\prod_{\varkappa=1}^{\nu}(1-z_\varkappa)\cdot\prod_{\varkappa<\lambda}^{\nu}{}_1(1-z_\varkappa z_\lambda)}\,. \tag{15}$$

Nun ersetze man in (13) t durch s^2 und integriere nach s. Wegen (13) und (vgl. A. II, § 3)

$$\frac{1}{h}\int \frac{ds}{f(z_1,s)\,f(z_2,s)\cdots f(z_n,s)} = \frac{1+z_1z_2\cdots z_n}{\prod_{\varkappa<\lambda}^{n}{}_1(1-z_\varkappa z_\lambda)} \qquad (n=2\nu)$$

entsteht, wenn

$$\frac{1}{h}\int \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(s^2)\, ds = c_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\sum_{\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu}^{0\ldots\infty} c_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(z) = \frac{\Delta(z)\left(1 + (-1)^\nu z_1 z_2 \cdots z_\nu\right)}{\prod_{\nu=1}^{\nu}(1 - z_\nu) \cdot \prod_{\nu<\lambda}^{\nu}{}_1 (1 - z_\nu z_\lambda)}.$$

In Verbindung mit (15) liefert dies

$$\sum_{\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu}^{0\ldots\infty} c_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(z) = \sum_{\alpha_1 > \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu}^{0\ldots\infty} \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(z) + (-1)^\nu \sum_{\alpha_1 > \alpha_2 \geqq \cdots > \alpha_\nu}^{0\ldots\infty} \Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(z).$$

Dies zeigt, daß für $\alpha_\nu = 0$

$$c_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} = 1 \tag{16}$$

und für $\alpha_\nu > 0$

$$c_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} = 1 + (-1)^\nu \tag{17}$$

wird.

Im ersten Fall ist $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(s)$ auch für $\mathfrak{D}$ eine einfache Charakteristik, und die zugehörige Darstellung von $\mathfrak{D}$ ist wegen (16) von der ersten Art, was schon aus dem über die Gruppe $\mathfrak{D}'$ Gesagten folgt. Ist aber $\alpha_\nu > 0$, so wird $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(s)$ die Summe der beiden einander adjungierten einfachen Charakteristiken (12). Die beiden zugehörigen mit $\mathfrak{D}$ homomorphen Substitutionsgruppen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ können so gewählt werden, daß die Gruppe $\mathfrak{K}^*$ durch eine Vertauschung ihrer Elemente in $\mathfrak{K}$ übergeht. Daher sind beide Gruppen von derselben Art, und hieraus folgt wegen (17)

$$\frac{1}{h}\int \eta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(s^2)\, ds = \frac{1}{h}\int \eta^*_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}(s^2)\, ds = \frac{1 + (-1)^\nu}{2}.$$

Dies liefert aber den zu beweisenden Satz IV.

Ausgegeben am 21. Januar 1925.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1924

XXXIV. Gesamtsitzung. 18. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Roethe.

*1. Hr. Guthnick sprach über die Sterne vom β Canis-majoris-Typus.

Er wies auf eine Möglichkeit hin, die rätselvollen Erscheinungen dieser Sterne ohne Zuhilfenahme freier Pulsationen, auf Grund der Doppelsternannahme, zu erklären. Man hat dabei anzunehmen, daß die Verschiebungen der Spektrallinien, aus denen die Radialgeschwindigkeiten abgeleitet sind, ähnlich wie die Verschiebungen der sogenannten scharfen Kalziumlinien in den Spektren vieler Doppelsterne vom Spektraltypus B, durch irgendwelche der Bahnbewegung fremde Einflüsse gedämpft und vielleicht auch noch auf andere Weise modifiziert werden. Möglicherweise gehören die Linien sogar überhaupt nicht den Komponenten, sondern einer sie umhüllenden äußeren Atmosphäre allein an. Dieser Erklärungsversuch kann auch auf die δ Cephei-Veränderlichen ausgedehnt werden.

2. Hr. Marcks überreichte sein Buch »Geschichte und Gegenwart. Fünf historisch-politische Reden« (Berlin und Leipzig 1925),

3. Hr. Engler das 88. Heft (IV. 275. II.) des Werkes »Das Pflanzenreich«: A. Cogniaux und H. Harms »*Cucurbitaceae-Cucurbiteae-Cucumerinae*« (Leipzig 1924),

4. Hr. von Harnack das 50. Heft des 12. Jahrg. der »Naturwissenschaften«: »Aus den Forschungen der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften« [Berlin 1924] und

5. Hr. Wiegand das 5. Heft der »Wissenschaftlichen Veröffentlichungen des deutsch-türkischen Denkmalsschutz-Kommandos«: »Damaskus, die islamische Stadt« von Karl Wulzinger und Carl Watzinger (Berlin und Leipzig 1924).

6. Das Ehrenmitglied Hr. Lenz in Hamburg übersandte sein Buch über »Napoleon«, 4. Aufl. (Bielefeld und Leipzig 1924) und

7. das korrespondierende Mitglied Hr. Teutsch in Hermannstadt die von ihm herausgegebene 4. Aufl. des Buches von G. D. Teutsch, »Geschichte der Siebenbürger Sachsen für das sächsische Volk«, I. Bd. (Hermannstadt 1925).

Die Preußische Regierung hat am 2. Dezember 1924 die Wahl des Mitgliedes des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie, Hrn. Prof. Dr. Otto Hahn, zum ordentlichen Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse bestätigt.

Die Akademie hat die korrespondierenden Mitglieder der physikalisch-mathematischen Klasse Sir Archibald Geikie in Haslemere, Surrey, am 10. November und Hrn. Hugo von Seeliger in München am 2. Dezember durch den Tod verloren.

NAMEN- UND SACHREGISTER.

Adressen: an Joseph Partsch. 119–120. — an Hugo Bücking. 238–239. — an Hermann Zimmermann. 289–290.

Ambronn, Hermann, erhält die silberne Leibniz-Medaille. CXX.

Anatomie und Physiologie: Über eine neue Form von Respirationsapparaten, von Rubner. 2–5. — Zum Kopfproblem, von Keibel. 29. 30–43. — Über die Bildung der Körpermasse im Tierreich und die Beziehung der Masse zum Energieverbrauch, von Rubner. 216. 217–234. — Einiges über Vererbungsfragen, von Fick (*Abh.*). 271.

Antrittsreden von ordentlichen Mitgliedern: Bieberbach. XC–XCII.

Astronomie: Geschichte des Fixsternhimmels. LXII–LXIII. 275. — Über die Radialgeschwindigkeit von ε Aurigae, von Ludendorff. 8. 49–69. — Über lichtelektrische Untersuchungen an einigen spektroskopischen Doppelsternen und über neue lichtelektrische Einrichtungen der Babelsberger Sternwarte, von Guthnick. 28. — Spektralphotometrische Untersuchungen über die Sonnenkorona, von Ludendorff. 323. — Über die Sterne vom β Canis majoris-Typus, von Guthnick. 356.

Beckmann, Gedächtnisrede auf ihn; von Schlenk. CIV–CV.

Bergeat, Alfred, in Kiel, gestorben. 276.

Bieberbach, zum ordentlichen Mitglied gewählt. 179.

—, Antrittsrede. XC–XCI.

—, Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche. 180. 181–188.

Biographisches Jahrbuch, Deutsches: Bericht. LXXXI–LXXXII. — Geldbewilligung. 276.

Bopp, Karl, Leonhard Eulers und Johann Heinrich Lamberts Briefwechsel (*Abh.*). 268.

Botanik: Das Pflanzenreich. LXII. 235. 269. 275. 356. — Flora von Papuasien und Mikronesien. LXXIX—LXXX. 45. — Über den Einfluß des Alters der Keimzellen I, von Correns. 29. 70–104. — Fortsetzung der Untersuchungen über die Geschlechtsbestimmung bei *Melandrium*, von Correns. 240. — Zur Entwickelungsphysiologie des Spaltöffnungsapparates, von Haberlandt. 324. 325–336.

Brögger, Waldemar Christofer, in Christiania, zum korrespondierenden Mitglied gewählt. 7.

Bücking, Hugo, Adresse an ihn zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum. 238–239.

Carathéodory, Zur Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie. 11. 12–27.

Chemie: Die Entmischung der Flammen, von Haber. 236. — Über freie organische Radikale, von Schlenk. 295.

Correns, Über den Einfluß des Alters der Keimzellen. I. 29. 70–104.

—, Fortsetzung der Untersuchungen über die Geschlechtsbestimmung bei *Melandrium*. 240.

Cotheniusssches Legat: Preiserteilung. CXIX.

Einstein, Über den gegenwärtigen Zustand des Strahlungsproblems. 179.

—, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. 241. 261–267.

Engler, Adolf, Bericht über »Das Pflanzenreich«. LXII.

—, Bericht über die Bearbeitung der Flora von Papuasien und Mikronesien. LXXIX–LXXX.

Euler, Leonhard, sein Briefwechsel mit Johann Heinrich Lambert, hrsg. von Karl Bopp (*Abh.*). 268.

Euler-Ausgabe: Geldbewilligung. 269.

Festreden: Ansprache, gehalten in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Jahrestages König Friedrichs II., von Planck. XVII–XXIV.

Fick, Gedächtnisrede auf Johannes Orth. XCII–XCVII.

—, Einiges über Vererbungsfragen (*Abh.*). 271.

Fixsternhimmel, Geschichte desselben: Bericht. LXII–LXIII. — Veröffentlichung. 275.

Flora von Papuasien und Mikronesien: Bericht. LXXIX–LXXX. — Veröffentlichung. 45.

Gedächtnisreden: auf Johannes Orth, von Fick. XCII–XCVII. — auf Oskar Hertwig, von Keibel. XCVIII–IC. — auf Willy Georg Kükenthal, von Heider. IC–CIII. — auf Ernst Beckmann, von Schlenk. CIV–CV.

Geikie, Archibald, in Haslemere, gestorben. 356.

Geldbewilligungen: Biographisches Jahrbuch. 276. — Tierreich. 269. — Pflanzenreich. 269. — Nomenclator animalium generum et subgenerum. 269. — Euler-Ausgabe. 269. — Fritz Levy zur Fortführung seiner Untersuchungen zur Zellteilungsphysiologie. 269.

Geographie: Das Hauptproblem der physischen Anthropogeographie, von Penck. 241. 242—257.

Güttler-Stiftung: 10.

Gullstrand, Allvar, in Uppsala, zum korrespondierenden Mitglied gewählt, 10.

Guthnick, Über lichtelektrische Untersuchungen an einigen spektroskopischen Doppelsternen und über neue lichtelektrische Einrichtungen der Babelsberger Sternwarte. 28.
—, Über die Sterne vom β Canis-majoris-Typus. 356.
Haber, Die Entmischung der Flammen. 236.
Haberlandt, Zur Entwickelungsphysiologie des Spaltöffnungsapparates. 324. 325–336.
Hahn, Otto, zum ordentlichen Mitglied gewählt. 356.
Hammar, Johannes August Harald, in Uppsala, zum korrespondierenden Mitglied gewählt. 10.
Heider, Bericht über »Das Tierreich«. LX–LXI.
—, Bericht über den Nomenclator animalium generum et subgenerum. LXI.
—, Gedächtnisrede auf Willy Georg Kükenthal. IC–CIII.
—, Über das Nervensystem der Polychaeten und über seine Bedeutung für die Systematik dieser Gruppe. 235.
—, Über den Zahnwechsel bei polychaeten Anneliden. 241. 258–260.
Hellmann, Untersuchungen über die jährliche Periode der Niederschläge in Europa. 121. 122–152.
—, Versuch einer Geschichte der Wettervorhersage im XVI. Jahrhundert. (*Abh.*) 179.
Hensen, Viktor, in Kiel, gestorben. 179.
Hertwig, Oskar, Gedächtnisrede auf ihn, von Keibel. XCVIII–IC.
Jaeger, W., Versuche über die Konstruktion möglichst störungsfreier Galvanometer. Mit Nernst. 178.
Johnsen, Forschungen zur Struktur des weißen Zinns. 11.
—, Die regelmäßige Verwachsung von Kalkspat und Natronsalpeter. 357.
Keibel, Gedächtnisrede auf Oskar Hertwig. XCVIII–IC.
—, Zum Kopfproblem. 29. 30–43.
—, Über die Gefäße von Petromyzonten. 271. 272–273.
Kükenthal, Willy Georg, Gedächtnisrede auf ihn, von Heider. IC–CIII.
Lambert, Johann Heinrich, sein Briefwechsel mit Leonhard Euler, hrsg. von Karl Bopp. (*Abh.*) 268.
Landau, Edmund, zum korrespondierenden Mitglied gewählt. 28.
von Laue, Über den Schwingungsvorgang, welcher einem beliebigen astigmatischen Strahlenbündel entspricht. Mit J. Picht. 293.
—, Über das Verhältnis der Oseenschen Nadelstrahlung zur spektroskopischen Auswahlregel. Mit Frl. E. Weber. 293.
Leibniz-Ausgabe: Bericht. LXIII.
Leibniz-Medaille: Verleihung. CXX–CXXI.
Levy, Fritz, in Berlin, Gelbewilligung zur Fortführung seiner Arbeiten zur Zellteilungsphysiologie. 269.
Literaturzeitung, Deutsche: Bericht. LXIV–LXV.
Lohmann, Hans, in Hamburg, zum Korrespondierenden Mitglied gewählt. 270.
Ludendorff, Über die Radialgeschwindigkeit von ε Aurigae. 8. 49–69.
—, Spektralphotometrische Untersuchungen über die Sonnenkorona. 323.
Mathematik: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie, von Schur. 1. 189–208. — Über die Harmonie des Thetasystems, 1. Mitteilung, von Schottky. 105. 106–118. — Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche, von Bieberbach. 180. 181–188. — Über die Bestimmung eines Systems Hencky-Prandtlscher Gleitlinienscharen plastischer Körper im rotations-symmetrischen Falle, von Schmidt. 268. — Leonhard Eulers und Johann Heinrich Lamberts Briefwechsel, hrsg. von Karl Bopp. (*Abh.*) 268. — Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie, 2. Teil, von Schur. 296. 297–321. — Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen, von Weyl. 337. 338–345. — Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie, 3. Teil, von Schur. 337. 346–355.
von Mendelssohn, Franz, erhält die goldene Leibniz-Medaille. CXX.
Meitner, Lise, erhält die silberne Leibniz-Medaille. CXX.
Meteorologie: Untersuchung über die jährliche Periode der Niederschläge in Europa, von Hellmann. 121. 122–152. — Versuch einer Geschichte der Wettervorhersage im XVI. Jahrhundert, von Hellmann. (*Abh.*). 179.
Mineralogie: Forschungen zur Struktur des weißen Zinns, von Johnsen. 11. — Die regelmäßige Verwachsung von Kalkspat und Natronsalpeter, von Johnsen. 337.
G. Müller, Bericht über die »Geschichte des Fixsternhimmels«. LXII–LXIII.
Müller-Breslau, Versuche mit auf Biegung und Knickung beanspruchten Flugzeugholmen. 48. 166–176.
Nernst, Versuche über die Konstruktion möglichst störungsfreier Galvanometer. Mit W. Jaeger. 178.
Nomenclator animalium generum et subgenerum: Bericht. LXI. — Geldbewilligung. 269.
Orth, Gedächnisrede auf ihn, von Fick. XCII–XCVII.
Paläontologie: Über die Lückenhaftigkeit der paläontologischen Überlieferung, von Pompeckj. 275.

Partsch, Joseph, Adresse an ihn zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum. 119–120.
Penck, Das Hauptproblem der physischen Anthropogeographie. 241. 242–257.
Pflanzenreich: Bericht. LXII. — Geldbewilligung. 269. — Veröffentlichung. 235. 269. 275. 356.
Physik: Zur Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie, von Carathéodory. 11. 12–27. — Versuche über die Konstruktion möglichst störungsfreier Galvanometer, von Nernst und W. Jaeger. 178. — Über den gegenwärtigen Zustand des Strahlungsproblems, von Einstein. 179. — Über Ökonomie der Fluoreszenzstrahlung, von S. Valentiner und M. Rössiger. 209. 210–215. — Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, von Einstein. 241. 261–267. — Über den Schwingungsvorgang, welcher einem beliebigen astigmatischen Strahlenbündel entspricht, von von Laue und J. Picht. 293. — Über das Verhältnis der Oseenschen Nadelstrahlung zur spektroskopischen Auswahlregel, von von Laue und Frl. E. Weber. 293.
Planck, Ansprache, gehalten in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Jahrestages König Friedrichs II. XVII–XXIV.
—, Erwiderung auf die Antrittsrede des Hrn. Bieberbach. XCI—XCII.
Pompeckj, Über die Lückenhaftigkeit der paläontologischen Überlieferung. 275.
Preise: Cotheniussches Legat. CXIX.
Quincke, Georg, in Heidelberg, gestorben. 7.
Rössiger, M., Über Ökonomie der Fluoreszenzstrahlung. Mit S. Valentiner. 209. 210–215.
Roux, Wilhelm, in Halle, gestorben. 276.
Rubner, Über eine neue Form von Respirationsapparaten. 2–5.
—, Über die Bildung der Körpermasse im Tierreich und die Beziehung der Masse zum Energieverbrauch. 216. 217–234.
Schlenk: Gedächtnisrede auf Ernst Beckmann. CIV–CV.
—, Über freie organische Radikale. 295.
E. Schmidt, Über die Bestimmung eines Systems Hencky-Prandtlscher Gleitlinienscharen plastischer Körper im rotations-symmetrischen Falle. 268.
Schottky, Über die Harmonie des Thetasystems. 1. Mitteilung. 105. 106–118.
Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. 1. 189–208.
—, desgl. 2. Teil. 296. 297–321.
Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. 3. Teil. 337. 346–355.
Seeliger, Hugo von, in München, gestorben. 356.
Technik: Versuche mit auf Biegung und Knickung beanspruchten Flugzeugholmen, von Müller-Breslau. 48. 166–176. — Die Knickfestigkeit offener und geschlossener Stabzüge (Stabringe), von Zimmermann. 121. 153–165. — Die Knickfestigkeit gekrümmter Stäbe mit elastischer Einspannung, von Zimmermann. 275. 277–288.
Tierreich: Bericht. LX–LXI. — Geldbewilligung. 269.
Todesanzeigen: Quincke. 7. — Hensen. 179. — Warming. 209. — Wille. 235. — Bergeat. 276. — Roux. 276. — Geikie. 356. — von Seeliger. 356.
Valentiner, S., Über Ökonomie der Fluoreszenzstrahlung. Mit M. Rössiger. 209. 210–215.
Wahl ordentlicher Mitglieder: Bieberbach. 179. — Hahn. 356.
— korrespondierender Mitglieder: Brögger. 7. — Hammar. 10. — Gullstrand. 10. — Landau. 28. — Lohmann. 270.
Warming, Eugenius, in Kopenhagen, gestorben. 209.
Wentzel-Stiftung: Bericht. LXXVI–LXXXII. — Veröffentlichung. 45.
Weyl, Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen. 337. 338–345.
Wille, Johan Nordal Fischer, in Christiania, gestorben. 235.
Wislicenus, Georg, erhält die silberne Leibniz-Medaille. CXXI.
Zimmermann, Die Knickfestigkeit offener und geschlossener Stabzüge (Stabringe). 121. 153–165.
—, Die Knickfestigkeit gekrümmter Stäbe mit elastischer Einspannung. 275. 277–288.
—, Adresse an ihn zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum. 289–290.
Zoologie: Das Tierreich. LX–LXI. 269. — Nomenclator animalium generum et subgenerum. LXI. 269. — Zum Kopfproblem, von Keibel. 29. 30–43. — Über die Bildung der Körpermasse im Tierreich und die Beziehung der Masse zum Energieverbrauch, von Rubner. 216. 217–234. — Über das Nervensystem der Polychaeten und über seine Bedeutung für die Systematik dieser Gruppe, von Heider. 235. — Über den Zahnwechsel bei polychaeten Anneliden, von Heider. 241. 258–260. — Über die Gefäße von Petromyzonten, von Keibel. 271. 272–273.

Berichtigung.

S. CVIII, Note 2 lies: Gnomon des Idios Logos (statt Gnomon der Idios Logos).

Ausgegeben am 21. Januar 1925.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei

§ 17.

Eine für die akademischen Schriften bestimmte wissenschaftliche Mitteilung darf in keinem Falle vor ihrer Ausgabe an jener Stelle anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Sollte eine dem zuwiderlaufende Veröffentlichung dem redigierenden Sekretar vor der Ausgabe in den akademischen Schriften zur Kenntnis kommen, so hat er die Mitteilung aus diesen zu entfernen.

Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilung dieselbe anderweitig früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies nach den geltenden Rechtsregeln zusteht, so bedarf er dazu der Einwilligung der Gesamtakademie.

Gedächtnisreden anderweitig zu veröffentlichen, ist den Verfassern unbeschränkt gestattet.

Aus § 21.

Die Sitzungsberichte erscheinen in einzelnen Stücken in der Regel Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.

Aus § 22.

Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mitteilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

Hinter den Titeln der wissenschaftlichen Mitteilungen folgen in dieser Übersicht kurze Inhaltsangaben derselben, welche die Verfasser einreichen, und für welche sie verantwortlich sind. Diese Inhaltsangaben sollen sich in der Regel auf 5—6 Druckzeilen beschränken, keinesfalls 10 Zeilen überschreiten.

Die nicht in den Schriften der Akademie erscheinenden Mitteilungen werden mit vorgesetztem Stern bezeichnet, bei den für die Abhandlungen bestimmten wird »(Abh.)« zugefügt.

Wissenschaftliche Mitteilungen fremder Verfasser werden in dem Bericht über diejenige Sitzung aufgeführt, in welcher deren Aufnahme in die akademischen Schriften endgültig beschlossen wird.

Aus § 27.

Das Manuskript einer in einer akademischen Sitzung am Donnerstag zur Aufnahme in die Sitzungsberichte zugelassenen Mitteilung, welche am nächsten Donnerstag gedruckt erscheinen soll, muß der Regel nach in der Sitzung selber, spätestens bis Freitag 10 Uhr morgens, dem redigierenden Sekretar oder der Reichsdruckerei druckfertig zugestellt werden. Später eingereichte Manuskripte werden, mit dem Präsentationsvermerk des redigierenden Sekretars oder des Archivars versehen, für ein späteres Stück zurückgelegt.

Dasselbe kann von vornherein mit Mitteilungen geschehen, deren Satz aus irgendwelchen Gründen besondere Schwierigkeiten erwarten läßt, oder welche den in den §§ 3 und 4 enthaltenen Bestimmungen nicht entsprechen.

Die Reichsdruckerei sendet die Korrekturen an das Bureau der Akademie, das sie an die Verfasser oder an die Mitglieder, welche die Mitteilung vorgelegt haben, weiterreicht. Die Verfasser schicken die Korrekturabzüge nach Berichtigung an das Bureau der Akademie zurück und erhalten und erledigen auf dem gleichen Wege auch die etwa erforderlichen weiteren Korrekturen. Wird die Korrektur länger als bis Dienstag Abend von der damit betrauten Person behalten, so hat diese es zu verantworten, wenn die Mitteilung in einem späteren Stück erscheint.

Nach auswärts werden Korrekturen nur auf Verlangen versandt; die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mitteilung nach acht Tagen. Fremden Verfassern, deren Korrekturen erst noch dem vorlegenden Mitgliede zur Revision unterbreitet werden müssen, kann das Erscheinen am nächsten Ausgabetage überhaupt nicht zugesichert werden.

Aus § 36.

Die Akademie behält sich das Recht vor, von einer vergriffenen Abhandlung eine zweite Auflage zu veranstalten.

Abhandlungen der Akademie

Physikalisch-mathematische Klasse

Jahrgang 1921 . . . . . ℳ 9.—
» 1922 . . . . . » 5.75
» 1923 . . . . . » 1.—

Einzelne Abhandlungen aus den Jahren 1918—1924

F. K. Ginzel: Beiträge zur Kenntnis der historischen Sonnenfinsternisse und zur Frage ihrer Verwendbarkeit (1918, 4) . . . . . ℳ 3.—
Haberlandt: Gedächtnisrede auf Simon Schwendener (1919) . . . . . » 0.75
Hellmann: Beiträge zur Erfindungsgeschichte meteorologischer Instrumente (1920, 1) . . . . . » 2.50
Penck: Die Höttinger Breccie und die Inntalterrasse nördlich Innsbruck (1920, 2) . . . . . » 17.50
Hellmann: Die Meteorologie in den deutschen Flugschriften und Flugblättern des XVI. Jahrhunderts. Ein Beitrag zur Geschichte der Meteorologie (1921, 1) . . . . . » 5.—
Fick: Über die Entstehung der Gelenkformen. Mit Tierversuchen (1921, 2) . . . . . » 2.—
Rubner: Über die Wasserbindung in Kolloiden mit besonderer Berücksichtigung des quergestreiften Muskels (1922, 1) . . . . . » 4.—
Hellmann: Versuch einer Geschichte der Wettervorhersage im XVI. Jahrhundert (1924, 1) . . » 2.—

Die Preise verstehen sich in Goldmark.

Auf die Preise der Abhandlungen bis einschließlich Jahrgang 1922 wird für das Inland ein Preisnachlaß von 20 Prozent gewährt.

Sitzungsberichte der Akademie

Physikalisch-mathematische Klasse

Preis des Jahrgangs . . . . . ℳ 9.–

Sonderabdrucke. I. Halbjahr 1923

EINSTEIN: Zur affinen Feldtheorie . . . . . ℳ 0.5
HELLMANN: Über den Ursprung der volkstümlichen Wetterregeln (Bauernregeln) . . . . . » 1.0

Sonderabdrucke. II. Halbjahr 1923

A. OSTROWSKI: Über Potenzreihen, die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen . . . . . ℳ 0.5
ZIMMERMANN: Die Formänderungen gekrümmter Stäbe durch Druck . . . . . » 0.5
H. RADEMACHER: Über die Anwendung der VIGGO BRUNSchen Methode auf die Theorie der algebraischen Zahlkörper . . . . . » 0.5
FICK: Über die Maßverhältnisse der Hand mit Angaben über die Hände von W. v. WALDEYER-HARTZ† (hierzu Taf. I und II) . . . . . » 1.0
E. GEHRCKE und E. LAU: Das Viellinienspektrum des Wasserstoffs, zweite Mitteilung. Mit einem Zusatz über das kontinuierliche Spektrum (hierzu Taf. III) . . . . . » 0.5
RUBNER: Die Beziehung des Kolloidalzustandes der Gewebe für den Ablauf des Wachstums . . » 0.5
ZIMMERMANN: Die Knickfestigkeit von Stäben mit nicht gerader Achse. Eine Erweiterung der EULERschen Knicktheorie . . . . . » 1.0
HABERLANDT: Über die Ursache des Ausbleibens der Reduktionsteilung in den Samenanlagen einiger parthenogenetischer Angiospermen (hierzu Taf. IV) . . . . . » 0.5
HELLMANN: Physiognomie des Regens in der gemäßigten und in der Tropenzone . . . . . » 1.0
SCHMIDT: Über den JORDANschen Kurvensatz . . . . . » 0.5
v. LAUE: Zur Theorie der von glühenden Metallen ausgesandten positiven Ionen und Elektronen » 0.5
PLANCK: Die Energieschwankungen bei der Superposition periodischer Schwingungen . . . . » 0.5
EINSTEIN: Bietet die Feldtheorie Möglichkeiten für die Lösung des Quantenproblems? . . . . » 0.5
W. KOLHÖRSTER: Intensitäts- und Richtungsmessungen der durchdringenden Strahlung. III. Teil gemeinsam mit GUBERT v. SALIS (hierzu Taf. V) . . . . . » 0.5

Sonderabdrucke. I. Halbjahr 1924

CARATHÉODORY: Zur Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie . . . . . ℳ 0.5
KEIBEL: Zum Kopfproblem . . . . . » 0.5
LUDENDORFF: Über die Radialgeschwindigkeit von ϵ Aurigae . . . . . » 1.0
CORRENS: Über den Einfluß des Alters der Keimzellen. I. Dritte Fortsetzung der Versuche zur experimentellen Verschiebung des Geschlechtsverhältnisses . . . . . » 1.5
SCHOTTKY: Über die Harmonie des Thetasystems. 1. Mitteilung . . . . . » 0.5
HELLMANN: Untersuchungen über die jährliche Periode der Niederschläge in Europa . . . . . » 1.0
ZIMMERMANN: Die Knickfestigkeit offener und geschlossener Stabzüge (Stabringe) . . . . . » 0.5
MÜLLER-BRESLAU: Versuche mit auf Biegung und Knickung beanspruchten Flugzeugholmen . . » 0.5
BIEBERBACH: Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche . . . . . » 0.5
SCHUR: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie . . . . » 1.0
S. VALENTINER und M. RÖSSIGER: Über Ökonomie der Fluoreszenzstrahlung . . . . . » 0.5
RUBNER: Über die Bildung der Körpermasse im Tierreich und die Beziehung der Masse zum Energieverbrauch . . . . . » 1.0

Sonderabdrucke. II. Halbjahr 1924

PENCK: Das Hauptproblem der physischen Anthropogeographie . . . . . ℳ 0.5
EINSTEIN: Quantentheorie des einatomigen idealen Gases . . . . . » 0.5
ZIMMERMANN: Die Knickfestigkeit gekrümmter Stäbe mit elastischer Einspannung . . . . . » 0.5

Die Preise verstehen sich in Goldmark.

LB D '25

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01298 9919